BMAC / IME / USP – MAC-315 – Terceira Prova – 07/12/2010

Nome:________________________ **Assinatura:**____________________ **Nº USP:** ☐☐☐☐☐☐☐

Observação: Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A^j$, $p' = c'_B B^{-1}$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc.)

Questão 1 (2.5 pontos)

a) (1.5 ponto) Resolva o problema de programação linear

$$(P)\left\{\begin{array}{lcccccccccccccc} \min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & & & = & 2 \\ & x_1 & & & + & x_3 & & & - & x_5 & & & = & 1 \\ & & & & & x_3 & & & & & - & x_6 & = & 1 \\ & & & & & & & x \geq 0 & & & & & & \end{array}\right.$$

usando o simplex dual a partir da base $\{x_4, x_5, x_6\}$ e a regra de Bland.

b) (0.5 ponto) A solução ótima que você obteve é degenerada? é única? Justifique.

c) (0.5 ponto) A solução dual ótima associada à mesma base é degenerada? Justifique.

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$ (2.5 pontos)

Considere o problema (dual) de programação linear

$$
(D)\left\{\begin{array}{lccccccc}
\max & 4p_1 & + & 2p_2 & + & p_3 & & \\
\text{s.a.} & p_1 & & & & & \leq & 2 \\
 & & & p_2 & & & \leq & 2 \\
 & p_1 & + & p_2 & & & \leq & 3 \\
 & & & & & p_3 & \leq & 2 \\
 & p_1 & & & + & p_3 & \leq & 3 \\
 & & & p_2 & + & p_3 & \leq & 3 \\
 & p_1 & + & p_2 & + & p_3 & \leq & 4 \\
 & & & p \in \mathbb{R}^3 & & & &
\end{array}\right.
$$

a) (1.5 ponto) Escreva o primal associado a este problema e resolva-o pelo método simplex, usando a regra de Bland, a partir da base $\{x_1, x_2, x_4\}$.

b) (0.5 ponto) Escreva todas as condições de folgas complementares associadas à solução primal encontrada na parte (a), inclusive as condições "supérfluas".

c) (0.5 ponto) Determine uma solução dual que satisfaça as condições do item (b) e mostre que esta solução é ótima no problema acima.

$\boxed{\textbf{Questão 3}}$ (2.5 pontos)

Considere a função Lagrangeano, definida como $L(x,p) = c'x + p'(b - Ax)$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^m$. Considere o seguinte "jogo": o primeiro jogador escolhe um vetor $x \geq 0$ e o segundo jogador escolhe um vetor $p \in \mathbb{R}^m$; feito isso o primeiro jogador deve pagar o valor $L(x,p)$ para o segundo jogador (ou receber, se este valor for negativo). O primeiro jogador gostaria de minimizar a expressão $L(x,p)$ enquanto o segundo jogador gostaria de maximizá-la.

Um par (x^*, p^*) tal que $x^* \geq 0$ e $p^* \in \mathbb{R}^m$ é chamado de *ponto de equilíbrio (de Nash)* se

$$L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*), \ \forall x \geq 0, \ \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

(assim, temos um equilíbrio se nenhum dos jogadores é capaz de melhorar o seu resultado modificando unilateralmente a sua escolha.)

Mostre que um par (x^*, p^*) é um ponto de equilíbrio se e somente se x^* e p^* são soluções ótimas do (PLC) e de seu dual, respectivamente.

Dica: Separe a demonstração da ida ($\Longrightarrow$ ou *"somente se"*) e da volta ($\Longleftarrow$ ou *"se"*). Atenção ao fato de que a *única* condição sobre $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $p^* \in \mathbb{R}^m$ no enunciado é a propriedade $x^* \geq 0$.

Questão 4 (2.5 pontos)

Considere o problema

$$(P)\begin{cases} \min & (c+\gamma)'x \\ \text{s.a} & Ax = b+\beta \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

parametrizado em γ e β. Seja B uma base ótima para o caso particular em que $\gamma = 0$ e $\beta = 0$.

a) (0.5 ponto) Que condições β e γ devem satisfazer para que a solução associada a B no problema acima seja viável?

b) (1.0 ponto) Escreva o dual de (P). Que condições β e γ devem satisfazer para que a solução dual associada a B seja viável?

c) (1.0 ponto) Escreva um problema de minimização para encontrar os valores de β e γ tais que a base B é ótima em (P) e o valor ótimo de (P) é o menor possível. Sua formulação corresponde a um problema de programação linear?