BMAC / IME / USP – MAC-315 – Terceira Prova – 1/12/2011

i j

Nome:____________________ **Assinatura:**____________________ **N$^{\underline{o}}$ USP:** | | | | | | | |

Instruções: Enuncie claramente os argumentos, hipóteses e conclusões. Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A^j$, $p' = c'_B B^{-1}$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc). Esquemas e fórmulas sem explicações textuais não serão aceitos. Os valores de i e j usados na questão 2 são os dois últimos dígitos do seu número USP. Você deve substituí-los antes de resolver esta questão.

$\boxed{\textbf{Questão 1}}$ (3 pontos) Na definição de dualidade tratamos as restrições envolvendo A e b de forma diferente das restrições de sinal. Em particular, um problema da forma

$$(P)\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

era reformulado como $\min\limits_{x\geq 0}\max\limits_{p\leq 0} c'x + p'(b - Ax)$. Seria possível tratar as restrições de sinal de forma análoga às demais, introduzindo termos de penalização correspondentes na função objetivo:

$$(\text{min-max})\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbf{R}^n}\max\limits_{\substack{p\leq 0\\ q\geq 0}} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x) \end{cases}$$

a) Mostre que o problema (min-max) acima é equivalente ao problema (P) original.
Dica: considere a função $h(x) = \max\limits_{\substack{p\leq 0\\ q\geq 0}} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x)$.

b) Mostre que o dual dessa formulação, dado por

$$\max_{\substack{p\leq 0\\ q\geq 0}}\min_{x\in\mathbf{R}^n} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x)$$

$$|||$$

$$\max_{\substack{p\leq 0\\ q\geq 0}}\min_{x\in\mathbf{R}^n} p'b + (c' - p'A - q')x$$

é equivalente ao dual de (P) de acordo com a definição original.

Questão 2 (4 pontos) Considere o (PLC) $\min c'x$ s.a $Ax = b,\ x \geq 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \overset{-i-j-2}{\boxed{}} \\ \overset{i+j+3}{\boxed{}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique se a base $\{x_3, x_4\}$ possui viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex tabular correspondente (primal ou dual) a partir desta base.

b) Substituindo b por $\begin{bmatrix} \overset{-i-j-2}{\boxed{}} \\ \overset{i+j+1}{\boxed{}} \end{bmatrix}$, verifique se a base obtida no item (a) preserva viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex correspondente para o novo problema a partir daquela base. Dica: B^{-1} está no tableau.

c) Substituindo c por $(-1, 1, 0, 0)'$, verifique se a base obtida no item (b) preserva viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex correspondente para o novo problema a partir daquela base. Dica: $p' = (0, 1)$ no cálculo dos novos custos reduzidos.

Observação importante: sequências de tableaux sem explicação textual ou sem conclusão textual não serão considerados. Escreva as fórmulas literais antes de recalcular os tableaux nos itens (b) e (c).

$\boxed{\textbf{Questão 3}}$ (3 pontos) Considere um (PLC) com uma única restrição de igualdade:

$$(PLC)\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

e suponha que $b > 0$ e que $a \not\geq 0$ e $a \not\leq 0$ (ou seja, a possui componentes positivas e negativas).

a) Escreva o dual deste (PLC), exibindo separadamente cada restrição.

b) Mostre que o conjunto viável dual é um segmento de reta, e determine a solução ótima dual. Dica: considere separadamente os casos $a_i > 0$ e $a_i < 0$.

c) Escreva as condições de folgas complementares usando a solução ótima dual.

d) Use as condições do item (c) para obter uma solução primal, e mostre que a solução obtida é ótima no primal.