Gabarito - 3ª provinha

Questão 1

$$\min \; x_1$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad = 6 \\ x_2 \quad - x_4 \quad = 9 \\ x_1 + x_2 \quad - x_5 = 15 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$c = (1, 0, 0, 0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Problema auxiliar para fase de inicialização

$$\min \; y_1 + y_2 + y_3$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad + y_1 = 6 \\ x_2 \quad x_4 \quad + y_2 = 9 \\ x_1 + x_2 \quad - x_5 \quad + y_3 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$c_{aux} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$

$$A_{aux} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_{aux} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Aplicação do simplex tabular para o problema auxiliar $\qquad \square$: variáveis básicas

$B_1 = \{A^6, A^7, A^8\} \qquad B_1 = B_1^{-1} = I$

$$\bar{c}_N = c_N - c_B' B^{-1} A^N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 6, 9, 15)$

$c_{aux}' x = 30$

(1)		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boxed{y_1}$	$\boxed{y_2}$	$\boxed{y_3}$		$B_{(1)}^{-1}$			próximo tableau
	-30	-2	-2	1	1	1	0	0	0				$L\bar{c}_i$	$2L_1 + L\bar{c}_i$
← $y_1 =$	6	1	0	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	L_1	
$y_2 =$	9	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	1	0	L_2	
$y_3 =$	15	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	L_3	$-L_1 + L_3$

(2)		$\boxed{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	$\boxed{y_2}$	$\boxed{y_3}$		$B_{(2)}^{-1}$		
	-18	0	-2	-1	1	1	2	0	0				$2L_2 - L\bar{c}_i$
$x_1 =$	6	1	0	-1	0	0	1	0	0	1	0	0	
← $y_2 =$	9	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	1	0	
$y_3 =$	9	0	1	1	0	-1	-1	0	1	-1	0	1	$-L_2 + L_3$

(3)	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	$\boxed{y_3}$	$B^{-1}_{(3)}$		
0	0	0	-1	-1	1	2	2	0			
$x_1=6$	1	0	-1	0	0	1	0	0	1	0	0
$x_2=9$	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	1	0
$y_3=0$	0	0	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1

$L_3 + L\bar{c}_i$

$L_3 + L_1$

(4)	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$\boxed{x_3}$	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	$B^{-1}_{(4)}$		
0	0	0	0	0	0	1	1	1			
$x_1=6$	1	0	0	1	-1	0	-1	1	0	-1	1
$x_2=9$	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	1	0
$x_3=0$	0	0	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1

$\bar{c}_N \geq 0$ e $c'_{aux}x = 0$

portanto o problema é viável e $\{A^1, A^2, A^3\}$ é base inicial do simplex para o PLC.

Resolução do problema inicial a partir da base $\{A^1, A^2, A^3\}$

$$\bar{c}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = (6, 9, 0, 0, 0)$

$c'x = 6$

(1)	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$\boxed{x_3}$	x_4	x_5	B_1^{-1}		
-6	0	0	0	-1	1			
$x_1=6$	1	0	0	1	-1	0	-1	1
$x_2=9$	0	1	0	-1	0	0	1	0
$x_3=0$	0	0	1	1	-1	-1	-1	1

$L_3 + L\bar{c}_i$

$-L_3 + L_2$

$L_3 + L_2$

(2)	$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	x_3	$\boxed{x_4}$	x_5	B_2^{-1}		
-6	0	0	1	0	0			
$x_1=6$	1	0	-1	0	0	1	0	0
$x_2=9$	0	1	1	0	-1	-1	0	1
$x_4=0$	0	0	1	1	-1	-1	-1	1

$\bar{c}_N \geq 0 \therefore x$ é vértice ótimo

$c'x = 6$

$x = (6, 9, 0, 0, 0)$

Questão 2

Parte (1) : mostrar que $\begin{cases} x^* \text{ solução ótima do PLC} \\ p^* \text{ solução ótima do DLC} \end{cases} \Rightarrow (x^*, p^*)$ ponto de equilíbrio

hipóteses : $Ax^* = b$ $\quad A'p^* \leq c \quad c'x^* = p^{*\prime}b$

$x^* \geq 0 \qquad p'b \leq c'x \quad \forall x \in PLC, \forall p \in DLC$ } teoremas forte e fraco de dualidade

queremos mostrar : $\underbrace{L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*)}_{(i)} \leq L(x, p^*) \quad \forall x \geq 0, \forall p \in \mathbb{R}^m$

$L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*)$: (ii)

(i) $Ax^* = b \Rightarrow b - Ax^* = 0$

$\therefore p'(\overbrace{b - Ax^*}^{=0}) = p^{*\prime}(\overbrace{b - Ax^*}^{=0}) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^m$

$\therefore c'x^* + p'(b - Ax^*) = c'x^* + p^{*\prime}(b - Ax^*)$

$L(x^*, p) = L(x^*, p^*) \quad \forall p \in \mathbb{R}^m$ (i) ✓

(ii) $Ax^* = b \Rightarrow b - Ax^* = 0 \qquad \overset{\geq 0}{x'}(\overset{\geq 0}{c - Ap^*}) \geq 0$

$L(x^*, p^*) = c'x^* + \overbrace{p^{*\prime}(b - Ax^*)}^{=0} = b'p^* \leq b'p^* + \overbrace{x'(c - A'p^*)}^{\geq 0} = L(x, p^*)$

$\therefore L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*)$

(ii) ✓

Logo, $L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*) \quad \forall x \geq 0, \forall p \in \mathbb{R}^m$ ∎

Parte (2): mostrar que (x^*, p^*) ponto de equilíbrio $\Rightarrow \begin{cases} x^* \text{ é solução ótima do PLC} \\ p^* \text{ é solução ótima do DLC} \end{cases}$

hipótese: $L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*) \quad \forall x \geq 0, \ \forall p \in \mathbb{R}^m$

queremos mostrar: (i) $Ax^* = b$, $x^* \geq 0$ (x^* é viável no PLC)

(ii) $A'p^* \leq c$ (p^* é viável no DLC)

(iii) $c'x^* = b'p^*$ (x^* e p^* são soluções ótimas)

(i) $L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \quad \forall p \in \mathbb{R}^m$

$$c'x^* + p'(b - Ax^*) \leq c'x^* + p^{*\prime}(b - Ax^*)$$

$$p'(b - Ax^*) \leq p^{*\prime}(b - Ax^*)$$

$(p - p^*)'(b - Ax^*) \leq 0$ se tem que valer $\forall p \in \mathbb{R}^m$, então $(b - Ax^*) = 0$ (i) ✓

$\therefore$ x^* é viável no PLC

(obs: se $(b - Ax^*)_i$ fosse $\neq 0$, tomar $p_i \to \pm\infty$ violaria a desigualdade)

(ii) $L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*) \quad \forall x \geq 0$

$$c'x^* + p^{*\prime}\overbrace{(b - Ax^*)}^{=0} \leq c'x + p^{*\prime}(b - Ax)$$

$$c'x^* - p^{*\prime}b \leq c'x - p^{*\prime}(Ax)$$

$\underbrace{c'x^* - p^{*\prime}b}_{\text{constante}} \leq x'(c - A'p^*)$ se tem que valer $\forall x \geq 0$, então $(c - A'p^*) \geq 0$ (ii) ✓

$\therefore$ p^* é viável no DLC

(obs: se $(c - A'p^*)_i$ fosse < 0, tomar $x_i \to +\infty$ violaria a desigualdade)

(iii) se $x = 0$ na última desigualdade (ii), temos:

$c'x^* - p^{*\prime}b \leq 0$

$c'x^* \leq p^{*\prime}b$

devido ao teorema fraco de dualidade ($b'p^* \leq c'x^*$) e com x^* viável e p^* viável, a igualdade

$c'x^* = p^{*\prime}b$ implica que x^* é ótimo e p^* é ótimo. (iii) ✓