

MAP2320 - Métodos Numéricos em EDPs

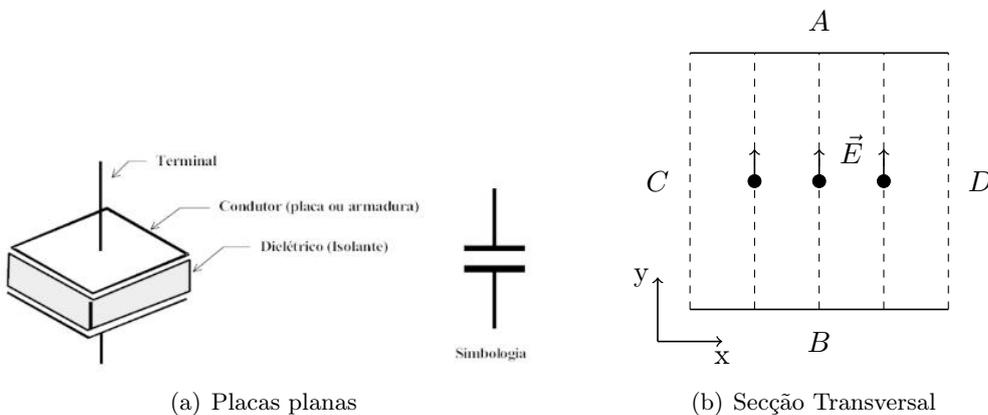
Potencial eletrostático entre placas paralelas

Os objetivos deste exercício computacional são:

- Apresentar a modelagem do campo eletrostático entre duas placas paralelas.
- Implementar o método das diferenças finitas para a equação de Poisson no quadrado unitário.
- Comparar os métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e (**bônus**) SOR para a resolução dos sistemas lineares associados.

1 Modelagem do problema

Sejam A e B duas placas paralelas planas, de área $L \times L$ e colocadas a uma distância L uma da outra. Sendo conhecidos os potenciais eletrostáticos V_A e V_B , vamos analisar como obter uma estimativa do potencial V em cada ponto no interior da região entre as duas placas. Para simplificarmos a modelagem, consideramos que os potenciais na região fora da placa são nulos, de modo que pela simetria do problema é possível analisar apenas uma secção transversal do domínio, conforme a figura abaixo



Seja ϵ o coeficiente de permissividade elétrica do meio¹, $\rho_v = \rho_v(x, y)$ a densidade de carga total em um ponto (x, y) entre as placas e \vec{E} o campo elétrico entre as placas, pela Lei de Maxwell temos que

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_v \quad (1)$$

Além disso, pela Lei de Coulomb, temos que o campo elétrico \vec{E} é contrário ao gradiente do potencial, isto é

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (2)$$

¹A permissividade é uma constante física que descreve como um campo elétrico afeta e é afetado por um meio

Substituindo (2) em (1), e considerando o meio homogêneo (ε constante entre as placas) temos que

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \nabla \cdot (-\varepsilon \nabla V) = -\nabla \cdot (\nabla V) = -\varepsilon \Delta V = \rho_v$$

Considerando $f(x, y) = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$ e $\Omega = (0, L) \times (0, L)$, temos o seguinte problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta V = f & \text{em } \Omega \\ V = v_0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

onde v_0 é o potencial no contorno que, neste caso, é dado por:

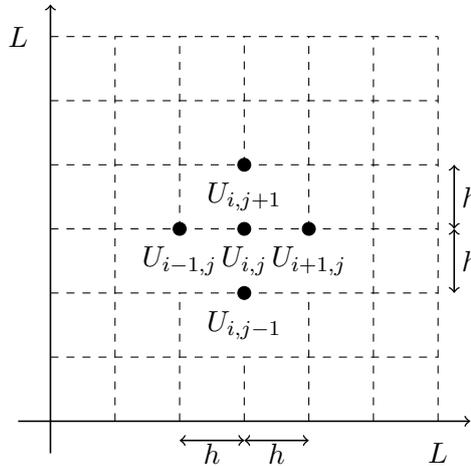
$$v_0(x, y) = \begin{cases} V_A(x, L), & 0 \leq x \leq L \\ V_B(x, 0), & 0 \leq x \leq L \\ V_C(0, y), & 0 \leq y \leq L \\ V_D(L, y), & 0 \leq y \leq L \end{cases}$$

onde V_C e V_D são definidas de forma a tornar o problema bem posto².

2 Método Numérico

Por conveniência de notação, vamos descrever a solução do problema (3) como $u(x, y)$ ao invés de $V(x, y)$. Sendo $\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, L]$ o domínio contínuo e $N \in \mathbb{N}$, consideramos o espaçamento uniforme $h = \frac{L}{N}$ de modo que o domínio discreto da equação é descrito pelo conjunto

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq N \quad \text{e} \quad y_j = jh, \quad 0 \leq j \leq N\}$$



Aproximando as derivadas em x e em y pela expansão em série de Taylor, temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j))}{h^2} + \frac{h^2}{12} u(\xi, y_j)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{h^2} + \frac{h^2}{12} u(x_i, \eta)$$

onde $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ e $\eta \in (y_{j-1}, y_{j+1})$.

²A rigor este problema possui condições de contorno mistas, isto é, sobre os trechos A e B é conhecida a própria solução do problema (Condição de Dirichlet) e sobre os trechos C e D é conhecida a derivada normal da solução (Condição de Neumann). Como estamos simplificando o problema de forma a apresentar um problema de valor de contorno com condição de Dirichlet, vamos supor apenas que as funções V_C e V_D são suficientemente regulares e definidas de forma que o problema possua uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Sendo $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, vamos desprezar os erros de discretização e obter aproximações $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$ que satisfazem a seguinte relação

$$-U_{i-1,j} - U_{i+1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} \quad (4)$$

para $i, j = 1, \dots, N$. Portanto temos que resolver um sistema linear de equações com $(N-1)^2$ incógnitas (os $U_{i,j}$) e $(N-1)^2$ equações.

2.1 Métodos Iterativos

Seja $U_{i,j}^k$ a aproximação nos pontos (x_i, y_j) na k -ésima iteração. Para resolvermos o sistema de equações resultante iremos utilizar três diferentes métodos iterativos:

- Método de Jacobi

Para $i = 1, \dots, N-1$:

Para $j = 1, \dots, N-1$:

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \left[U_{i-1,j}^k + U_{i+1,j}^k + U_{i,j-1}^k + U_{i,j+1}^k + h^2 f_{i,j} \right] \quad (5)$$

- Método de Gauss-Seidel

Para $i = 1, \dots, N-1$:

Para $j = 1, \dots, N-1$:

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \left[U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i+1,j}^k + U_{i,j+1}^k + h^2 f_{i,j} \right] \quad (6)$$

- Método SOR

Fixado o parâmetro ω :

Para $i = 1, \dots, N-1$:

Para $j = 1, \dots, N-1$:

$$U_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega)U_{i,j}^k + \frac{\omega}{4} \left[U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i+1,j}^k + U_{i,j+1}^k + h^2 f_{i,j} \right] \quad (7)$$

2.2 Critério de parada

Como critério de parada vamos avaliar a diferença entre duas iterações, e paramos se esta diferença for pequena. Assim, dada uma tolerância inicial EPS , iremos considerar como critério de parada a condição

$$\|U^k - U^{k-1}\|_h \leq EPS$$

onde a norma $\|\cdot\|_h$ é dada por

$$\|U\|_h = h \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} |U_{i,j}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Esta é uma medida de variação quadrática média entre iterações.

3 Tarefa

Considere α é o último algarismo³ do seu número USP e $L = 1$.

1. Para testarmos a implementação computacional realizada, considere o problema (3) para

a) $f = 0$ e $u(x, y) = \alpha e^x \sin(y)$ para $(x, y) \in \partial\Omega$.

³Caso o dígito seja zero considere o penúltimo algarismo.

b) $f(x, y) = 2\alpha\pi^2 \cos(\pi x) \sin(\pi y)$ e $u(x, y) = \alpha \cos(\pi x) \sin(\pi y)$ para $(x, y) \in \partial\Omega$.

- Resolva numericamente os problemas a) e b) para $N = 2^3, \dots, 2^9$ utilizando os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para a resolução do sistema linear associado. Utilize a aproximação inicial nula e o critério de parada com $EPS = 10^{-5}h$.
- Compare a relação entre os valores de N e a quantidade de iterações necessárias (e o tempo computacional) para a resolução utilizando cada um dos métodos.
- Compare as soluções obtidas com a solução exata do problema (observe que a função u descrita no contorno é a própria solução do problema).

2. Vamos agora utilizar o algoritmo implementado para a simulação de um modelo real. Considere o problema (3) para $V_A(x, 1) = 110V$, $V_B(x, 0) = 0V$, $V_C(0, y) = V_D(1, y) = 110 \sin(\frac{\pi}{2}y)$ nos seguintes casos:

- a) Duas placas contendo ar entre elas (permissividade $\varepsilon \approx 8.84 \times 10^{-12}$) e com densidade constante $\rho_v = 100 \times 10^{-12}$.
- b) Duas placas paralelas contendo baquelita (permissividade $\varepsilon \approx 75 \times 10^{-12}$) e com densidade dada por $\rho_v = 10 \sin(\pi(x + y)) \times 10^{-8}$.

Resolva numericamente os problemas utilizando a aproximação inicial nula e o critério de parada com $EPS = 10^{-5}h$.

3. **(Item bônus)** Utilizando o método SOR com

$$\omega_* = \frac{2}{1 + \sin(\pi h)}$$

compare a quantidade de iterações necessárias (e o tempo computacional) em relação aos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel. O que pode-se observar?

Observações sobre a implementação computacional

- I) Toda a notação apresentada no enunciado considera que os índices começam em 0 (zero). Caso queira utilizar uma linguagem interpretada onde os índices comecem em 1 (um) tenha muito cuidado com os índices. **Utilize precisão dupla em todos os cálculos.**
- II) Antes de realizar o método iterativo, deve-se inicializar os valores das fronteiras $U_{0,i}, U_{i,0}, U_{i,N}$ e $U_{N,i}$, $i = 1, \dots, N$ utilizando os valores de $u(x, y)$ conhecidos em $\partial\Omega$.

Referências

- [1] Sadiku, M.N.O. - *Elements of Electromagnetics* - Oxford University Press - 2010.
- [2] Stoer, J and Burlisch, R. - *Introduction to Numerical Analysis* - Springer - 3rd Ed. - 2002.
- [3] Strikwerda, J.C.- *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations* - SIAM - 2nd ed. - 2004.