BCC / IME / USP – MAC-315 – Primeira Prova – 1/4/2013

Nome:________________________ **Assinatura:**____________________ **No USP:** ☐☐☐☐☐☐☐

Questão 1 (2.5 pontos) Helena herdou uma fábrica de aparelhos eletrônicos do pai, mas como o negócio dela é Computação ela decidiu vender a fábrica. Um dos problemas que ela tem é decidir o que fazer com o estoque de peças. Ela tem 200.000 transistores, 500.000 capacitores, 1.000 painéis de LCD de 26", 1.000 painéis de LCD de 32", 10.000 placas de rádio e 8.000 alto-falantes. Um amigo do pai ofereceu comprar esse estoque por R$ 400.000,00 mas Helena acha que esse não é um bom negócio. Ela sabe que pode usar essas peças para fabricar TVs de LCD de 26", que usariam o respectivo painel LCD, 123 transistores, 217 capacitores e dois alto-falantes. Ela também poderia fabricar TVs de 32" que usariam o respectivo painel LCD, 127 transistores, 442 capacitores e dois alto-falantes. Ela poderia ainda fabricar rádios usando uma placa de rádio, 97 transistores, 119 capacitores e um alto-falante. Vendendo uma TV LCD de 26" no mercado Helena ganha R$ 350,00, já uma TV de 32" vale R$ 500,00 e um rádio vale R$ 100,00. Escreva um PL que ajuda Helena a decidir se ela deve aceitar a oferta pelo estoque ou se é melhor fabricar o que for possível e vender no mercado.

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$ (2.5 pontos) Considere o hipercubo de dimensão n, dado por

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

e lembre-se da definição de vértice: $\bar{x} \in H$ é vértice se existe um $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'\bar{x} < c'y$ para qualquer $y \in H \backslash \bar{x}$.

1. Mostre, pela definição, que qualquer $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ é um vértice de H. Dica: é possível construir c a partir de $\bar{x}$ pensando independentemente em cada coordenada.

2. Prove que H tem exatamente 2^n vértices. Dica: prove por contradição.

Questão 3 (2.5 pontos) Considere o seguinte problema de programação linear

$$\left\{\begin{array}{llrl} \min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a} & & x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & +2x_2 & \leq 10 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & x_1 & & \leq 7 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}\right.$$

1. Represente o poliedro graficamente (através de uma região hachurada), determinando as coordenadas dos pontos relevantes (interseções), e identifique as soluções básicas viáveis e inviáveis (não precisa provar, basta identificar).

2. Identifique graficamente uma solução ótima, e demonstre algebricamente sua otimalidade.

3. Esta solução é única? Prove sua afirmação.

$\boxed{\textbf{Questão 4}}$ (2.5 pontos) Dado um poliedro canônico $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$, podemos construir a partir dele um poliedro auxiliar $C = \{d \in \mathbb{R}^n \mid Ad = 0,\ \sum_{i=1}^{n} d_i = 1,\ d \geq 0\}$.

1. Mostre que C é limitado, ou seja, que existe um $K > 0$ tal que $|d_i| \leq K,\ \forall d \in C$.
2. Mostre que P contém uma semireta se, e somente se, C é não-vazio.
   (Uma semireta é qualquer conjunto da forma $S = \{\bar{x} + \alpha\bar{d} \mid \alpha \geq 0\}$.)