MAP2320-2014

Prova 2

24/10/2014

1. (4.0pts) Considere a EDP
$$u_{tt} + 2u_{xt} - 8u_{xx} = 0,$$
com $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) (2.0) Classifique a EDP e proponha uma mudança de variáveis que a coloque numa forma canônica.

   (b) (2.0) Resolva a equação $u_{tt} = u_{xx}$ considerando $x > 0$, $t > 0$, com condições iniciais $u(0, x) = \psi$, $u_t(0, x) = 0$ e condição de fronteira de Dirichlet, $u(t, 0) = 0$, com $\psi(x) = 1$ se $|x - 2| < 1$, zero caso contrário. Analise o que ocorre próximo da fronteira.

2. (4.0pts) Considere a equação de transporte/difusão com forçante
$$u_t + cu_x - ku_{xx} = f(t, x),$$
com $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $k > 0$ e $u(0, x) = \phi(x)$.

   (a) (2.0pts) Resolva este problema e interprete a solução do ponto de vista de transporte e difusão. Dica: Faça uma mudança de variáveis ($\tau = t$ e $y = x - ct$). Lembre-se de retornar às variáveis originais!!

   (b) (2.0pts) Proponha uma condição inicial não trivial para o problema com $y > 0$ e analise o problema para o caso $f = 0$ com fronteira de Neumann em $y = 0$ dada por $u_y(t, 0) = 0$.

3. (2.0pt) Mostre que a equação de Black and Scholes
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$
pode ser transformada na equação do calor
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
com $x \in \mathbb{R}$, usando as transformações $\tau = T - t$, $x = \ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau$,
$$u(x, \tau) = V(S(x, \tau), t(\tau))e^{r\tau}.$$