MAC-315 – Programação Linear – Terceira Prova

Nome:____

Assinatura:____________________________________

Observação: Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A^j$, $p' = c'_B B^{-1}$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc.)

$\boxed{\textbf{Questão 1}}$ (2.5 pontos) Considere o problema $\begin{cases} \min & [1\ 1\ 0\ 0]x \\ \text{s.a} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$

a) Resolva o problema usando o simplex de duas fases.

b) Resolva o problema usando o simplex dual a partir da base $\{x_3, x_4\}$.

c) Represente graficamente os problemas primal (interpretando x_3 e x_4 como variáveis residuais) e dual, ilustrando os resultados dos itens (a) e (b).

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$ (2.5 pontos) Considere a função $L(x,p) = c'x + p'(b - Ax)$, e seja $\bar{x}$ uma solução ótima primal e $\bar{p}$ uma solução ótima dual.

a) Considere que o primal é o (PLC). Mostre que $\bar{x}$ é solução ótima do problema $\begin{cases} \min & L(x,\bar{p}) \\ \text{s.a} & x \geq 0 \end{cases}$ (observe que $\bar{p}$ está fixado).

b) Considere que o primal é $\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \end{cases}$. Mostre que todo $x \in \mathbb{R}^n$ é solução ótima do problema $\begin{cases} \min & L(x,\bar{p}) \\ \text{s.a} & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$.

$\boxed{\textbf{Questão 3}}$ (2.5 pontos) Considere o problema $(P_\lambda) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b + \lambda d \\ & x \geq 0 \end{cases}$

e seja B uma base ótima do problema com $\lambda = 0$.

a) Mostre que (PM) nunca poderá ser ilimitado, independentemente dos valores de λ e d.

b) Mostre que B é ótima em (P_λ) $\forall \lambda \geq 0$ se, e somente se, $B^{-1}d \geq 0$.

$\boxed{\textbf{Questão 4}}$ (2.5 pontos) Considere a função `achaviável(A,b)` que, dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, retorna (se existir) uma solução do sistema linear $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ ou um código especial (`nil`) caso o sistema seja inviável. Escreva o código de uma função `proglin(A,b,c)` para resolver o $(PLC) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$ retornando uma solução ótima x^* (se existir), ou os códigos (`nil`) se o problema é inviável e (`inf`) se o problema é ilimitado.

Obs: Você pode usar uma sintaxe próxima de C ou Octave, o que achar mais simples. Você não deve implementar o simplex.