

EP - Equação do Transporte

Rafael Belmiro Cristovão(rafael.cristovão@usp.br)

MAP2320 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais II - IME USP

Professor Pedro Peixoto

28 de Setembro de 2014 23:53

Conteúdo

1	Introdução	3
1.1	Motivação Científica	3
1.2	Objetivos	3
1.3	Organização do Trabalho	3
2	Implementação dos Métodos Numéricos	4
2.1	Problema Modelo	4
2.2	Método para Frente no Tempo e para Trás no Espaço	4
2.3	Método para Frente no Tempo e no Espaço	4
2.4	Método de Lax-Wendroff	6
3	Resultados	7
4	Um outro problema	8
5	Equação de Burgers	10
6	Conclusão	11

Lista de Figuras

1	Representação de DDPC(Azul) e DDN(vermelho)	5
2	Representação do DDN do método de LW	6
3	Resultado para o método (2)	7
4	Resultado para o método de LW	8
5	Resultado para o método (2)	9
6	Resultado para o método de LW	10
7	Aproximações numéricas para a Eq. de Burgers	11

1 Introdução

1.1 Motivação Científica

Os sistemas de equações diferenciais parciais aparecem muitas vezes em modelagens matemáticas em diversas áreas. Saber fazer sua análise, interpretação e resolução é muito importante para a resolução de diversos problemas. Alguns tipo de equações do transporte são fáceis de obter solução analítica, portanto utilizaremos esse tipo de equação para entender melhor a teoria por trás dos métodos de resolução de EDP e suas limitações.

1.2 Objetivos

Apresentar, analisar e entender o problema do escoamento do fluido incompressível. Implementar e analisar a convergência de métodos numéricos para o caso linear da equação da onda e analisar o caso não linear e suas possíveis complicações.

1.3 Organização do Trabalho

- Implementação dos Métodos Numéricos;
- Resultados;
- Um outro problema ;
- Equação de Burgers;
- Conclusão;
- Bibliografia;

2 Implementação dos Métodos Numéricos

Nessa seção faremos a implementação de três métodos numéricos que são aplicáveis na equação da onda e analisaremos cada um deles. Os métodos testados foram:

- Diferença para frente no tempo e para trás no espaço
- Diferença para frente no tempo e no espaço
- Método de Lax-Wendoff(LW)

Para realizar a análise da convergência dos métodos, suas principais vantagens e desvantagens e suas limitações vamos aplicá-los à um problema modelo na qual conhecemos a solução.

O algoritmo usado para a geração das aproximações descritas no trabalho foi desenvolvido em linguagem C e os gráficos plotados no Gnuplot. A fim de comparar o tempo computacional do algoritmo, também o implementamos no software R.

2.1 Problema Modelo

O problema modelo utilizado para as análises será

$$\begin{cases} u_t + \frac{3}{10}u_x = 0, (t, x) \in (0, 1) \times (0, 2) \\ u(t, 0) = u(t, 2), t \in [0, 1] \\ u(0, x) = u_0(x), x \in [0, 2] \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{com } u_0 = \begin{cases} \cos^4(\pi(x - \frac{1}{2})), x \in [0, 1] \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Como sabemos, esse problema possui solução $u(x, t) = u_0(x - 0.3t)$.

2.2 Método para Frente no Tempo e para Trás no Espaço

O método para frente no tempo e para trás é da forma:

$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_m) \\ u_m^{n+1} = (1 - \lambda)u_n^m - \lambda u_{m-1}^n \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (2)$$

esse método é consistente com a equação (1), estável e convergente de ordem 1 em Δt e de ordem 1 em Δx .

Observamos, pela tabela (1), que, como esperado, o método converge com ordem 1, pois o método é de ordem 1 no espaço e no tempo.

2.3 Método para Frente no Tempo e no Espaço

O método para frente no tempo e no espaço é da forma:

$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_m) \\ u_m^{n+1} = (1 + \lambda)u_n^m - \lambda u_{m+1}^n \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (3)$$

n	$e(N)$	$\log_2\left(\left \frac{e(N)}{e(\frac{N}{2})}\right \right)$
32	0,249791	-
64	0,148444	0,75080271560081
128	0,081909	0,857824895619053
256	0,043316	0,919121957115438
512	0,022273	0,959604132933874
1024	0,011295	0,97961162029232
2048	0,005688	0,989690900661031
4096	0,002854	0,994936130143652

Tabela 1: Convergência do método(2) para o problema(1)

esse método é consistente com a equação (1) com ordem 1 em Δt e de ordem 1 em Δx . Implementamos o método na tentativa de encontrar uma aproximação para a solução do sistema modelo, porém, notamos que o método utilizado não faz a aproximação. Quando usamos $M = 2^5$ e $N = 16M$, o erro cometido foi de 0.836 e quando usamos $M = 2^6$ e $N = 16M$, o erro cometido foi de 157.78. Portanto, o método não está convergindo para a solução do problema. De fato, o método (3) não pode ser usado para achar a solução numérica do problema (1). Isso ocorre porque, apesar do método ser consistente com a equação, ele não é estável e portanto não é convergente para a equação (1). Para vermos que o método não é estável lembramos que uma condição necessária para estabilidade é que o domínio de dependência do problema contínuo(DDPC) esteja contido no domínio de dependência numérico(DDN).

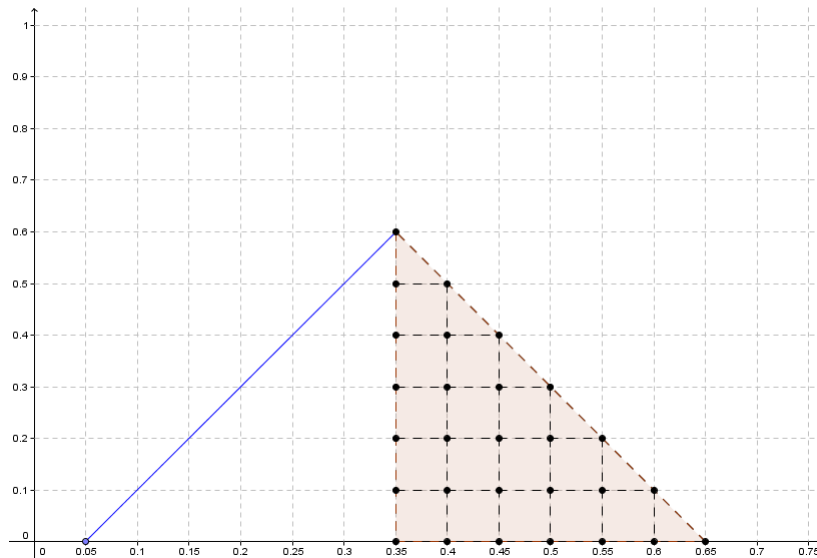


Figura 1: Representação de DDPC(Azul) e DDN(vermelho)

Na imagem (2) temos a representação do DDPC do problema em vermelho, que são as curvas características do problema, ou seja, retas da forma $x - 0.3t = c$ e do DDN em azul, que é formado pelas malhas necessárias para fazer a aproximação do ponto quando $M, N \rightarrow \infty$. Como DDPC não está contido em DDN, o método não é convergente e portanto, não pode ser utilizado para aproximar a solução de (1).

2.4 Método de Lax-Wendroff

O método de Lax-Wendroff (LW) é um método consistente com a equação (1) e convergente de ordem 2 em Δt e Δx . Repetindo o mesmo procedimento para a análise da convergência desse método vemos que, como esperado, o método converge para a solução com ordem 2.

n	$e(N)$	$\log_2\left(\left \frac{e(N)}{e(\frac{N}{2})}\right \right)$
32	0,063378	
64	0,016525	1,93933186202303
128	0,004133	1,99938900290788
256	0,001035	1,99755859598785
512	0,000259	1,99860676470013
1024	0,000065	1,9944404746581
2048	0,000016	2,02236781302845
4096	0,000004	2

Tabela 2: Convergência do método de LW para o problema (1)

Assim como o Método para Frente no Tempo e para Trás no Espaço, o método de LW também pode ser usado para obter uma boa aproximação para a solução do problema (1). Entretanto, o método de LW tem convergência mais rápida. Outra vantagem de se utilizar o método de LW para achar a solução de problemas com a equação do transporte está no fato de o método de LW conseguir aproximar a solução de mais problemas do que o método Método para Frente no Tempo e para Trás no Espaço.

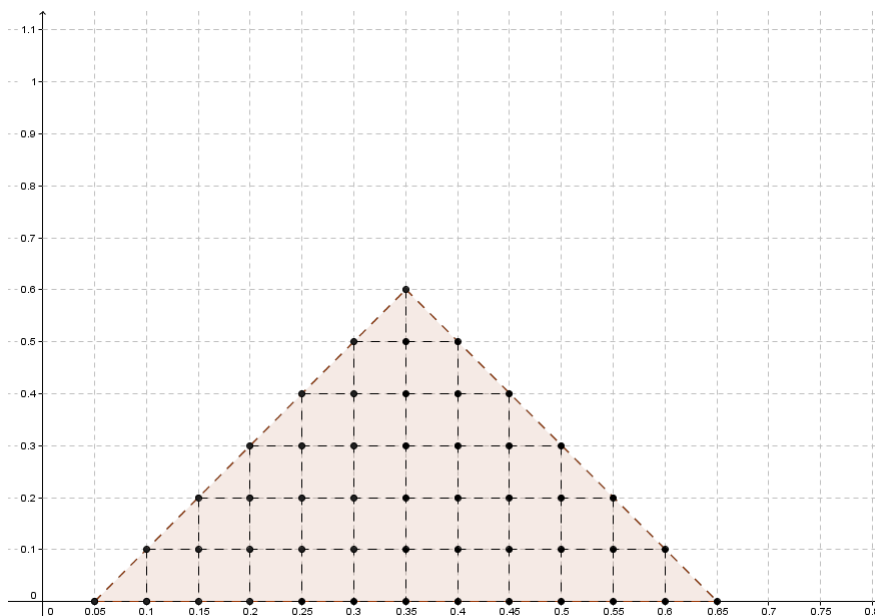


Figura 2: Representação do DDN do método de LW

3 Resultados

Plotamos os resultados obtidos para alguns tempos. Para o método (2), obtivemos os resultados contidos na imagem (5).

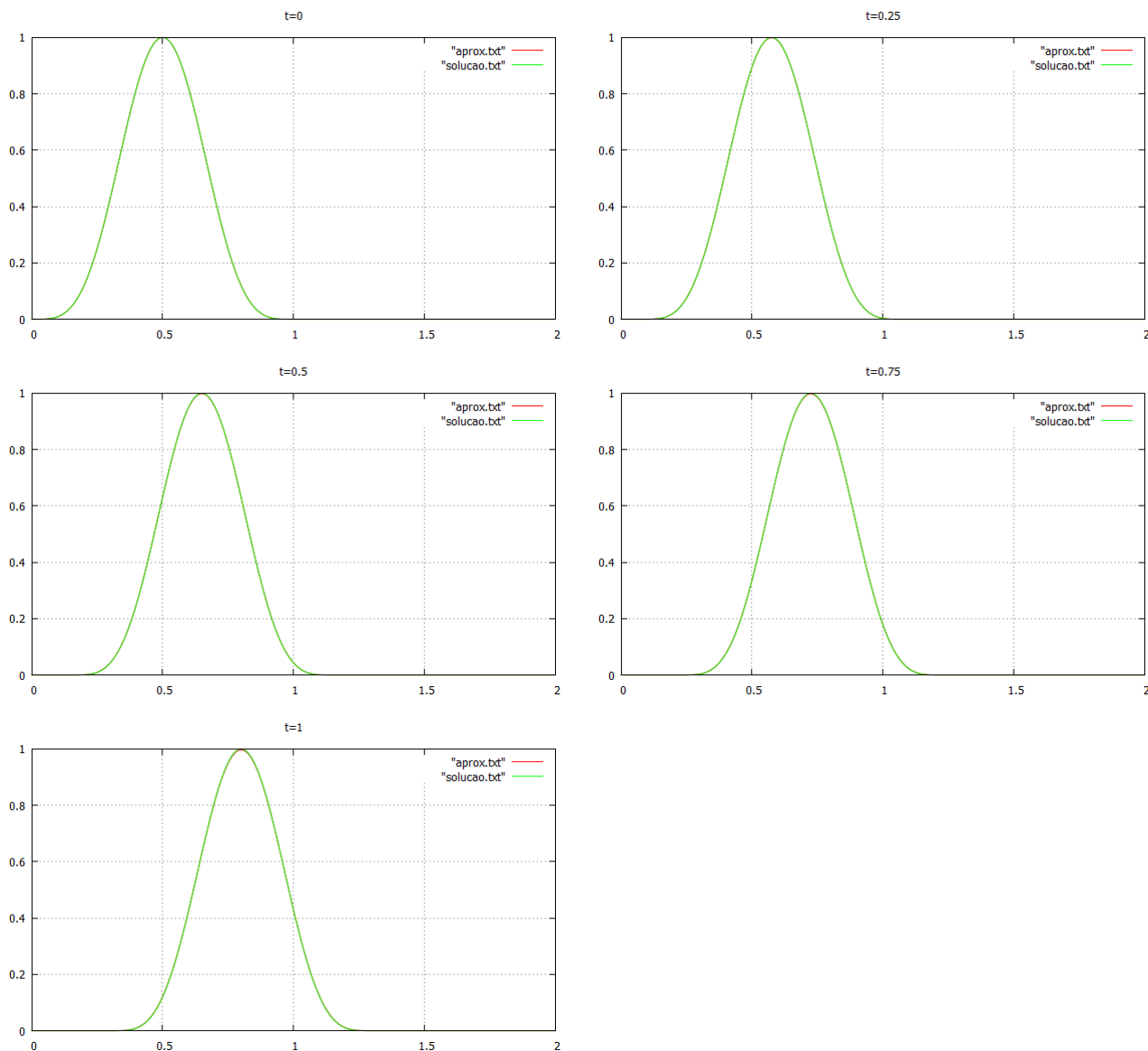


Figura 3: Resultado para o método (2)

Para o método de LW, obtivemos os resultados da imagem (4)

Os dois métodos nos dão resultados bastante consistentes e parecidos, isso ocorre pois, apesar do método de LW convergir mais rápido, o número de malhas utilizadas nas aproximações foram muito grandes. Entretanto, podemos observar que as amplitudes das aproximações geradas pelos métodos vão diminuindo, principalmente no método (2), pois o erro vai se acumulando. Por exemplo, o ponto máximo da curva no instante $t=0$ é o mesmo na aproximação e na solução exata, porém, com o passar do tempo, na solução exata o ponto se mantém o mesmo e na aproximação ele não será igual, porque para aproximarmos os tempos seguintes fazemos ponderações dos pontos no tempo anterior. O efeito é visível olhando as aproximações do método (2), pois ele possui erro maior.

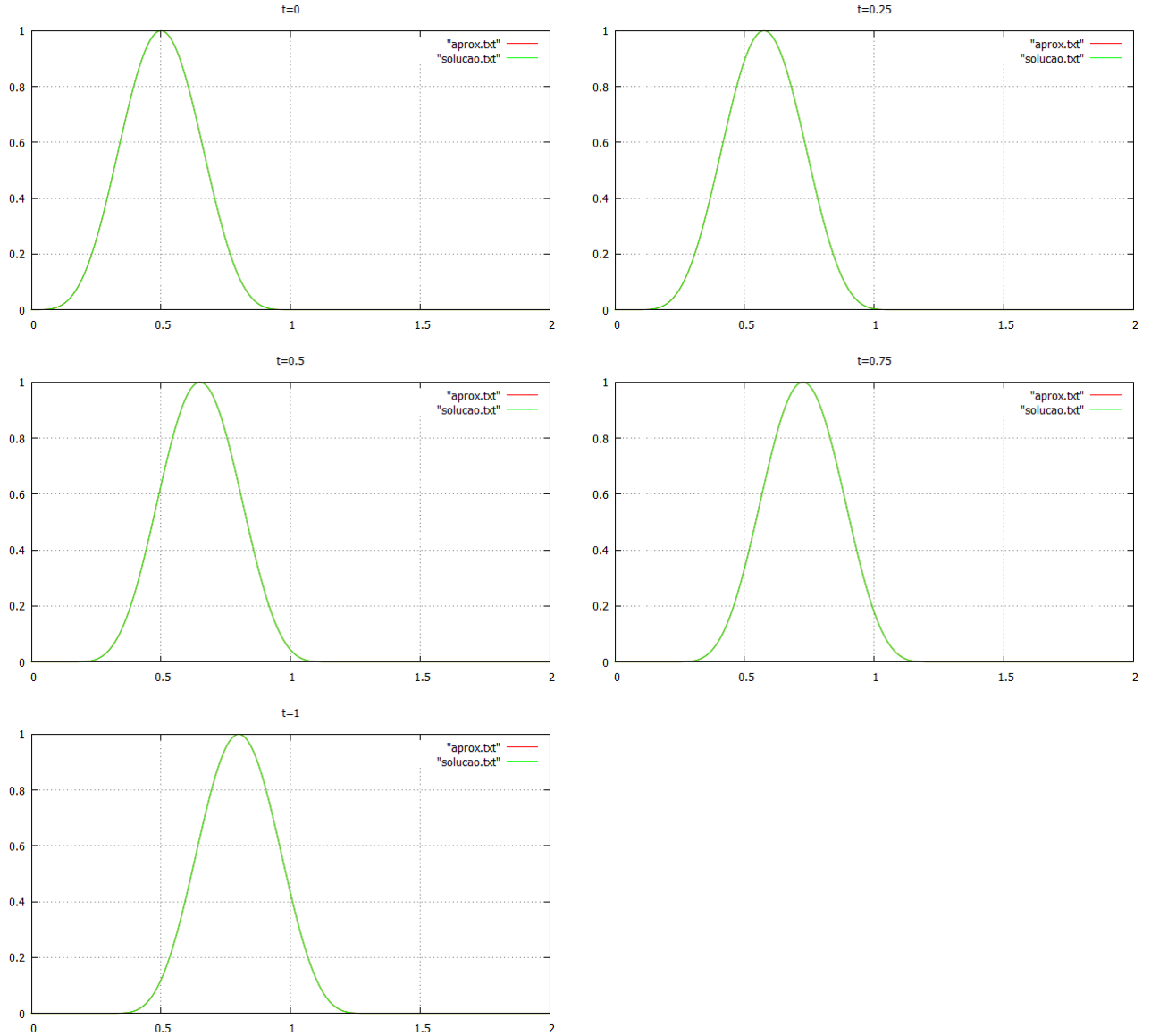


Figura 4: Resultado para o método de LW

Os resultados foram os esperados. Fazendo a conexão com o problema de escoamento, onde temos um fluido com velocidade $v = 0,3$, com o passar do tempo o fluido se move ao longo do tubo. Como a velocidade é baixa, não temos tempo suficiente para o fluido sair do tubo.

4 Um outro problema

Para deixar mais claro os problemas que podem surgir quando resolvemos numericamente um problema, considerar a densidade do contraste dada por

$$u_0 = \begin{cases} 1 - |8x - 1|, & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

Resolvemos o problema pelo método (2) e pelo método de LW utilizando $M = 2^{10}$ e $N = 2M$.

Plotamos os resultados obtidos para alguns tempos. Para o método (2), obtivemos os resultados contidos na imagem (5).

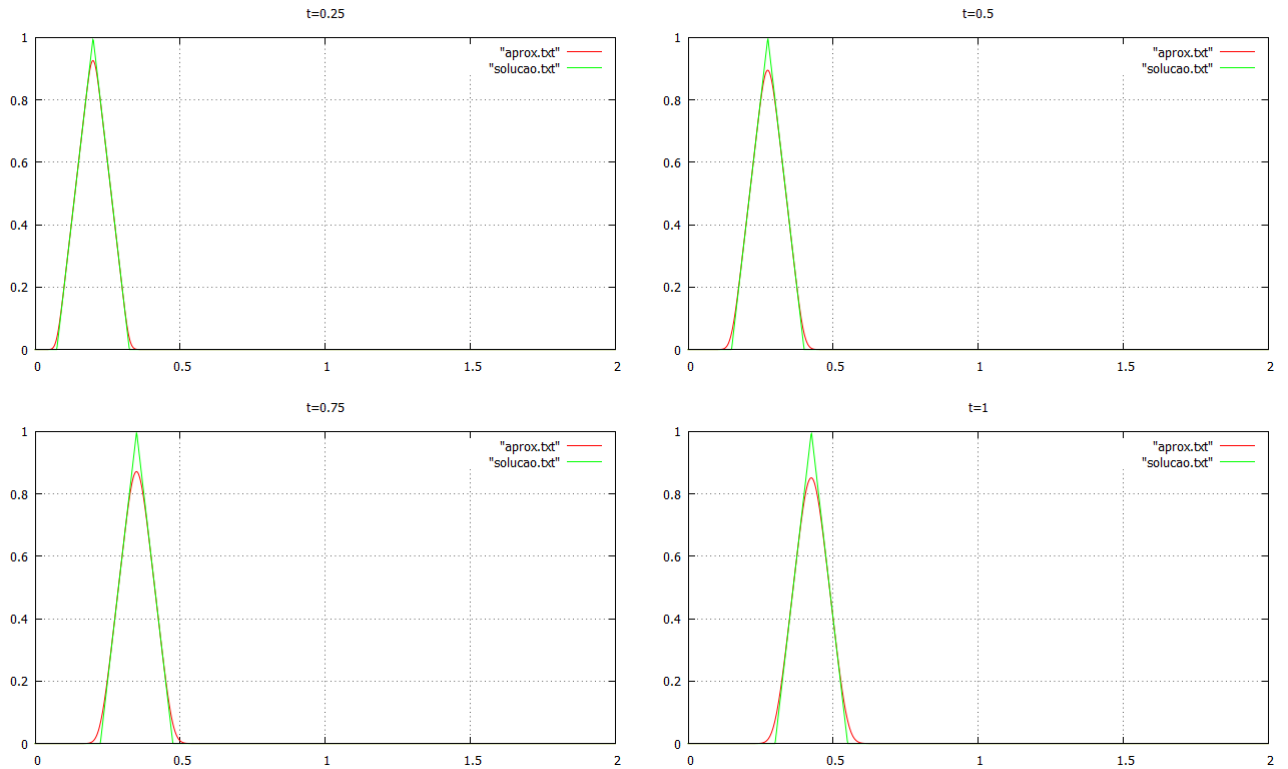


Figura 5: Resultado para o método (2)

Para o método de LW, obtivemos os resultados da imagem (4).

Reparamos que a aproximação pelo método (2) é mais suave, porém possui um erro muito maior. Essa aproximação fica ruim principalmente nos pontos onde a solução verdadeira está perto do máximo ou do mínimo, como dito anteriormente, isso ocorre pelo fato de o método calcular a aproximação no próximos tempos com combinações convexas do tempo anterior. A aproximação feita pelo método de LW se mostrou muito melhor, apesar de não ser tão suave quanto a aproximação anterior. Essa aproximação apresenta oscilações em torno da solução real do problema, porém a amplitude das oscilações são pequenas e portando os erros cometidos também são. O método de LW busca mais informações sobre o tempo anterior para fazer a aproximação, e então consegue acompanhar melhor a solução perto dos seus mínimos e máximos.

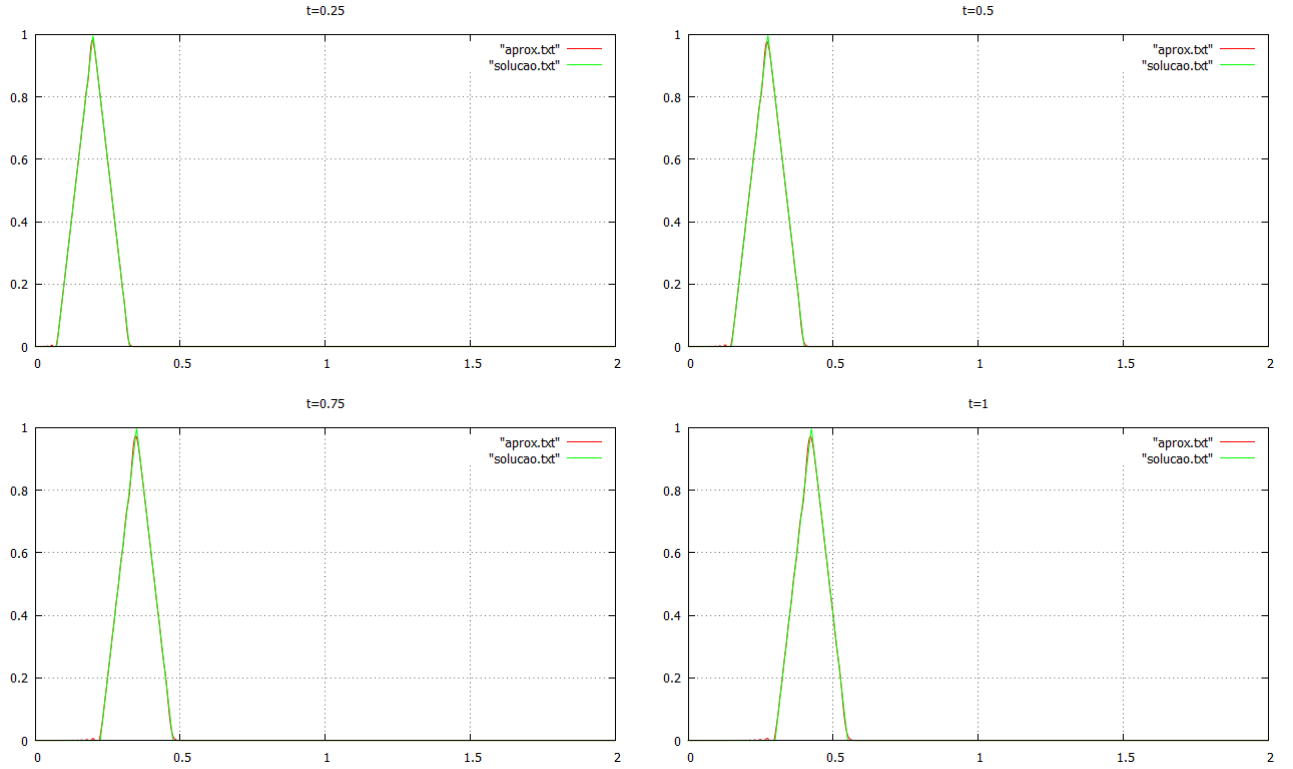


Figura 6: Resultado para o método de LW

5 Equação de Burgers

Analisaremos a solução numérica para a equação de Burgers, que é dada por:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & (t, x) \in (0, 1) \times (0, 2) \\ u(t, 0) = u(t, 2), & t \in [0, 1] \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, 2] \end{cases} \quad (5)$$

com $u_0 = \begin{cases} \cos^4(\pi(x - \frac{1}{2})), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

O problema (5) é um caso particular do problema do transporte. Agora, a velocidade de propagação da onda depende dos valores da função u . Utilizando o método (2), $M = 2^{10}$ e $N = 2M$ aproximamos o comportamento da solução. A velocidade aplicada na onda não é mais homogênea, por isso, para os locais onde u é grande, temos uma grande velocidade fazendo com que parte da onda saia do domínio de u_0 . Portanto, nos primeiros instantes perdemos a maior parte da onda e com o passar do tempo vai se perdendo o que restou lentamente.

6 Conclusão

O trabalho mostrou que o tratamento dado as EPD's é muito diferente e mais complexo do que o dados a EDO's. Primeiramente, podemos ressaltar a dificuldade de aplicar métodos numéricos à EPD's. Não se pode generalizar a escolha de métodos, a equação tem que ser analisada para ser decidido o método que poderá aproximar sua solução. O custo computacional aumentou consideravelmente para obtenção das soluções numéricas, o que torna necessária a escolha de linguagens de baixo nível para ter um bom desempenho. Por exemplo, o código implementado no software R tonaria inviável parte das análises feitas no trabalho. Por fim, citamos a difícil interpretação dos resultados obtidos em problemas como o da equação de Burgers.

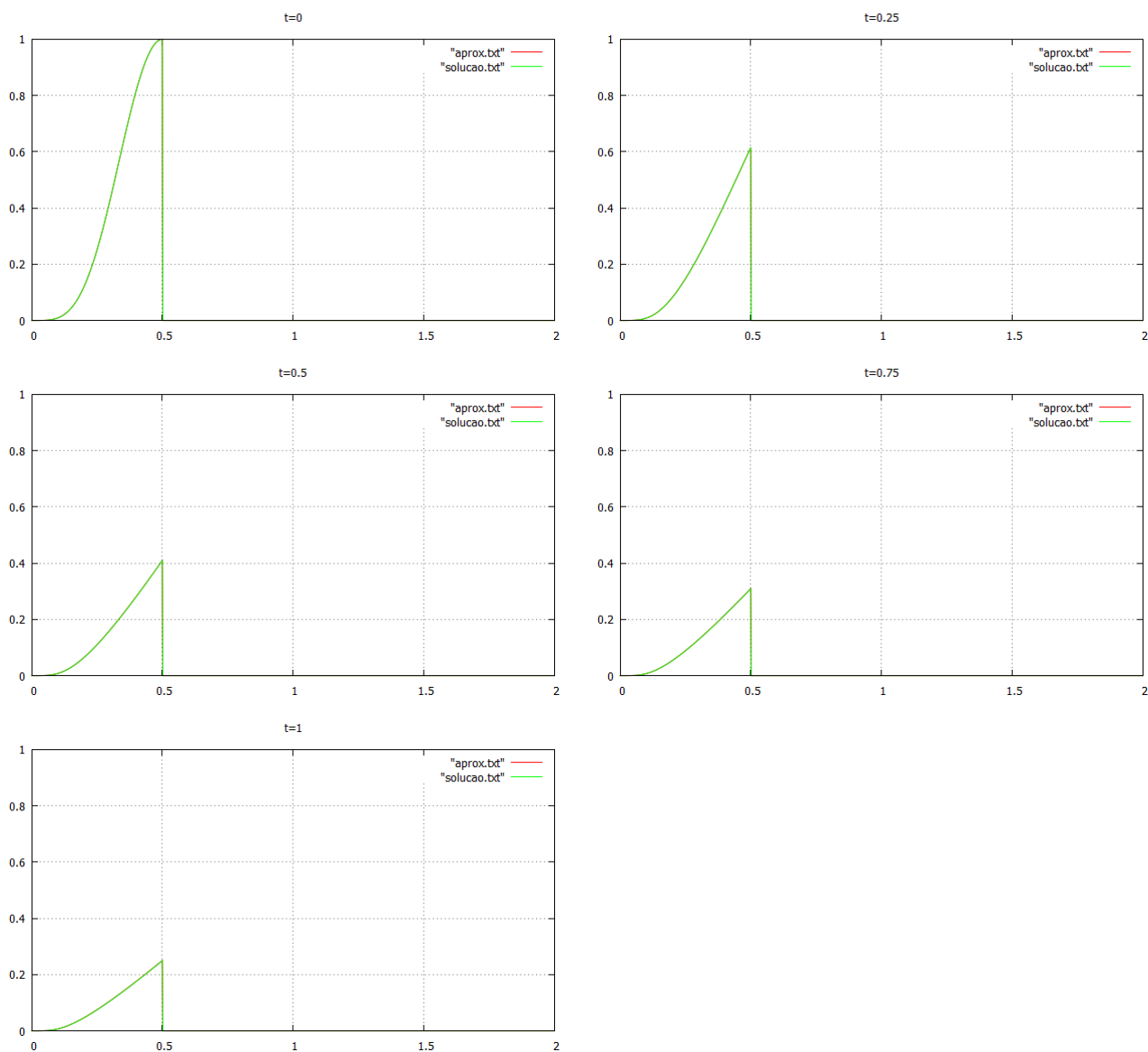


Figura 7: Aproximações numéricas para a Eq. de Burgers

Referências

- [1] Stoer, J and Burlisch, R.- *Introduction to Numerical Analysis - Springer - 3rd Ed. - 2002.*
- [2] Strikwerda, J.C. - *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations - SIAM - 2nd ed. - 2004.*