

MAP2320 - Métodos Numéricos em EDPs

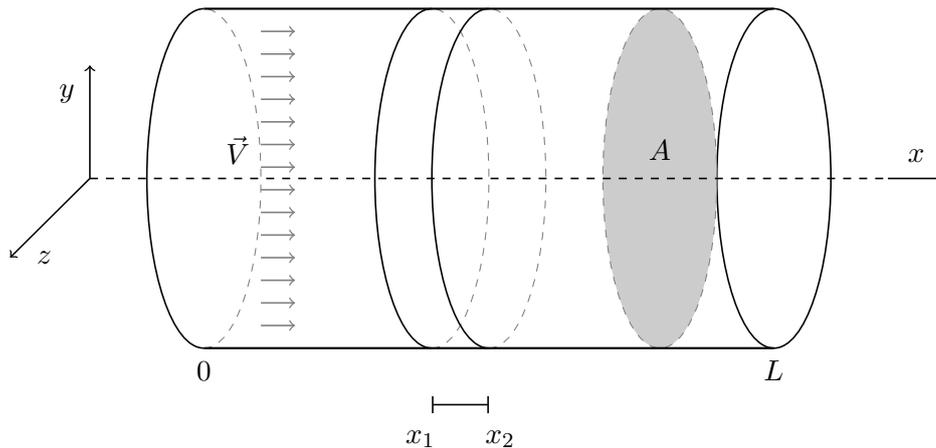
Transporte Unidimensional

Os objetivos deste exercício computacional são:

- Apresentar a modelagem do escoamento de um fluido incompressível.
- Implementar e analisar a convergência de diferentes métodos numéricos para o caso linear.
- Analisar o caso não linear e as complicações decorrentes (**bônus**).

1 Modelagem do problema

Considere um fluido cuja densidade seja mantida constante com o tempo (conhecido como fluido incompressível) contido em um tubo cilíndrico como o descrito pela figura abaixo.



Se \vec{V} a velocidade do fluido (constante na direção x) e A a área da seção transversal do tubo paralela ao eixo yz , definimos a vazão, \vec{Q} , como o volume de fluido que passa pela seção transversal em x a cada unidade de tempo, isto é:

$$\vec{Q} = A\vec{V}. \quad (1)$$

Como estamos assumindo que o fluido é incompressível, temos que a vazão é constante e igual a Q em qualquer ponto do tubo.

Suponha então que seja inserido um pequeno marcador de baixa concentração (conhecido como contraste), de forma a não afetar a dinâmica do fluido e que seja possível observar seu comportamento no interior do tubo. Conhecida a vazão \vec{Q} , gostaríamos de saber como a concentração inicial do contraste é transportada pelo fluido.

Seja $\rho(t, x, y, z)$ a densidade do contraste no ponto (x, y, z) no instante t . Para simplificar, vamos analisar apenas a variação de densidade ocorrida no sentido do tubo (isto é, na direção x), então vamos considerar que apenas a densidade média na direção x ,

$$\bar{\rho}(t, x) = \frac{1}{A} \int \int_A \rho(t, x, y, z) dy dz.$$

Agora considere a concentração em unidades de massa por comprimento, $u(t, x) = A\bar{\rho}(t, x)$, isto é, a densidade linear. Então, a massa total do contraste contida no tubo delimitado por x_1 e x_2 no instante t será dada por

$$M(t, x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left(\int \int_A \rho(t, x, y, z) dy dz \right)}_{A\bar{\rho}(t, x) = u(t, x)} dx = \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx. \quad (2)$$

Seja $v = \vec{V} \cdot \vec{x} = \frac{\vec{Q} \cdot \vec{x}}{A}$ a velocidade média do fluido na direção x , definimos o fluxo $\Phi(t, x)$ como a quantidade de massa do contraste que passa pela secção transversal do tubo em cada unidade de tempo,

$$\Phi(t, x) = v \int \int_A \rho(t, x, y, z) dy dz = v A \bar{\rho}(t, x) = v u(t, x)$$

Pela incompressibilidade do fluido, toda massa que entra em x_1 deve sair por x_2 . Portanto

$$\frac{d}{dt} M(t, x_1, x_2) = \underbrace{\Phi(t, x_1)}_{\text{massa que entra}} - \underbrace{\Phi(t, x_2)}_{\text{massa que sai}}$$

e, pela definição da massa do contraste (2), temos

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = v(x_1)u(t, x_1) - v(x_2)u(t, x_2) \quad (3)$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e a derivação sob o sinal da integral podemos reescrever o lado direito e o lado esquerdo como

$$v u(t, x_1) - v u(t, x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} v \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) dx \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) dx \quad (5)$$

de modo que, substituindo (4) e (5) em (3), obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} v \frac{\partial}{\partial x} (u(t, x)) dx \implies \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + v \frac{\partial}{\partial x} (u(t, x)) \right] dx = 0$$

Por fim, como x_1 e x_2 são arbitrários temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + v \frac{\partial}{\partial x} (u(t, x)) = 0$$

e o problema de transporte unidimensional é dado por:

$$\begin{cases} u_t + v u_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L), & t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in [0, L] \end{cases} \quad (6)$$

onde v é uma constante e $t \in [0, T]$ é o tempo no qual o comportamento da densidade do contraste é observado no interior do tubo.

2 Métodos Numéricos

Sendo M e N dois números naturais, vamos considerar espaçamentos uniformes em t e x dados por $\Delta t = \frac{T}{N}$ e $\Delta x = \frac{L}{M}$. Denotaremos por $u_m^n \approx u(x_m, t_n)$ a aproximação da função u no ponto $t_n = n\Delta t$ e $x_m = m\Delta x$ para $n = 0, 1, \dots, N$ e $m = 0, 1, \dots, M$.

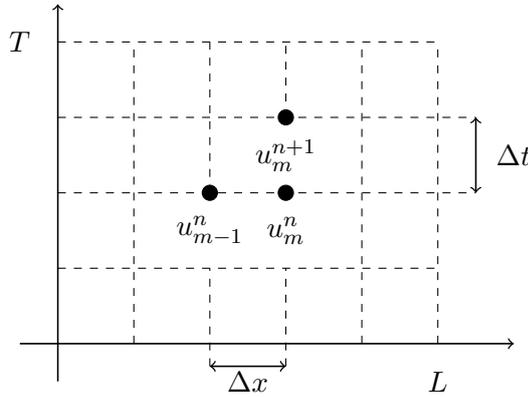
Para $\lambda = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$, considere os seguintes esquemas numéricos:

- Diferença para frente no tempo e para trás no espaço

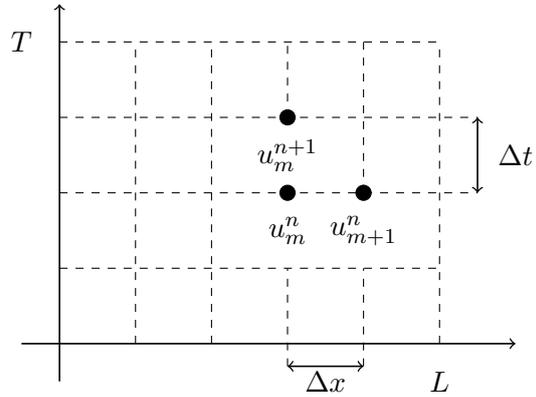
$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_m) \\ u_m^{n+1} = (1 - \lambda)u_m^n + \lambda u_{m-1}^n \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (7)$$

- Diferença para frente no tempo e no espaço

$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_m) \\ u_m^{n+1} = (1 + \lambda)u_m^n - \lambda u_{m+1}^n \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (8)$$



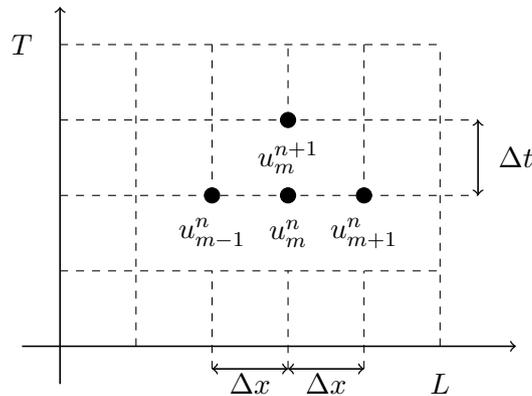
(a) Esquema 7



(b) Esquema 8

- Método de Lax-Wendroff (LW)

$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_i) \\ u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\lambda}{2} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (9)$$



3 Análise de convergência

Para testarmos a convergência do método numérico implementado iremos comparar as aproximações obtidas com a solução exata do problema (6), dada por:

$$u(x, t) = u_0(x - vt)$$

Sendo Δx e Δt constantes e dado que ambos os métodos são de mesma ordem no tempo e no espaço, o erro cometido é da ordem de $((\Delta t)^c + (\Delta x)^c)$, onde $c = 1$ no método (7) e $c = 2$ no método (LW). Para facilitar a análise, escolhendo M como um múltiplo de N , temos que $\Delta x = \mathcal{O}(\Delta t)$ e, para valores de N suficientemente grandes, podemos considerar o erro como:

$$e(M) \approx K(\Delta x)^c \quad (10)$$

onde K é uma constante que independe de M .

Considere como medida de erro a maior diferença (em módulo) entre a aproximação obtida e a solução do problema, isto é

$$e(N) = \max_{m,n} e_m^n = \max_{m,n} |u_m^n - u(x_m, t_n)| \quad (11)$$

onde $n = 1, \dots, N$ e $m = 1, \dots, M$, onde M é um múltiplo de N e tal que λ seja constante.

Simulamos o algoritmo para $N, 2N, 4N, \dots, 2^k N$, com $k \in \mathbb{N}$ e vamos analisar a razão entre os erros para $2^k N$ e $2^{k+1} N$, isto é:

$$\frac{e(2^k N)}{e(2^{k+1} N)} = 2^c \frac{K(\Delta x)^c}{K(\Delta x)^c} = 2^c \Rightarrow \log_2 \left(\frac{e(2^k N)}{e(2^{k+1} N)} \right) \approx c$$

Sendo $N_i = 2^i N$, considere a sequência

$$m_i = \log_2 (e(N_i)/e(N_{i+1})), \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (12)$$

Assim, temos que a sequência $m \rightarrow c$ quando $k \rightarrow \infty$ (ou seja, quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$).

É importante destacar que esta análise só é válida pois estamos estudando métodos que tem a mesma ordem no tempo e no espaço (por isso faz sentido considerar Δt e Δx de mesma ordem para gerar a estimativa da ordem de convergência). Caso as aproximações fossem de ordens diferentes, seria necessário escolher valores de M e N de forma a observar a convergência em cada uma das componentes (isto é, a ordem de convergência deve ser verificada tanto no tempo como no espaço).

4 Tarefa

Considere $T = 1$, $L = 2$ e $v = \frac{\alpha}{10}$, onde α é o último algarismo¹ do seu número USP. Use $M = 2^5, \dots, 2^{12}$ e $N = 16M$.

1. Sendo a densidade inicial do contraste dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} \cos^4(\pi(x - \frac{1}{2})), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Implemente o método (7) e analise a convergência numérica do método.
- Implemente o método (8). Ele pode ser utilizado para obter aproximações do problema em estudo? Por quê?
- Implemente o método (LW) e analise a convergência numérica do método. Quais as vantagens do método (LW) em relação ao método (7)?

¹Caso o dígito seja zero considere o penúltimo algarismo.

- (d) Plote as aproximações obtidas pelo métodos (7) e (LW) para $M = 2^{12}$ e a solução exata nos instantes $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$. A aproximação obtida é consistente com o resultado esperado? O que pode-se dizer da amplitude das aproximações obtidas?

Dica: Para analisar o que ocorre com as amplitudes, pense na diferença que existe entre o problema contínuo e o problema discreto e como isso afeta o comportamento da solução numérica.

2. Considere agora a densidade do contraste dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - |8x - 1|, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as aproximações obtidas pelos métodos (7) e (LW) para $M = 2^{10}$ e $N = 2M$. O que se observa nas aproximações obtidas? Porque isto ocorre?

Dica: Fixe alguns valores de t e imprima o gráfico no plano (x, u) . Compare com o exemplo contido em ([2], Cap 1).

3. **(Item bônus)** Faça as alterações necessárias no método (7) para resolver a Equação de Burgers (ou Equação da advecção não-linear)

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(0, x) = \begin{cases} 0.1 + \cos^4(\pi(x - 0.5)) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0.1 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

Utilizando $M = N/2 = 2^8$, qual o comportamento das aproximações obtidas?

Obs: Irão aparecer umas coisas estranhas não se preocupe. Certifique-se apenas de que seu programa não faça divisões por zero ou coisas que gerem NaNs, INFs, etc. O objetivo da questão é que o aluno entenda o comportamento da solução. Como ponto de partida, observe que a velocidade de propagação da onda depende dos valores da função u . Como isto influencia o comportamento da aproximação?

Observações sobre a implementação computacional

- I) Como estamos trabalhando com condições periódicas de fronteira, temos que $u(x_0, t) = u(x_M, t)$, $\forall t \in [0, T]$. Assim, para facilitar os cálculos, considere uma entrada a mais no espaço, $x_{M+1} = x_1$ e execute o laço no espaço para os índices $m = 1, \dots, M$. Após obter as aproximações num dado instante de tempo, basta atualizar $u_0^n = u_M^n$ e $u_{M+1}^n = u_1^n$ e passar para o próximo instante de tempo.
- II) Para a implementação do métodos numa forma mais geral (que facilita para o item 3) basta considerarmos λ como uma função que recebe os parâmetros $\Delta t, \Delta x, t, x$ e u . Com isto, para o problema (6) temos que $\lambda = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$ e para o problema (13) $\lambda = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Referências

- [1] Stoer, J and Burlisch, R. - *Introduction to Numerical Analysis* - Springer - 3rd Ed. - 2002.
- [2] Strikwerda, J.C.- *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations* - SIAM - 2nd ed. - 2004.