Precificação de Opções no Mercado Financeiro

Exercício Programa - MAP2310

Prof. Pedro Peixoto

Entrega 02/11/14

1 Precificação de Opções

Uma opção é um contrato que dá o direito, mas não a obrigação, a um comprador (ou vendedor) de comprar (ou vender) um ativo (uma ação da bolsa ou uma commodity como café, soja, dolar, etc...) em um tempo futuro por um preço preestabelecido pelo contrato.

Uma opção de compra (*call option*), dá o direito de compra de um ativo a um preço estabelecido em uma data futura. Uma opção de venda (*put option*), o direito de venda de um ativo a um preço estabelecido em uma data futura. É como um seguro: O comprador do contrato de opção paga um valor (chamado prêmio) para ter o direito de comprar/vender a um preço preestabelecido no futuro. O detentor do contrato, não precisa necessariamente exercer-lo, porém, neste caso, perderá o que investiu para comprar a opção (o prêmio).

Em uma opção europeia, o contrato de opção só pode ser executado (exigindo a venda/compra do ativo ao preço determinado) no vencimento do contrato. Apesar disso, o contrato em si pode ser negociado até o seu vencimento. Trataremos neste EP apenas de opções europeias.

Um problema relacionado ao mercado de opções é sua precificação. Isto é, conhecido o preço atual do ativo e fixado um tempo para o contrato da opção, usando ainda outras variáveis de mercado, como podemos estabelecer o valor do prêmio?

Um dos modelos mais usados no mercado financeiro é o modelo de Black & Scholes, e este será o tópico principal do EP. Ele assume uma série de premissas simplificadores, apesar delas, o modelo é muito usado no mercado financeiro. As premissas principais são:

- As transações dos instrumentos financeiros são feitos em tempo contínuo, isto é, os preços e o tempo são variáveis contínuas.
- É possível emprestar e tomar emprestado dinheiro a uma taxa de juros constante e conhecida, livre de risco.
- O preço do ativo segue um movimento Browniano geométrico com tendência e volatilidade constantes.
- Não há custos de transação.
- A ação não paga dividendos.

Não entraremos em detalhes sobre a dedução da equação, que segue de uma equação estocástica (devido à hipótese de movimento Browniano do ativo). Consulte mais informações sobre a precificação de opções e a Equação de Black & Scholes online ou na literatura de finanças (por exemplo em [1]), e inclua na introdução do seu EP.

2 Equação de Black-Scholes

A equação de Black-Scholes é uma equação diferencial parcial parabólica que pode ser escrita como

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

onde,

- S é o preço da ação,
- $V(S,t)$ é o preço da opção como função do tempo e do preço da ação,
- K é o preço de exercício da opção,
- r é a taxa de juros livre de risco,
- σ é a volatilidade da ação, a qual assumiremos constante,
- t é o tempo em anos; denotaremos o *agora* como 0 e o vencimento como T.

Condições de contorno,

$$V(0,t) = 0, \quad \forall t,$$

que indica que se o ativo tiver valor nulo, a opção também terá, e, para $S \to +\infty$, $V(S,t) = S$.

Para uma opção de compra, temos ainda que

$$V(S,T) = \max(S-K, 0),$$

isto é, se o preço do ativo estiver menor que o estipulado em contrato no tempo final (T), não vale a pena executar o contrato de compra e o valor da opção é nulo (é melhor comprar no mercado, que está mais barato). Se o valor do ativo for maior que o preço estipulado em contrato, então o valor da opção será dado pela diferença entre S e K. Para facilitar o entendimento, quando nos referirmos a uma opção de compra, vamos trocar V por V_C (C se refere a *call*).

Observe que, supondo que alguém feche um contrato de uma opção por um prêmio de V^* num tempo inicial, no tempo final (T), o lucro do detentor (L) da opção, será dado por

$$L(S,T) = \max(S-K, 0) - V^*.$$

Para facilitar o entendimento, vamos usar um exemplo, obtido do Trabalho de Conclusão de Curso do ex-aluno do BMAC, Fernando Ozaki. Os dados são reais, referentes ao ano de 2011. Nosso ativo será o câmbio de dolar (USD/BRL). Suponha que o contrato de opção permita comprarmos 1 milhão de dolares a uma taxa de câmbio de $R\$1,70$, para cada dolar (este será o nosso K), daqui a 3 meses (esse será o T). Para tanto, suponha que tenhamos precificado a opção (prêmio) com valor de $R\$40.000,00$. Então, no final do tempo de execução da opção, dependendo da taxa de câmbio, teremos vários cenários de lucro/prejuízo, dependendo do valor da taxa de câmbio (S), conforme a tabela abaixo. Em seguida, veja os gráficos de lucro do comprador da opção, e logo abaixo, do vendedor da opção.

Cotação do Câmbio (No vencimento)	Lucro / Prejuízo Comprador	Lucro / Prejuízo Vendedor
R$ 1,55	(R$ 40.000,00)	R$ 40.000,00
R$ 1,60	(R$ 40.000,00)	R$ 40.000,00
R$ 1,65	(R$ 40.000,00)	R$ 40.000,00
R$ 1,70	(R$ 40.000,00)	R$ 40.000,00
R$ 1,75	R$ 10.000,00	(R$ 10.000,00)
R$ 1,80	R$ 60.000,00	(R$ 60.000,00)
R$ 1,85	R$ 110.000,00	(R$ 110.000,00)
R$ 1,90	R$ 160.000,00	(R$ 160.000,00)
R$ 1,95	R$ 210.000,00	(R$ 210.000,00)

Tabela 2.1.1.1 Lucro / Prejuízo de uma opção de compra para diferentes cenários de câmbio

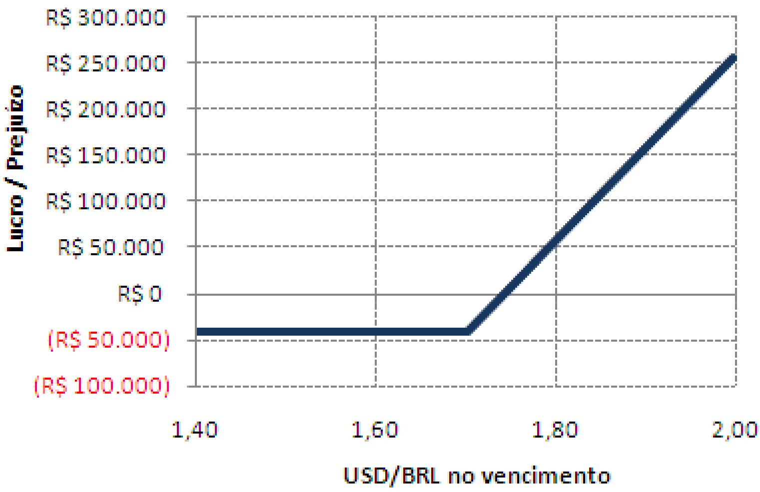

gráfico 2.1.1.1 Lucro / Prejuízo do comprador da opção

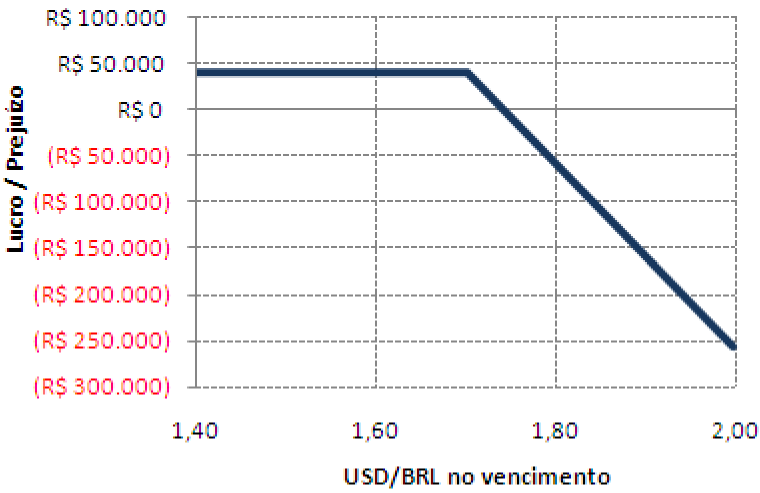

gráfico 2.1.1.2 Lucro / Prejuízo do vendedor da opção

Para um opção de venda, temos que

$$V(S,T) = \max(K - S, 0),$$

que estipula que a opção terá valor nulo se o preço do ativo tiver valor maior que o estipulado em contrato (é melhor vender o ativo no mercado, pois vale mais, do que executar um contrato que venderia o ativo por um preço menor). Neste caso denotaremos V por V_P (de *put*).

Podemos transformar a equação de Black-Scholes em uma equação de calor, na forma usual, com as seguintes transformações. Primeiro note que a equação define um problema de valor *final*, e para transformarmos o problema para de valor inicial, basta tomar uma nova variáveis temporal $\tau = T - t$, isto é, tempo até o término do contrato. A segunda variável, x, será obtida como,

$$x = \ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau,$$

e portanto

$$S = Ke^{x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau},$$

e adotaremos como função incógnita,

$$u(x,\tau) = V(S(x,\tau), t(\tau))e^{r\tau},$$

que portanto nos fornece o valor da opção,

$$V(S,t) = u(x(S,t), \tau(t))e^{-r(T-t)}.$$

Verifique que esta transformação nos leva ao seguinte problema,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

com $x \in \mathbb{R}$ e condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = K\max(e^x - 1, 0).$$

Denotando por N a função distribuição normal padrão acumulada

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz,$$

podemos escrever a solução como

$$u(x,\tau) = Ke^{x+\sigma^2\tau/2}N(d_1) - KN(d_2),$$

onde

$$d_1 = \frac{x + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

e

$$d_2 = \frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Consequentemente, o valor da opção de compra (prêmio) será dado por,

$$V_P(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Analogamente, para uma opção de venda, temos

$$V_C(S,t) = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2).$$

3 Resolução numérica

Como conhecemos a solução analítica $V(S,t)$ da equação de Black & Scholes, esta é usada diretamente para precificação de opções no mercado financeiro. Porém, note que temos o cálculo de uma integral que não possui solução em forma fechada, portanto, é preciso calcular numericamente esta integral. Felizmente, o cálculo da integral de normais já foi implementado em diversos softwares, inclusive no Microsoft Excel (geralmente usado no mercado financeiro).

Uma outra forma de resolver o problema é discretizando a equação do calor por diferenças finitas, que pode muitas vezes ser a única opção em casos modificações do modelo de Black & Scholes, para outros tipos de opções, ou então em casos multivariados (com múltiplos ativos). O objetivo deste EP é resolvermos numericamente a equação do calor por diferenças finitas para obtermos estimativas para a precificação de opções. Vamos considerar apenas opções de compra (*call options*), mas incentivamos que o aluno experimente modelar também o caso de opção de vendas (*put options*).

O domínio da equação do calor que obtivemos anteriormente é ilimitado. Para o método numérico, podemos considerar um subdomínio limitado, mas grande, resolvendo portanto o seguinte problema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \tau \in [0,T],\ x \in [-L,L] \\ u(x,0) = K\max(e^x - 1, 0) & \\ u(-L,\tau) = 0 & \\ u(L,\tau) = Ke^{L+\sigma^2\tau/2} & \end{cases} \tag{1}$$

A condição de fronteira em L é uma aproximação da condição analítica, onde consideramos que para L grande, $u(L,\tau) = S$.

Podemos usar uma discretização avançada no tempo e centrada no espaço, de forma obter o seguinte método numérico

$$
\begin{cases}
u_i^{j+1} = u_i^j + \dfrac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\dfrac{\sigma^2}{2}\left(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j\right), \\
u_i^0 = K\max(e^{x_i} - 1, 0), \\
u_0^j = 0, \\
u_N^j = Ke^{L+\sigma^2\tau_j/2},
\end{cases}
\tag{2}
$$

onde $\Delta x = 2L/N$, $\Delta\tau = T/M$,

$$x_i = i\Delta x - L,\ i = 0, ..., N,$$

$$\tau_j = j\Delta\tau,\ j = 0, ..., M.$$

Podemos recuperar as informações de mercado da seguinte forma. O preço da opção (prêmio) no tempo τ_j considerando o preço do ativo em

$$S_i^j = Ke^{x_i-(r-\sigma^2/2)\tau_j},$$

será dado por

$$V_i^j = u_i^j e^{-r\tau_j}.$$

Assim, para obtermos o preço da opção no tempo *agora*, isto é $t = 0$ ($\tau_M = T$), para um ativo com preço atual S^*, primeiro temos que calcular o valor de S^* transformado para x^*, usando que

$$x^* = \ln(S^*/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T.$$

O valor de x^* pode ou não coincidir com um ponto de malha. Para simplificar, tomemos o x_i mais próximo de x^*. Assim, o valor do prêmio será dado por

$$V^* = V_i^M = u_i^M e^{-rT}$$

Uma forma mais precisa é usarmos uma interpolação dos valores de u_i^M, $i = 0, ..., N$, para o x^*. Por exemplo, se $x^* \in [x_i, x_{i+1}]$, podemos tomar como uma média ponderada dos valores conhecidos,

$$V^* = \frac{(x_{i+1} - x^*)V_i^M + (x_i - x^*)V_{i+1}^M}{(x_{i+1} - x_i)}.$$

O valor do prêmio obtido pode ser entendido como o preço da opção para cada unidade monetária do ativo (R$ por exemplo).

4 Experimentos

Precifique os seguintes casos abaixo e analise o lucro de um comprador de uma opção de compra nos seguintes casos. Em todos os casos, faça gráficos da solução para alguns instantes de tempo e estime o lucro com base na precificação obtida para o tempo de inicial (hoje). Você pode comparar os seus resultados com os obtidos com a fórmula analítica, usando uma implementação da integral da normal padrão de alguma biblioteca da linguagem que esta usando ou usando o exemplo em Calc/Excel fornecido junto com o EP.

Complemente as análises com gráficos, tabelas e resultados que você julgar relevantes para ajudar na compreensão do problema. Use os seguinte parâmetros para a modelagem numérica:

- $N = 10000$,
- $L = 10$,

e use M tal que o método fique estável, isto é, tal que

$$\Delta\tau \leq \frac{\Delta x^2}{\sigma^2}.$$

Caso precise ajustar os valores L para um ativo específico (com preços muitos altos/baixos), fique à vontade.

4.1 Cenário fictício

Parâmetros de mercado:

- $K = R\$1,00$
- $\sigma = 1\%$ (ano)
- $T = 1$ ano
- $r = 1\%$ por ano

1. Precifique a opção de compra de R$1.000,00 do ativo para o tempo presente (agora) considerando que o ativo tem preço de R$1,00 hoje.
2. Analise o lucro/prejuízo da opção em diversos cenários de S quando $t = 0,5$ (tempo intermediário - 6 meses). Faça gráficos do preço da opção em relação ao preço do ativo para alguns instantes de tempo, incluindo o inicial e final.
3. Repita a análise para $\sigma = 2\%$ (o que ocorre com o preço da opção?).
4. Considere agora $\sigma = 10\%$ e $r = 10\%$ e analise o cenário de precificação e lucros em função do preço do ativo.
5. Interprete a influência dos parâmetros nos resultados.

4.2 Cenário de câmbio

Considere o cenário real de câmbio para 21 de Julho de 2014.

- Volatilidade $\sigma = 9.7\%$ (anual);
- Taxa de juros (selic) $r = 10,9\%$ por ano;
- Cotação atual do dolar $S = R\$2,22$ para cada 1 US$.

Considere que queremos nos assegurar (fazer um contrato de opção) para comprar US$100.000,00 em 21 de Outubro (tempo de execução T=3/12 ano) no valor de cotação de R$2,18 por dolar (esse é preço de execução - K). Qual seria o prêmio da opção?

Consulte o valor real do câmbio em 21 de Outubro e avalie o lucro/prejuízo obtido (veja em `http://economia.uol.com.br/cotacoes/cambio/dolar-comercial-estados-unidos/?historico`).

Supondo não conhecidos os valores futuros do câmbio (considerando que você está em 21 de Julho), analise o cenário de lucro/prejuízo estimado para 21 de Agosto (1/3 do período) com gráficos e tabelas para diversos possíveis valores do ativo.

4.3 Cenário real - Bônus

Obtenha dados reais de mercado (pode ser de câmbio ou de outro ativo) e faça uma analise para uma precificação para daqui 6 meses. Você pode usar a taxa SELIC como taxa de juros e estimar a volatilidade com base em meses passados do ativo. Lembre-se de converter todos os dados em uma mesma unidade de tempo (por exemplo anual). Para calcular a volatilidade anualizada, consulte (`http://en.wikipedia.org/wiki/Volatility_(finance)`).

Referências

[1] Wilmott, P. and Howison, S. and Dewynne, J. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction.* Cambridge University Press. 1995.