MAC 315 Gabarito provinha 1 entrega: 20/03/13

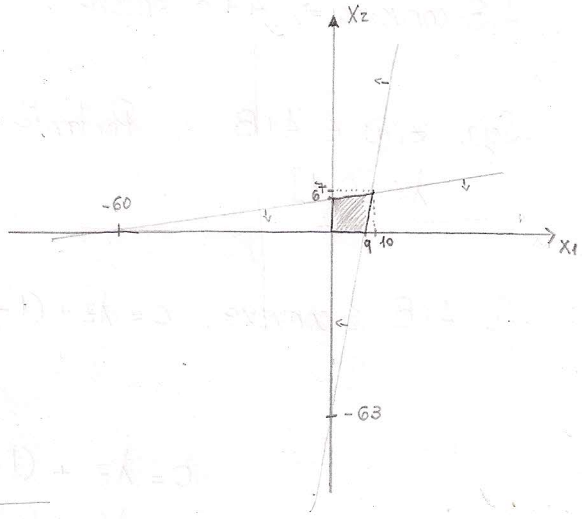
Questão 1

$i = 5$
$j = 8$

$P_{CAN} =: \{ x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b,\ x \geq 0 \}$

$A_{CAN} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix}$

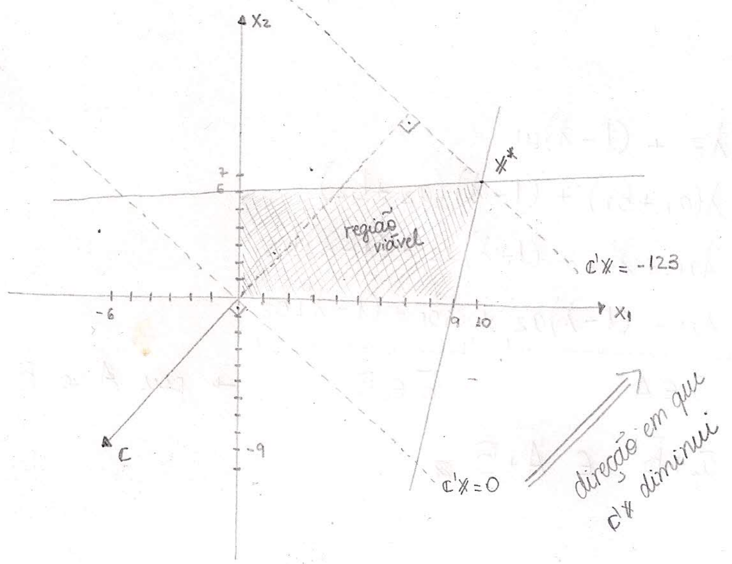
x_3, x_4 : variáveis de folga (positivas)



(1) $\begin{cases} -1x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 7x_1 - 1x_2 \leq 63 \end{cases}$

$P = \{ x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 60 \\ 63 \end{bmatrix}$



(2) min $-6x_1 - 9x_2$
s.a: $x \in P$

$c = (-6, -9)$

$x^* = (10, 7)$

Algebricamente: $\begin{cases} -1x_1 + 10x_2 \leq 60 \\ 7x_1 - 1x_2 \leq 63 \end{cases} \underset{\text{(somando as restrições)}}{\Rightarrow} 6x_1 + 9x_2 \leq 123 \Rightarrow -6x_1 - 9x_2 \geq -123.\ (*)$

Como quer-se minimizar $(-6x_1 - 9x_2)$ e $(*)$ impõe que isto seja ≥ -123, o valor ótimo no problema é o que faz $-6x_1 - 9x_2 = -123$. x^* é o único ponto da região viável que satisfaz tal equação.

(3) $x^* = (10, 7)$ é a única solução viável que satisfaz as duas igualdades nas restrições, visto que A tem colunas/linhas l.i.

Se y é solução viável $\neq x^*$, tem que valer $-y_1 + 10y_2 < 60$, ou $7y_1 - y_2 < 63$ (ou ambas).

Se somarmos as restrições, mesmo que com uma igualdade em alguma delas, teremos $-6y_1 - 9y_2 > -123 \equiv c'y > c'x^*$.

Questão 2

$A \subset \mathbb{R}^n$

$B \subset \mathbb{R}^n$

$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$

A, B convexos $\Rightarrow$ $A+B$ convexo ?

Seja $z, w \in A+B$, $\lambda \in [0,1]$. Portanto $z = a_1 + b_1$, $w = a_2 + b_2$ com $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$

Se $A+B$ é convexo, $c = \lambda z + (1-\lambda) w$ tem que pertencer a $A+B$.

$$
\begin{aligned}
c &= \lambda z + (1-\lambda) w \\
&= \lambda(a_1 + b_1) + (1-\lambda)(a_2 + b_2) \\
&= \lambda a_1 + \lambda b_1 + (1-\lambda) a_2 + (1-\lambda) b_2 \\
&= \underbrace{\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2}_{\bar{a} \in A} + \underbrace{\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2}_{\bar{b} \in B}
\end{aligned}
$$

$\to$ pois A e B são convexos

$c = \bar{a} + \bar{b} \in A+B$ ■