BCC / IME / USP – MAC-315 – Segunda Prova – 13/5/2013

Nome:________________________ **Assinatura:**____________________ **Nº USP:** □□□□□□□

Instruções: Verifique que o caderno contém todas as 4 questões, e leia atentamente os enunciados antes de iniciar a prova. Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $p' = c'_B B^{-1}$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A^j = c_j - p' A^j$, $\bar{c}' = c' - c'_B B^{-1} A$, $d_B = -B^{-1}A^j$, $u = B^{-1}A^j$, etc). Esquemas e fórmulas sem explicações textuais não serão aceitos.

Questão 1 (2.5 pontos)
Seja $\bar{x}$ um vértice do (PLC) $\{\min c'x \text{ s.a. } x \in P\}$ para $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, e considere que $\bar{x}$ está associado à base $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Sejam $N = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n-m}\}$ os índices das variáveis não-básicas, cada um associado a uma direção básica $d^{(l_j)} \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n-m$.

1. Prove que qualquer ponto viável $y \in P$ pode ser escrito como $y = \bar{x} + \sum_{j=1}^{n-m} y_{l_j} d^{(l_j)}$.

   Dica: compute $\bar{x}_B + \sum_{j=1}^{n-m} y_{l_j} d_B^{(l_j)}$ e $\bar{x}_N + \sum_{j=1}^{n-m} y_{l_j} d_N^{(l_j)}$ e note que $Ay = By_B + \sum_{j=1}^{n-m} A^{l_j} y_{l_j} = b$.

2. Verifique que $c'y = c'\bar{x} + \sum_{j=1}^{n-m} y_{l_j} \bar{c}_{l_j}$.

Observação (para pensar em casa): a partir de (1) e (2) é possível construir um PL com $n - m$ variáveis $(y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots, y_{l_{n-m}})$ equivalente ao (PLC).

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$ (2.5 pontos)

Considere o poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, onde $b \in \mathbb{R}^m$ satisfaz $b \geq 0$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz qualquer, e considere o PL abaixo acrescentado de m variáveis ($y \in \mathbb{R}^m$):

$$(Q) \left\{ \begin{array}{rl} \min & y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\ \text{s.a} & Ax + y = b \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Mostre que o problema (Q) é viável.
2. Mostre que o problema (Q) possui um vértice ótimo. Dica: verifique que este problema não pode ser ilimitado.
3. Sendo α o valor ótimo do problema (Q), mostre que $P \neq \emptyset \iff \alpha = 0$.

$\boxed{\textbf{Questão 3}}$ (2.5 pontos) Considere o problema de programação linear

$$\left\{\begin{array}{lrrrl} \max & x_1 & -2x_2 & +x_3 & \\ \text{s.a} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 12 \\ & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 6 \\ & -x_1 & +3x_2 & & \leq 9 \\ & & x \geq 0 & & \end{array}\right.$$

Passe este problema para a forma canônica, e resolva-o pelo método simplex revisado a partir da base $\{4, 5, 6\}$ (associada às variáveis residuais).

$\boxed{\textbf{Questão 4}}$ (2.5 pontos) Considere o hipercubo unitário $H = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, \ldots, n\}$, e lembre-se que na primeira prova mostramos que os vértices de H correspondem a todos os vetores da forma $x \in \mathbb{R}^n$, onde $x_j \in \{0, 1\}, \ \forall j$. Considere o (PLC) abaixo, definido sobre a reformulação canônica de H:

$$\text{(PLC)} \left\{ \begin{array}{llllllllll} \min & c_1x_1 & c_2x_2 & +\cdots & +c_nx_n & (+0x_{n+1} & +0x_{n+2} & \cdots & +0x_{n+n}) & \\ \text{s.a} & x_1 & & & & +x_{n+1} & & & & = 1 \\ & & x_2 & & & & +x_{n+2} & & & = 1 \\ & & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & x_n & & & & +x_{n+n} & = 1 \\ & & & & & x \geq 0 & & & & \end{array} \right.$$

1. Mostre que as bases do (PLC) correspondem a conjuntos de índices da forma

$$B = \{1 + nx_1^c, 2 + nx_2^c, \ldots, n + nx_n^c\} \quad \text{onde} \quad x_j^c = 1 - x_j \quad \text{e} \quad x_j \in \{0, 1\}, \ \forall j$$

   (em outras palavras, para cada índice $j = 1, \ldots, n$, ou x_j ou x_{n+j} está na base; observe que a matriz básica B associada é a identidade).

2. Compute o vetor de multiplicadores $p' = c_B' B^{-1}$ para uma base da forma do item (1), e use-o para computar os custos reduzidos associados a esta base. Dica: considere $\bar{c}_j$ separadamente para $j \leq n$ e $j > n$, lembrando que $j \notin B$.

3. Use a expressão dos custos reduzidos obtidos no item (2) para construir uma base ótima para o (PLC).