MAC-315 – Programação Linear – Terceira Prova

Nome:____

Assinatura:____

Observação: Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A^j$, $p' = c'_B B^{-1}$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc.)

Questão 1 (2.5 pontos) Considere o problema
$$\begin{cases} \min & [1\ 1\ 0\ 0]x \\ \text{s.a} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1.0 ponto) Resolva o problema usando o simplex de duas fases.

b) (1.0 ponto) Resolva o problema usando o simplex dual a partir da base $\{x_3, x_4\}$.

c) (0.5 ponto) Represente graficamente os problemas primal (interpretando x_3 e x_4 como variáveis residuais) e dual, e explique os resultados dos itens (a) e (b).

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$ (2.5 pontos) Considere o (PL) $\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$ e suponha que $\bar{x}$ e $\bar{p}$ são soluções viáveis do primal e do dual, respectivamente, que satisfazem $c'\bar{x} = \bar{p}'b$.

a) (0.5 ponto) Escreva o dual do (PL).

b) (1.0 ponto) Mostre, **sem usar os teoremas de dualidade forte ou fraca**, que para quaisquer x e p, viáveis respectivamente nos problemas primal e dual, vale a desigualdade $c'x \geq b'p$. (Dica: $p'Ax = x'A'p$).

c) (0.5 ponto) Mostre, usando a desigualdade do item (b), que $\bar{x}$ é solução ótima primal e $\bar{p}$ é solução ótima dual.

d) (0.5 ponto) Mostre que $\bar{x}$ é solução ótima do problema $\begin{cases} \min & c'x + \bar{p}'(b - Ax) \\ \text{s.a} & x \geq 0 \end{cases}$.

Questão 3 (2.5 pontos) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica ($A = A'$), e $c \in \mathbb{R}^n$. Considere o

$$(PL) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \geq c \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

a) (1.0 ponto) Escreva o dual do (PL) e mostre que o conjunto viável do problema dual está contido no conjunto viável do (PL).

b) (0.5 ponto) Enuncie detalhadamente o caso particular do teorema forte de dualidade para este par de problemas.

c) (1.0 ponto) Mostre que se o (PL) admite solução ótima, então existe uma solução ótima x^* que satisfaz $x^* \geq 0$ e $Ax^* = c$.

$\boxed{\textbf{Questão 4}}$ (2.5 pontos) Seja o

$$(PLC)_{\text{aux}} \begin{cases} \min & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a} & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

associado à fase I do método simplex, e suponha que a matriz A possui linhas l.i.

a) (0.5 ponto) Escreva o dual do $(\text{PLC})_{\text{aux}}$.

b) (2.0 pontos) Mostre que existe uma base ótima para o $(\text{PLC})_{\text{aux}}$ formada exclusivamente por variáveis x_i originais se, e somente se, $(0, 0, \ldots, 0)'$ é solução ótima do dual do $(\text{PLC})_{\text{aux}}$.