BMAC / IME / USP – MAC-315 – Segunda Prova – 27/11/2014

Nome:________________________ **Assinatura:**____________________ **No USP:** ☐☐☐☐☐☐☐

i j k

Atenção: enuncie todas as definições ou resultados utilizados. Escreva sempre as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $p' = c'_B B^{-1}$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A^j = c_j - p' A^j$, $\bar{c}' = c' - c'_B B^{-1} A$, $d_B = -B^{-1} A^j$, $u = B^{-1} A^j$, etc). Esquemas e fórmulas sem o acompanhamento de explicações textuais não serão corrigidos (terão valor 0).

$\boxed{\textbf{Questão 1}}$ (2 pontos) Considere o $(\text{PLC})_{\text{aux}}$ definido por

$$(PLC)_{\text{aux}} \left\{ \begin{array}{lcccccl} \min & & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i & & & & \\ \text{s.a} & Ax & + & y & = & b & \qquad (\text{onde } \ b \geq 0) \\ & & x,\ y \geq 0. & & & & \end{array} \right.$$

a) Este problema pode ser inviável? Justifique sucintamente.

b) Este problema pode ser ilimitado? Justifique sucintamente.

c) Este problema permite detectar inviabilidade do (PLC) original (sem as variáveis y)? Justifique sucintamente.

d) Este problema permite detectar ilimitação do (PLC) original? Justifique sucintamente.

Questão 2 (3 pontos) Considere o (PLC) $\min c'x$ s.a $Ax = b,\ x \geq 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique se a base $\{x_3, x_4\}$ possui viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex tabular correspondente (primal ou dual) a partir desta base.

b) Substituindo b por $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, verifique se a base obtida no item (a) preserva viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex correspondente para o novo problema a partir daquela base. Dica: B^{-1} está no tableau do final do item (a).

c) Escreva as condições algébricas sobre c_1 e c_2 (supondo $c_3 = c_4 = 0$) para as quais a base obtida no final do item (b) permanece ótima.

Observação importante: sequências de tableaux sem explicação textual ou sem conclusão textual não serão considerados. Escreva as fórmulas literais antes de recalcular o tableau no item (b).

Questão 3 (2.5 pontos) Considere um problema na forma canônica descrito através do seguinte tableau:

	0	0	0	0	δ	3	γ	ε
$x_2 =$	β	0	1	0	α	1	0	3
$x_3 =$	2	0	0	1	-2	2	θ	-1
$x_1 =$	3	1	0	0	0	-1	2	1

Determine condições algébricas gerais sobre os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta$ que tornam as frases seguintes verdadeiras, justificando *sucintamente* o que a condição representa. Se o valor de algum parâmetro for irrelevante para a frase, você não precisa mencioná-lo, subentendendo que qualquer valor em $\mathbb{R}$ serve para aquele parâmetro. Cada item abaixo vale 0.5 ponto.

a) Pode-se aplicar a fase 2 do simplex usando este tableau na primeira iteração.

b) A solução básica correspondente é viável e a primeira iteração do simplex indica que o valor ótimo é $-\infty$ (ilimitação).

c) A solução básica correspondente é viável, x_6 é candidato a entrar na base, e quando x_6 entrar, x_3 é a variável que deve sair.

d) A solução básica correspondente é viável dual e inviável primal, e o simplex dual identifica a inviabilidade do problema primal.

e) A solução básica correspondente é viável dual e inviável primal, x_2 é candidato a sair da base, e a pivotação obtida é dual-degenerada (solução dual e valor da função objetivo permanecem iguais).

Dica: Você não precisa fazer nenhuma pivotação do tableau, basta indicar as contas relevantes para verificar cada propriedade.

Questão 4 (2.5 pontos) Na definição de dualidade tratamos as restrições envolvendo A e b de forma diferente das restrições de sinal. Em particular, um problema da forma

$$(P)\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \le b, \\ & x \ge 0 \end{cases}$$

era reformulado como $\min\limits_{x\ge 0}\max\limits_{p\le 0} c'x + p'(b - Ax)$. Seria possível tratar as restrições de sinal de forma análoga às demais, introduzindo termos de penalização correspondentes na função objetivo:

$$(\text{min-max})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbf{R}^n}\max\limits_{\substack{p\le 0\\ q\ge 0}} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x) \end{cases}$$

a) Mostre que o problema (min-max) acima é equivalente ao problema (P) original.
Dica: considere a função $h(x) = \max\limits_{\substack{p\le 0\\ q\ge 0}} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x)$.

b) Mostre que o dual dessa formulação, dado por

$$\max_{\substack{p\le 0\\ q\ge 0}}\min_{x\in\mathbf{R}^n} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x)$$

$$|||$$

$$\max_{\substack{p\le 0\\ q\ge 0}}\min_{x\in\mathbf{R}^n} p'b + (c' - p'A - q')x$$

é equivalente ao dual de (P) de acordo com a definição original.