

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Jenifer Waschburger Monich - Nº USP 7990485

**EP1 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais II -
MAP2310**

Professor Pedro Peixoto

Resumo

Modelagem do escoamento de um fluido incompressível, implementação e análise da convergência de diferentes métodos numéricos para o caso linear e análise do caso não linear e as complicações decorrentes.

São Paulo – SP, Brasil
2014

Conteúdo

1	Introdução	3
1.1	Objetivo	3
1.2	Divisão do Trabalho	3
2	O Problema	3
3	Modelagem Matemática	4
3.1	Diferença para frente no tempo e para trás no espaço	5
3.2	Diferença para frente no tempo e no espaço	5
3.3	Método de Lax-Wendroff (LW)	5
4	Tarefas	5
4.1	Tarefa 1	5
4.2	Tarefa 2	10
4.3	Tarefa Bônus	12
5	Conclusão	13

Lista de Figuras

1	Curvas características do problema	4
2	Gráficos obtidos com o método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço	8
3	Gráficos obtidos com o método de Lax-Wendroff	9
4	Gráficos obtidos com o método de diferenças para frente no tempo e para trás no espaço	11
5	Gráficos obtidos com o método de Lax-Wendroff	12
6	Gráficos obtidos com o método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço - Caso não linear	13

1 Introdução

1.1 Objetivo

O objetivo do EP1 é construir um programa para aproximar a solução do problema de fluido incompressível utilizando diferentes métodos numéricos para o caso linear e analisar a convergência dos métodos. E para o caso não linear, vamos analisar a convergência e as complicações que aparecem. Para analisar a convergência, vamos utilizar problemas que conhecemos a solução para, deste modo, comparar as soluções obtidas pelos métodos numéricos com a solução real.

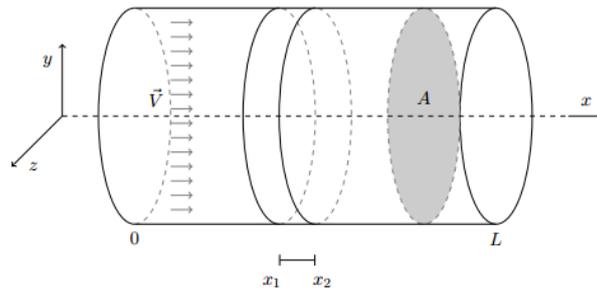
1.2 Divisão do Trabalho

O trabalho será dividido em partes. São elas:

- Construção do código em C
- Resultados Numéricos e análises para o problema 1
- Resultados Numéricos e análises para o problema 2
- Resultados Numéricos e análises para o problema bônus
- Bibliografia utilizada

2 O Problema

Consideramos um fluido incompressível contido em tubo cilíndrico conforme desenho abaixo:



Sendo V a velocidade do fluido e A a área da seção transversal do tubo (conforme desenho), definimos a vazão Q como o volume de fluido que passa pela seção transversal a cada unidade de tempo. Como o fluido é incompressível, temos que a vazão é constante em qualquer ponto do tubo. Gostaríamos de saber como a concentração inicial do contraste é transportada pelo fluido.

O problema unidimensional é dado por:

$$\begin{cases} u_t + vu_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L), & t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, L] \end{cases} \quad (1)$$

onde v é constante e $t \in [0, T]$ é o tempo no qual o comportamento da densidade do contraste é observado no interior do tubo.

3 Modelagem Matemática

Para modelar o problema, implementaremos 3 métodos:

- Diferença para frente no tempo e para trás no espaço
- Diferença para frente no tempo e no espaço
- Método de Lax-Wendroff (LW)

Vamos considerar M e N dois números naturais, espaçamentos uniformes em t e x dados por $\Delta t = \frac{T}{N}$ e $\Delta x = \frac{L}{M}$. Usaremos $U_m^n \approx u(xm, tn)$ como a aproximação da função u no ponto $t_n = n\Delta t$ e $x_m = m\Delta x$ para $n = 0, 1, \dots, N$ e $m = 0, 1, \dots, M$ e $\lambda = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Sendo assim, queremos aproximar a solução do problema (1).

Para resolver o problema, vamos procurar uma curva característica $\gamma(s)$ tal que:

$$\frac{\partial u(\gamma(s))}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial s} u_t + \frac{\partial x}{\partial s} u_x$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial s} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial s} = v \end{cases} \quad (2)$$

Logo, $t(s) = s + c_1$ e $x(s) = vs + c_2$. Podemos escrever a curva característica da forma:

$$\gamma(s) = (s, vs + c)$$

. Portanto, $c = x - vt$ e a solução é da forma:

$$u(t, x) = u_0(x - vt)$$

e as curvas características são conforme desenho abaixo:

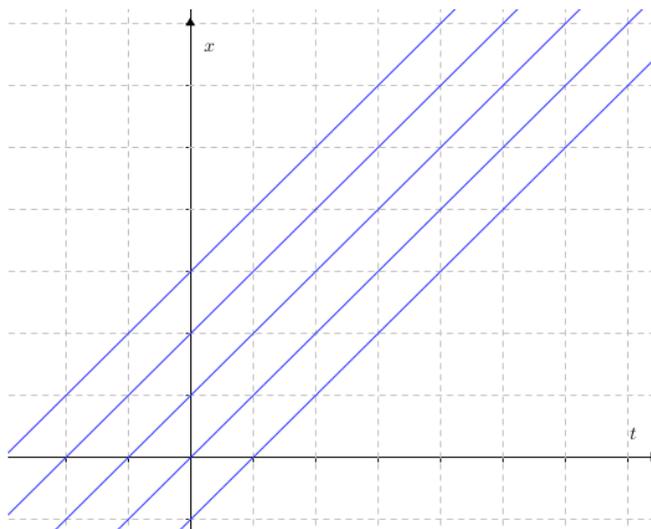


Figura 1: Curvas características do problema

3.1 Diferença para frente no tempo e para trás no espaço

Para o método de diferenças para frente no tempo e para trás no espaço, consideramos o seguinte esquema numérico:

$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_m) \\ u_m^{n+1} = (1 - \lambda)u_m^n + \lambda u_{m-1}^n \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (3)$$

Sabemos que o método é consistente com a equação, estável e convergente de primeira ordem no tempo e no espaço.

3.2 Diferença para frente no tempo e no espaço

Para o método de diferenças para frente no tempo e no espaço, consideramos o seguinte esquema numérico:

$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_m) \\ u_m^{n+1} = (1 + \lambda)u_m^n - \lambda u_{m+1}^n \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (4)$$

O método é consistente com a equação, porém é não estável e não convergente.

3.3 Método de Lax-Wendroff (LW)

Para o método de Lax-Wendroff, consideramos o seguinte esquema numérico:

$$\begin{cases} u_m^0 = u_0(x_m) \\ u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\lambda}{2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \\ u_M^n = u_0^n \end{cases} \quad (5)$$

Sabemos que o método é consistente com a equação, estável e convergente de 2ª Ordem no tempo e no espaço.

4 Tarefas

4.1 Tarefa 1

Para a tarefa 1, aproximamos, através nos métodos numéricos descritos acima, a solução do problema seguinte:

Temos que $T = 1, L = 2$ e $v = \frac{5}{10}$, $M = 2^5, \dots, 2^{12}$, $N = 16M$ e que a densidade inicial do contraste é dada por:

$$u_0(x) = \begin{cases} \cos^4(\pi(x - \frac{1}{2})), 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

Como o método tem 1ª Ordem de convergência, esperamos que ao dobrar o M , o erro cairá pela metade também. Como escolhemos N como um múltiplo de M , então temos que $\Delta x = O(\Delta t)$ e para valores de N suficientemente grandes, podemos considerar o erro como $e(M) \approx K(\Delta x)^c$, com k sendo uma constante independente de M . Para analisar a convergência do método 1 no problema, criamos uma tabela que demonstra os resultados obtidos com o programa. Pela tabela, nota-se que a redução do erro converge

para a ordem do método (1ª Ordem). Só conseguimos analisar a convergência desta forma porque o método tem mesma ordem de convergência no tempo e no espaço.

n	$e(t, h)$	$\log_2\left(\left \frac{e(t, h)}{e(t, \frac{h}{2})}\right \right)_y$
2^5	0.3414	0.6441
2^6	0.2185	0.7803
2^7	0.1272	0.8771
2^8	0.0693	0.9351
2^9	0.0362	0.9667
2^{10}	0.0185	0.9831
2^{11}	0.0094	0.9914
2^{12}	0.0047	-

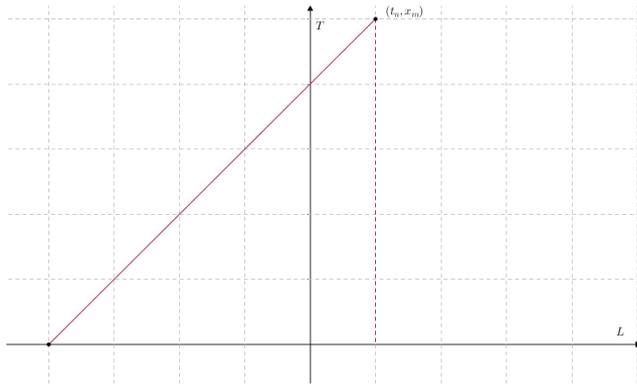
Tabela 1: Verificação da ordem de convergência do método para o problema de valor inicial

Para o próximo método, seguimos o mesmo raciocínio. Porém o método não aproxima a solução do problema. Nota-se que o erro aumenta e vai para o infinito.

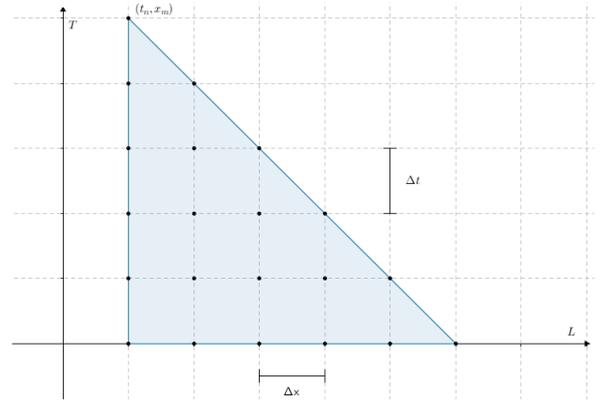
n	$e(t, h)$	$\log_2\left(\left \frac{e(t, h)}{e(t, \frac{h}{2})}\right \right)_y$
2^5	1.36E+8	1.65E+05
2^6	2.24E+13	1.36E+12
2^7	3.04E+25	6.94E+25
2^8	2.11E+51	1.66E+53
2^9	3.51E+104	9,25E+107
2^{10}	3.25E+12	-
2^{11}	∞	-
2^{12}	∞	-

Tabela 2: Verificação

Tal problema ocorre pois o domínio de dependência do problema contínuo, conforme vemos nas imagens abaixo, não está contido no domínio de dependência numérico. Como é condição necessária para o método ser estável o domínio de dependência contínuo estar contido no domínio de dependência numérico, então o método não é estável. Então, mesmo sendo consistente, o método não é convergente. Deste modo, a aproximação não se aproxima da solução.



(a) Domínio de Dependência Contínuo



(b) Domínio de Dependência Discreto

Para o terceiro método, que tem 2ª Ordem de convergência, esperamos que ao dobrar o M , o erro cairá para uma fração de $\frac{1}{4}$ do erro anterior. Pela tabela, nota-se que a redução do erro converge para a ordem do método (2ª Ordem). Só conseguimos analisar a convergência desta forma porque o método também mesma ordem de convergência no tempo e no espaço.

n	$e(t, h)$	$\log_2\left(\left \frac{e(t, h)}{e(t, \frac{h}{2})}\right \right)_y$
2^5	0.1051	1.9423
2^6	0.0273	1.986
2^7	0.0069	2.0006
2^8	0.0017	2.0008
2^9	0.0004	1.9967
2^{10}	0.0001	2
2^{11}	0	1.9475
2^{12}	0	-

Tabela 3: Verificação

Vamos analisar agora os gráficos que plotamos utilizando o GNUPLOT. Os gráficos foram plotados apenas para os métodos 1 e 3.

Método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço:

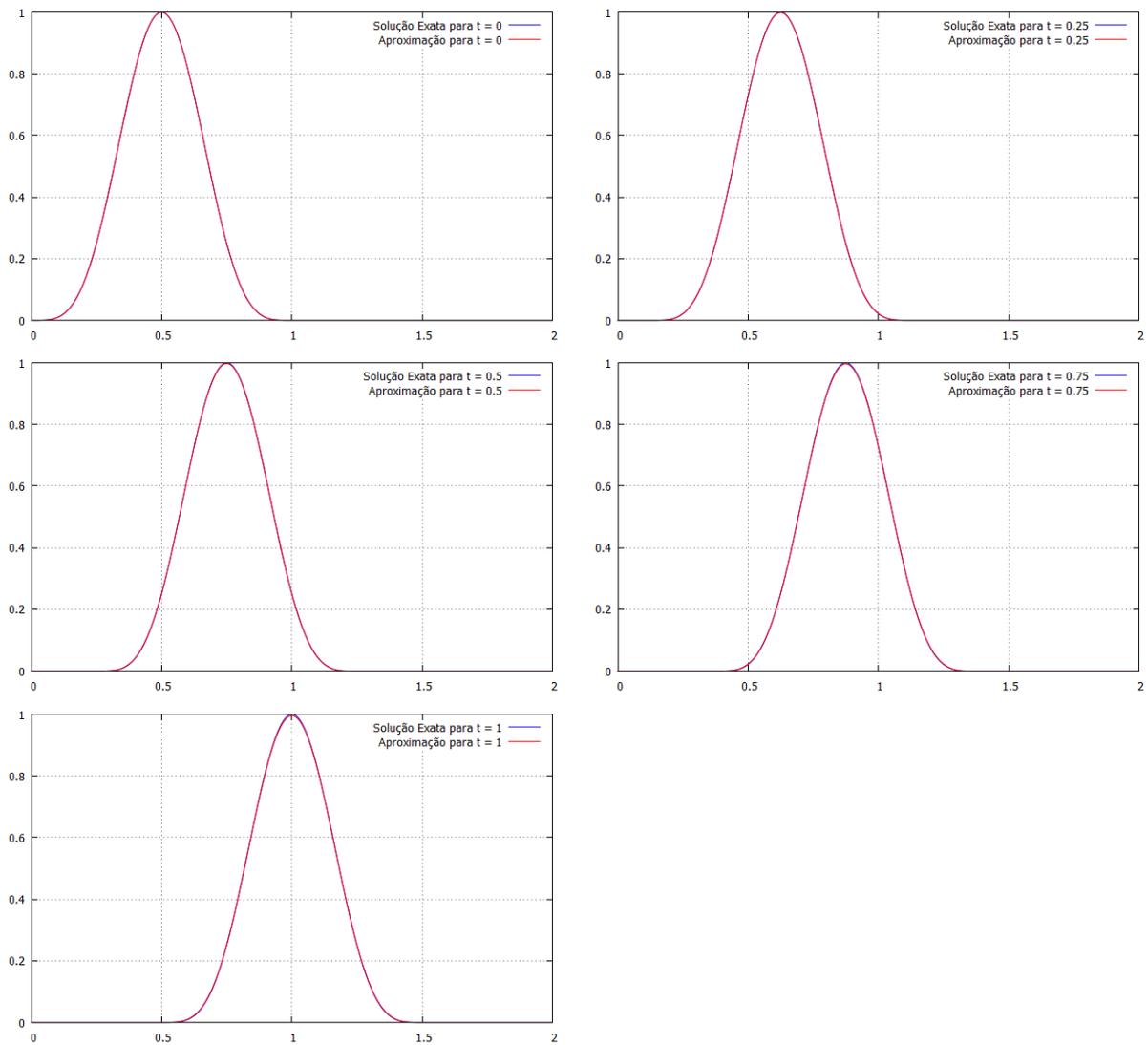


Figura 2: Gráficos obtidos com o método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço

Método de Lax-Wendroff (LW):

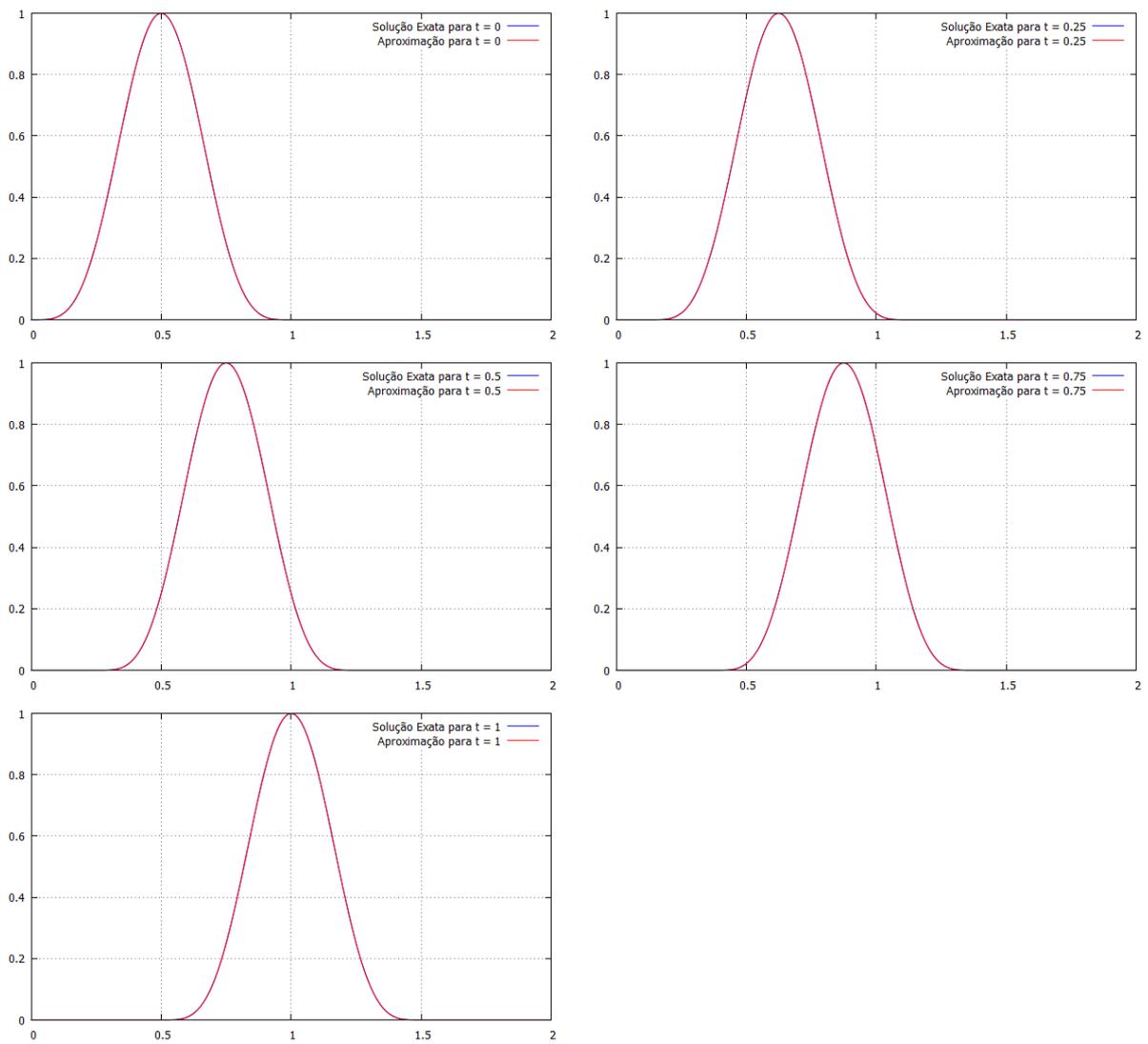


Figura 3: Gráficos obtidos com o método de Lax-Wendroff

A aproximação obtida é consistente com o resultado esperado, já que as aproximações ficam bem próximas da solução exata e vemos que os gráficos se deslocam para o lado com o passar do tempo conforme esperado, já que o fluido se desloca dentro do tubo com velocidade constante. Observamos que amplitude das aproximações obtidas diminui com o passar do tempo, pois ao fazer a aproximação no problema discreto, fazemos uma ponderação entre o ponto mais alto da curva com pontos anteriores que são mais baixos, deste modo, a amplitude diminui lentamente, ou seja, o erro vai se acumulando.

4.2 Tarefa 2

Para a tarefa 2, aproximamos, através nos métodos numéricos descritos, a solução do problema seguinte:

Temos que $T = 1$, $L = 2$, $v = \frac{5}{10}$, $M = 2^{10}$, $N = 2M$ e que a densidade inicial do contraste é dada por:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - |8x - 1|, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

Utilizando as aproximações numéricas do método de diferenças para frente no tempo e para trás no espaço obtemos os gráficos abaixo:

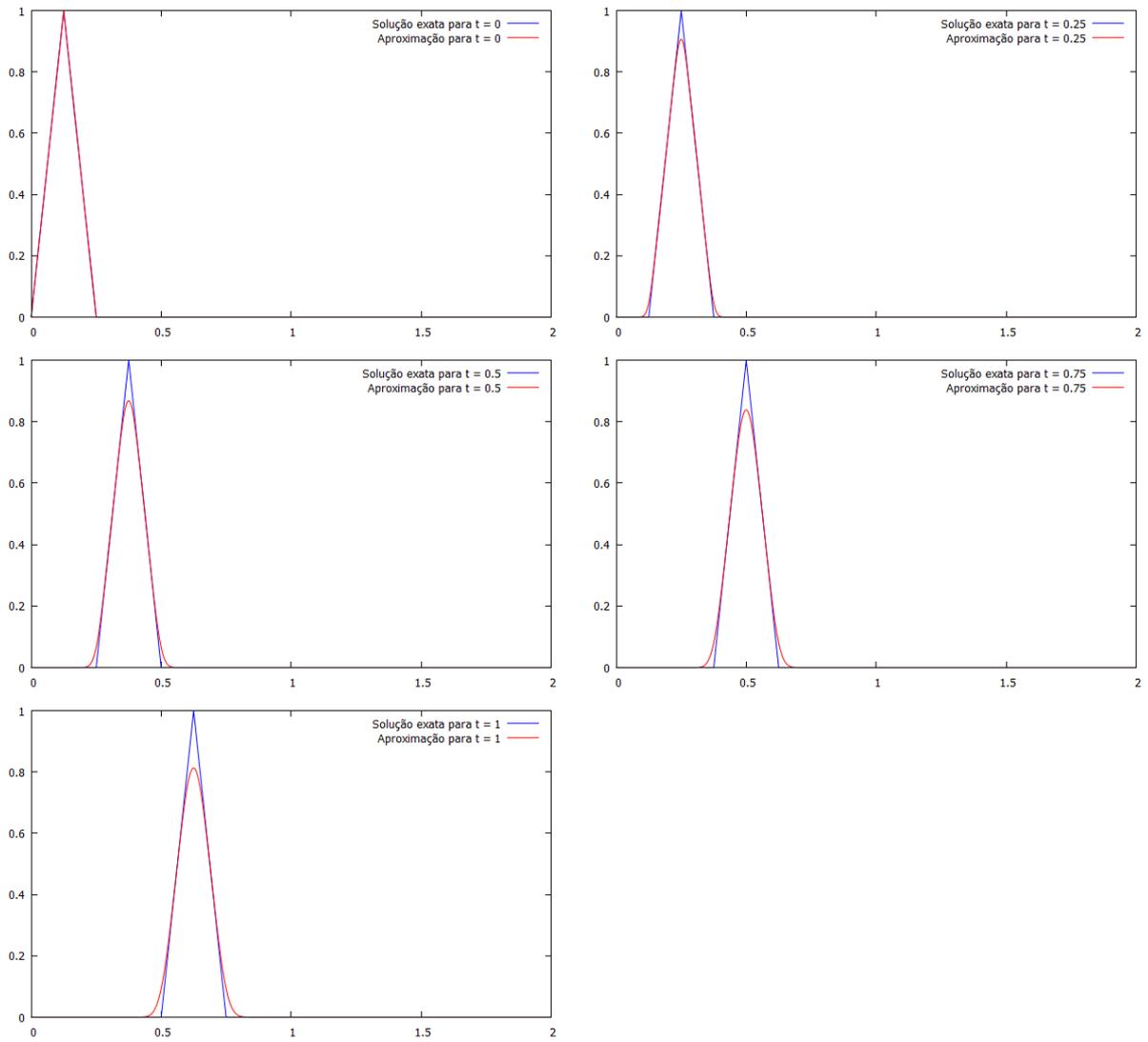


Figura 4: Gráficos obtidos com o método de diferenças para frente no tempo e para trás no espaço

Utilizando as aproximações numéricas do método de Lax-Wendroff obtemos os gráficos abaixo:

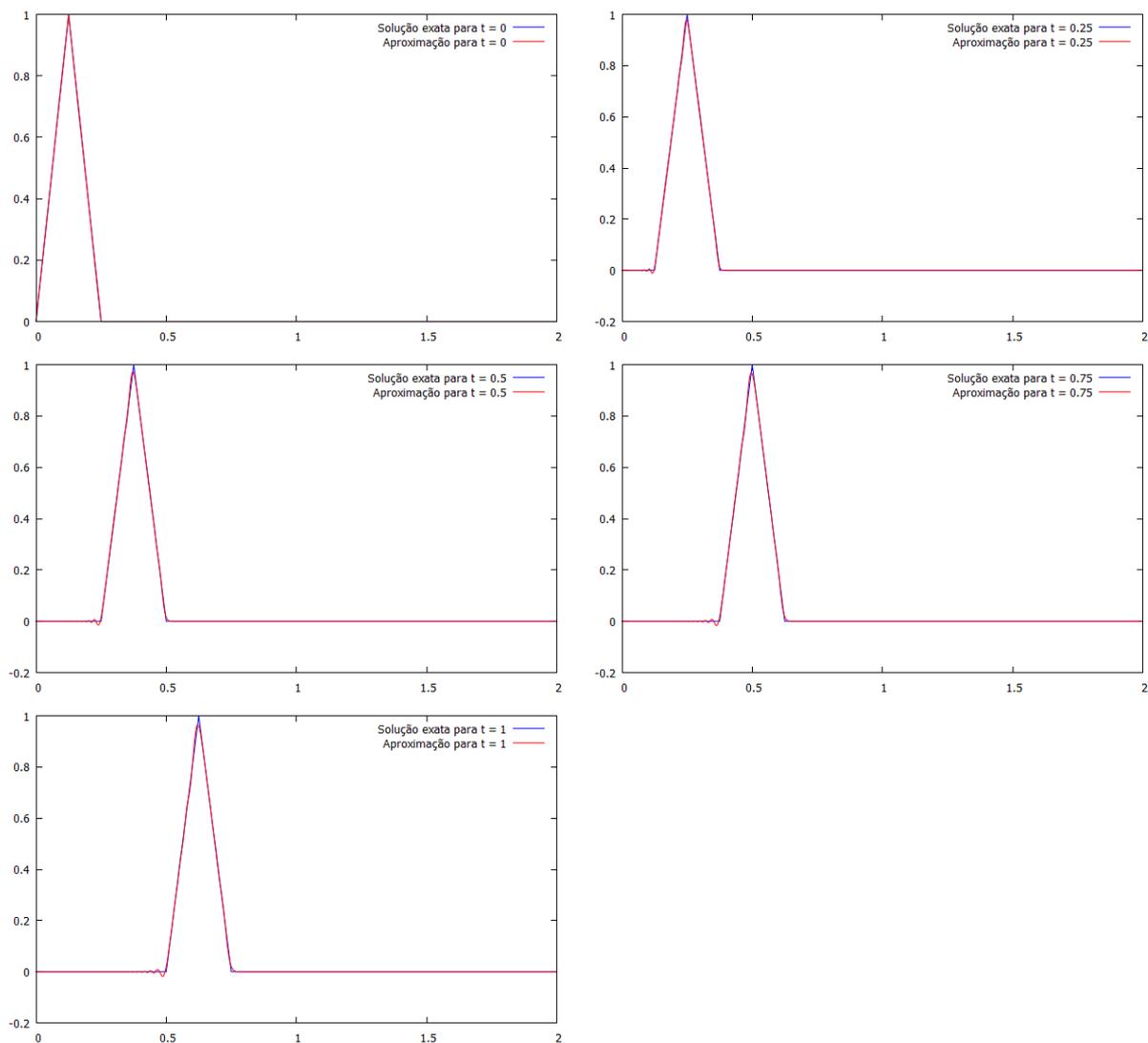


Figura 5: Gráficos obtidos com o método de Lax-Wendroff

Observamos que as soluções que eram formadas por retas devido ao módulo, viraram curvas. Isso ocorre pois as aproximações numéricas suavizam a solução aproximada. Notamos que o método de LW aproxima melhor a solução apesar de sofrer algumas oscilações pequenas. O método de diferenças para frente no tempo e para trás no espaço gera uma aproximação mais suave mas que contém um erro maior. Os pontos com maiores erros são aqueles próximos do máximo e do mínimo da solução exata, pois para aproximar, os métodos utilizam combinações dos pontos anteriores e o erro vai se acumulando e assim se distancia dos pontos de máximo e mínimo.

4.3 Tarefa Bônus

Para a tarefa bônus, consideramos o problema não linear. Vamos resolver a equação

$$u_t + uu_x = 0$$

e com densidade inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} \cos^4(\pi(x - 0.5)), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

Neste problema, a velocidade de propagação do fluido depende da função u .

Utilizando $M = \frac{N}{2} = 2^8$ e utilizando as aproximações numéricas do método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço obtemos os gráficos abaixo:

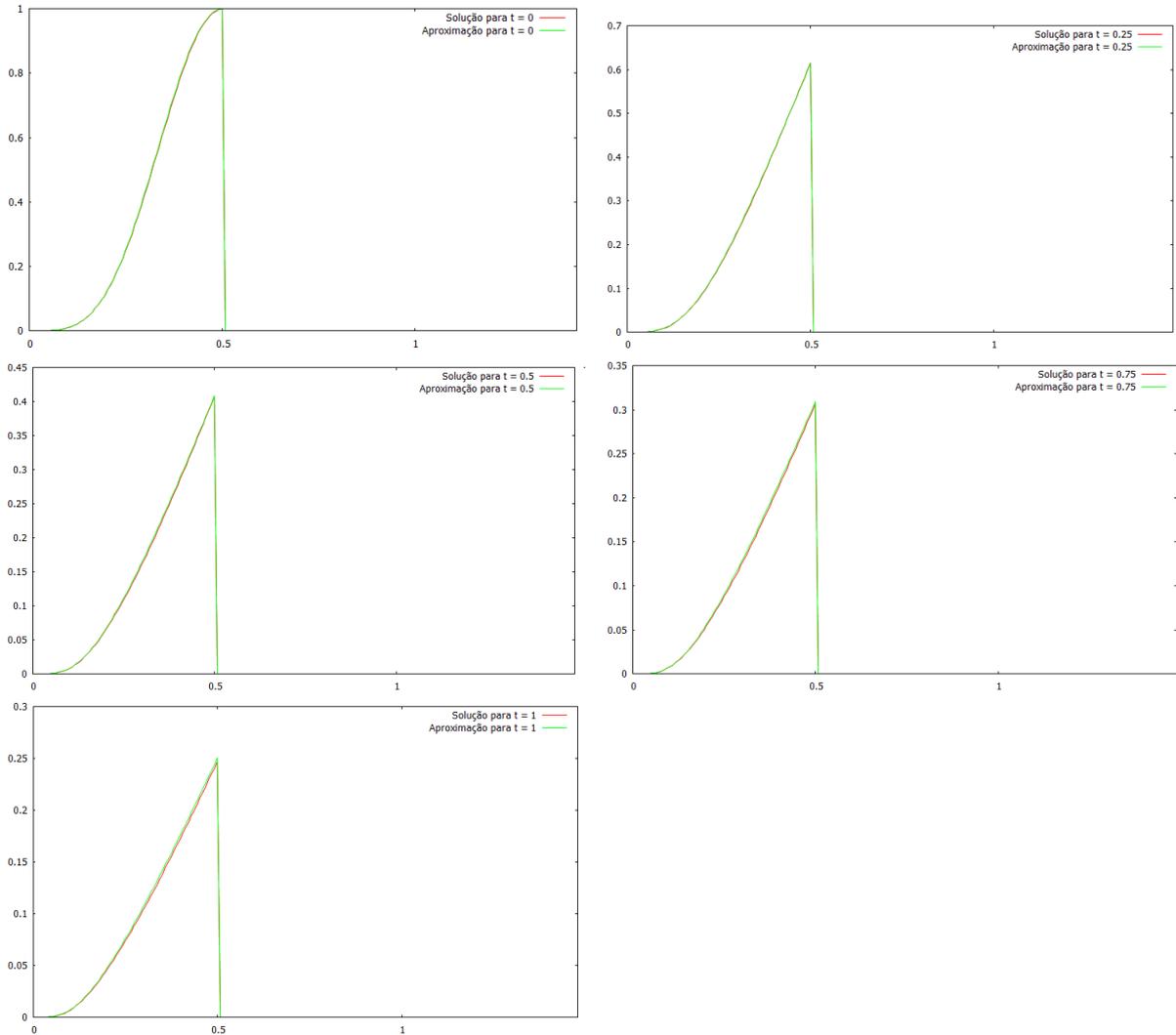


Figura 6: Gráficos obtidos com o método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço - Caso não linear

Observa-se pelos gráficos, que o ponto máximo da curva tem uma velocidade maior e que tende a andar mais rapidamente que a parte de baixo da curva. A curva tende a virar uma onda, porém como não é uma função, acaba resultando em uma onda quebrada.

5 Conclusão

Como conclusão, temos que para o primeiro problema, o método de Lax-Wendroff converge mais rapidamente do que o método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço. Já o método de diferença para frente no tempo e no espaço não converge.

Para o problema 2, o método de Lax-Wendroff também converge mais rapidamente que o método de diferença para frente no tempo e para trás no espaço, porém a aproximação fica mais suavizada do que a solução exata e contém algumas pequenas oscilações. Para o problema bônus, obtemos uma curva que parece com uma onda quebrada devido à maior velocidade nos pontos maiores da curva.

Referências

- [1] STOER, J AND BURLISCH, R., **Introduction to Numerical Analysis**, SPRINGER - 3RD ED. - 2002.
- [2] STRIKWERDA, J.C., **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**, SIAM - 2ND ED. - 2004.