

MAP2310-2014

Prova 2

20/10/2014

1. (3.0pts) Considere a seguinte EDP

$$(b + a(x + 1))u_{xx} + (2axy - 4b)u_{xy} + (4b - ay^2)u_{yy} = 0.$$

- (a) (1.0pts) Considerando $a = 1$ e $b = 0$, descreva e desenhe quais regiões do plano a equação será elíptica, parabólica ou hiperbólica.
- (b) (2.0pts) Considerando $a = 0$ e $b = 1$, classifique a EDP e proponha uma mudança de variáveis que simplifique a equação. Resolva a equação (considerando funções/condições arbitrárias).
2. (3.5pts) Mostre que a equação da onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ satisfaz as seguintes propriedades (Faça as suposições de suavidade e integrabilidade necessárias):
- (a) (Translação) Se $u(t, x)$ é solução, então $u(t, x - y)$ também será, para $y \in \mathbb{R}$.
- (b) (Derivação) Se $u(t, x)$ é solução, então $u_x(t, x)$ e $u_t(t, x)$ também serão.
- (c) (Dilatação) Se $u(t, x)$ é solução, então $u(at, ax)$ também será, para $a \in \mathbb{R}$.
- (d) Se $u(t, x)$ é solução, então $v(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t, x - y)\phi(y)dy$ também será.
- (e) (2.0pts) Resolva a equação considerando $x > 0$, $u(0, x) = \phi(x)$, $u_t(0, x) = 0$ e $u_x(t, 0) = 0$ (condição de Neumann), com $\phi(x) = 1$ se $|x - 2| < 1$, zero caso contrário. Analise o que ocorre com a onda ao chegar na fronteira ($x = 0$).
3. (3.5pts) Considere a equação de transporte/difusão

$$u_t + cu_x = ku_{xx},$$

com $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $k > 0$ e $u(0, x) = \phi(x)$.

- (a) (1.5pts) Resolva este problema e interprete a solução do ponto de vista de transporte e difusão. Dica: Faça uma mudança de variáveis ($\tau = t$ e $y = x - ct$). Lembre-se de retornar às variáveis originais!!
- (b) (1.5pts) Proponha um método numérico para resolver essa equação que seja consistente. Descreva como o método seria implementado computacionalmente (pseudo-algoritmo) para um domínio limitado $[0, 1]$ com condições de fronteira de Dirichlet.
- (c) (0.5pts) Quais condições de estabilidade o seu método deve satisfazer (relações entre Δt e Δx) para ser convergente? Analise como c e k afetam essas condições.