

Questão 1

$$\begin{matrix} i=5 \\ j=8 \end{matrix} \left| \begin{matrix} A = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ b = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix} \end{matrix} \right. \quad P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b, x \geq 0\}$$

(1) $A = [A^1 | A^2 | A^3 | A^4]$ Há $\binom{4}{2} = 6$ possíveis bases

$$\begin{aligned} B_1 &= \{A^1, A^2\} & B_3 &= \{A^1, A^4\} & B_5 &= \{A^2, A^4\} \\ B_2 &= \{A^1, A^3\} & B_4 &= \{A^2, A^3\} & B_6 &= \{A^3, A^4\} \end{aligned}$$

São todos conjuntos de dois vetores l.i., portanto são bases de $\mathbb{R}^2$.

Soluções básicas: $Ax = b \Rightarrow A_{B_i} x_{B_i} + A_N x_N = b, x_N = 0 \Rightarrow A_{B_i} x_{B_i} = b$ ou $x_{B_i} = A_{B_i}^{-1} b$

$$B_1 \quad \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1x_1 + 10x_2 = 60 \\ 7x_1 - 1x_2 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_2 = 7 \end{matrix} \quad x_{B_1} = (10, 7, 0, 0) \text{ viável (i)}$$

$$B_2 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1x_1 + 1x_3 = 60 \\ 7x_1 + 0x_3 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 9 \\ x_3 = 69 \end{matrix} \quad x_{B_2} = (9, 0, 69, 0) \text{ viável (ii)}$$

$$B_3 \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1x_1 + 0x_4 = 60 \\ 7x_1 + 1x_4 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -60 \\ x_2 = 483 \end{matrix} \quad x_{B_3} = (-60, 0, 0, 483) \text{ inviável}$$

$$B_4 \quad \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 10x_2 + 1x_3 = 60 \\ -1x_2 + 0x_3 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -63 \\ x_3 = 690 \end{matrix} \quad x_{B_4} = (0, -63, 690, 0) \text{ inviável}$$

$$B_5 \quad \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 10x_2 + 0x_4 = 60 \\ -1x_2 + 1x_4 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 6 \\ x_4 = 69 \end{matrix} \quad x_{B_5} = (0, 6, 0, 69) \text{ viável (iii)}$$

$$B_6 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1x_3 + 0x_4 = 60 \\ 0x_3 + 1x_4 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 60 \\ x_4 = 63 \end{matrix} \quad x_{B_6} = (0, 0, 60, 63) \text{ viável (iv)}$$

As bases B_3 e B_4 geram soluções inviáveis.

(2) Direções: $d_B^j = -A_{B_i}^{-1} A^j, d_B^j = 1 \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(i) $A_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{69} & \frac{10}{69} \\ \frac{7}{69} & \frac{1}{69} \end{bmatrix} \quad j = \{3, 4\}$

direção em $j=3$: $-A_{B_1}^{-1} A^3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{69} & \frac{-10}{69} \\ \frac{-7}{69} & \frac{-1}{69} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{69} \\ \frac{-7}{69} \end{bmatrix}$

$$d_{B_1}^3 = \left(\frac{-1}{69}, \frac{-7}{69}, 1, 0 \right)$$

direção em $j=4$: $-A_{B_1}^{-1} A^4 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{69} & \frac{-10}{69} \\ \frac{-7}{69} & \frac{-1}{69} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{69} \\ \frac{-1}{69} \end{bmatrix}$

$$d_{B_1}^4 = \left(\frac{-10}{69}, \frac{-1}{69}, 0, 1 \right)$$

$$(ii) \quad A_{B2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{B2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ 1 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad J = \{2, 4\} \quad (2)$$

$$\text{direção em } j=2: -A_{B2}^{-1} A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ -1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{69}{7} \end{bmatrix} \quad d_{B2}^2 = \left(\frac{1}{7}, 1, -\frac{69}{7}, 0 \right)$$

$$\text{direção em } j=4: -A_{B2}^{-1} A^4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ -1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad d_{B2}^4 = \left(-\frac{1}{7}, 0, -\frac{1}{7}, 1 \right)$$

$$(iii) \quad A_{B5} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{B5}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \quad J = \{1, 3\}$$

$$\text{direção em } j=1: -A_{B5}^{-1} A^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{69}{10} \end{bmatrix} \quad d_{B5}^1 = \left(1, \frac{1}{10}, 0, -\frac{69}{10} \right)$$

$$\text{direção em } j=3: -A_{B5}^{-1} A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad d_{B5}^3 = \left(0, \frac{1}{10}, 1, -\frac{1}{10} \right)$$

$$(iv) \quad A_{B6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{B6}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \{1, 2\}$$

$$\text{direção em } j=1: -A_{B6}^{-1} A^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad d_{B6}^1 = (1, 0, 1, -7)$$

$$\text{direção em } j=2: -A_{B6}^{-1} A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d_{B6}^2 = (0, 1, -10, 1)$$

$$(3) \quad c = (-6, -9, 0, 0) \quad \text{custo reduzido: } \bar{c}_i = c_i - c_B' (A_B^{-1} A^i) \quad \theta^* = \min_{B_i | d_{B_i} < 0} \left(-\frac{x_{B_i}}{d_{B_i}} \right)$$

$$w = \theta + \theta^* d^i \quad dw = c' \theta + \theta^* \bar{c}_j$$

$$(i) \quad \theta_1 = (10, 7, 0, 0)$$

$$\bar{c}_3 = 0 - (-6, -9) \begin{pmatrix} \frac{1}{69} \\ \frac{7}{69} \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$\theta_{a,d}^* = \min \left(\frac{10}{\frac{1}{69}}, \frac{7}{\frac{7}{69}} \right) = 69$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -54$$

$$w = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 69 \begin{pmatrix} \frac{1}{69} \\ \frac{7}{69} \\ -\frac{1}{69} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta_2 \quad \checkmark$$

$$c'w + \theta_2^* \bar{c}_3 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 69 \cdot 1 = -54 \quad \checkmark$$

$$\bar{c}_4 = 0 - (-6, -9) \begin{pmatrix} \frac{10}{69} \\ \frac{1}{69} \end{pmatrix} = 0 - (-1) = 1$$

$$\theta_{a,d}^* = \min \left(\frac{10}{\frac{10}{69}}, \frac{7}{\frac{1}{69}} \right) = 69$$

$$w = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 69 \begin{pmatrix} \frac{10}{69} \\ \frac{1}{69} \\ -\frac{1}{69} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} = \theta_3 \quad \checkmark$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} = -54 \quad c'w + \theta_3^* \bar{c}_4 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 69 \cdot 1 = -54 \quad \checkmark$$

(3)

$$(ii) v_2 = (9, 0, 69, 0)$$

$$\bar{c}_2 = -9 - (-6, 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{69}{7} \end{pmatrix} = -9 - \frac{6}{7} = -\frac{69}{7} \quad \theta_{v_2, d^2}^* = \min \left(\frac{69}{\frac{69}{7}} \right) = 7$$

$$w = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{69}{7} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \checkmark$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-123}}$$

$$c'v_2 + \theta_{v_2}^* \bar{c}_2 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \left(-\frac{69}{7} \right) = \underline{\underline{-123}} \checkmark$$

$$\bar{c}_4 = 0 - (-6, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{6}{7}$$

$$\theta_{v_2, d^4}^* = \min \left(\frac{9}{\frac{1}{7}}, \frac{69}{\frac{1}{7}} \right) = 63$$

$$w = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} + 63 \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ 0 \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} = v_6 \checkmark$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$c'v_2 + \theta_{v_2}^* \bar{c}_4 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} + 63 \cdot \left(\frac{6}{7} \right) = 0 \checkmark$$

$$(iii) v_3 = (0, 6, 0, 69)$$

$$\bar{c}_1 = -6 - (-9, 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{69}{10} \end{pmatrix} = -6 - \frac{9}{10} = -\frac{69}{10} \quad \theta_{v_3, d^1}^* = \min \left(\frac{69}{\frac{69}{10}} \right) = 10$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{69}{10} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \checkmark$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-123}}$$

$$c'v_3 + \theta_{v_3}^* \bar{c}_1 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} + 10 \cdot \left(-\frac{69}{10} \right) = \underline{\underline{-123}} \checkmark$$

$$\bar{c}_3 = 0 - (-9, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \frac{9}{10}$$

$$\theta_{v_3, d^3}^* = \min \left(\frac{6}{\frac{1}{10}}, \frac{69}{\frac{1}{10}} \right) = 60$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} + 60 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} = v_6 \checkmark$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$c'v_3 + \theta_{v_3}^* \bar{c}_3 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} + 60 \cdot \frac{9}{10} = 0 \checkmark$$

$$(iv) v_6 = (0, 0, 60, 63)$$

$$\bar{c}_1 = -6 - (0, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = -6$$

$$\theta_{v_6, d^1}^* = \min \left(\frac{63}{7} \right) = 9$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \checkmark$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-54}}$$

$$c'v_6 + \theta_{v_6}^* \bar{c}_1 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} + 9 \cdot (-6) = \underline{\underline{-54}} \checkmark$$

$$\bar{c}_2 = -9 - (0, 0) \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = -9$$

$$\theta_{v_6, d^2}^* = \min \left(\frac{60}{10} \right) = 6$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} = v_3 \checkmark$$

$$c'w = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 69 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-54}}$$

$$c'v_6 + \theta_{v_6}^* \bar{c}_2 = (-6, -9, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix} + 6 \cdot (-9) = \underline{\underline{-54}} \checkmark$$

Questão 2

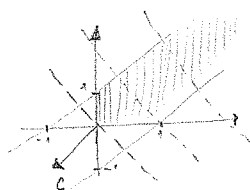
(4)

- (1) FALSO. P pode possuir um vértice mas ser ilimitado na direção em que o valor das curvas de nível de $c'x$ decresce.

Contra-exemplo: $\begin{cases} \min c'x \\ \text{s.a. } x \in P \end{cases}$

onde $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \geq b, x \geq 0\}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

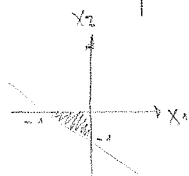
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \end{cases}$$



Há 3 vértices mas nenhum deles é vértice ótimo.

- (2) VERDADEIRO. Se $v \in P$ é vértice, $\exists n$ restrições l.i. O sistema formado por tais restrições admite, portanto, solução única. Qualquer outra solução viável w teria que satisfazer essas mesmas n restrições l.i. que v satisfaz, então $w = v$.

- (3) FALSO. Tal representação pode não existir. Contra-exemplo:



A região hachurada é um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^2$ onde $P = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \geq -1, x_1, x_2 \leq 0\}$. Porém, não é possível representá-lo na forma canônica em $\mathbb{R}^2$, visto que as coordenadas de seus pontos viáveis, com exceção de $(0, 0)$, são negativas.

- (4) VERDADEIRO.

$x=0$ é vértice pois satisfaz todas as restrições de igualdade ($Ax=0$) e possui n restrições ativas l.i. Como x possui $m+n > n$ restrições ativas, x é vértice degenerado (todas as $m+n$ restrições estão ativas neste caso). Qualquer outro vértice y associado a uma base J (n restrições ativas e l.i.) teria que ser solução única do sistema de equações correspondente a J , que é um sistema homogêneo, ou seja, admite apenas $y=0$ como solução, e $y=x$.