

# Notas de Aula

## Equações Diferenciais Parciais I/II

**Rodney Josué Biezuner**<sup>1</sup>  
Departamento de Matemática  
Instituto de Ciências Exatas (ICEx)  
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Notas de aula dos cursos *Equações Diferenciais Parciais I e II* do Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Ilustrações por Adson Martins Meira

6 de outubro de 2010

<sup>1</sup>E-mail: [rodney@mat.ufmg.br](mailto:rodney@mat.ufmg.br); homepage: <http://www.mat.ufmg.br/~rodney>.

# Sumário

<b>0</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
0.1	Leis de Conservação e Relações Constitutivas . . . . .	7
0.1.1	Lei de Conservação Unidimensional . . . . .	7
0.1.2	Lei de Conservação em Várias Dimensões . . . . .	8
0.1.3	Relações Constitutivas . . . . .	9
0.1.4	Exercícios . . . . .	11
<b>1</b>	<b>Equações de Primeira Ordem Lineares</b>	<b>12</b>
1.1	Lei de Conservação da Massa . . . . .	12
1.1.1	Equação da Continuidade: O Caso Homogêneo . . . . .	12
1.1.2	O Caso Não-Homogêneo . . . . .	14
1.2	Equações de Primeira Ordem Linear com Coeficientes Constantes . . . . .	14
1.2.1	O Caso Unidimensional . . . . .	14
1.2.2	Exercícios . . . . .	17
1.2.3	O Caso $n$ -dimensional . . . . .	17
1.2.4	O Problema Não-homogêneo . . . . .	19
1.3	Equações de Primeira Ordem Linear com Coeficientes Variáveis e o Método das Características	20
1.3.1	O Caso Unidimensional: Problema Homogêneo . . . . .	20
1.3.2	O Problema de Cauchy . . . . .	24
1.3.3	O Caso Unidimensional: Problema Não-homogêneo . . . . .	27
1.3.4	O Caso Geral . . . . .	31
1.3.5	Exercícios . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Equações de Primeira Ordem Não-Lineares</b>	<b>37</b>
2.1	Equações Quasilineares . . . . .	38
2.1.1	O Método das Características para Equações Quasilineares Bidimensionais . . . . .	38
2.1.2	Exercícios . . . . .	42
2.1.3	O Problema de Cauchy para Equações Quasilineares Bidimensionais . . . . .	42
2.1.4	Exercícios . . . . .	48
2.2	Equações Não-Lineares . . . . .	49
2.2.1	A Abordagem da Derivada Total . . . . .	49
2.2.2	A Abordagem Geométrica . . . . .	51
2.2.3	Existência de Soluções e Condições para a Unicidade . . . . .	54
2.2.4	Exercícios . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Soluções Fracas e Choques</b>	<b>60</b>
3.1	Propagação de Singularidades . . . . .	60
3.2	Condição de Salto . . . . .	64
3.2.1	Exercícios . . . . .	67
3.3	Soluções Fracas . . . . .	67

3.4	Existência e Unicidade de Soluções Fracas . . . . .	70
3.4.1	Condições para a Unicidade de Soluções: Entropia . . . . .	70
3.4.2	Unicidade de Soluções que satisfazem a Condição de Entropia . . . . .	72
3.4.3	Soluções de Viscosidade . . . . .	73
3.4.4	Exercícios . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Resolução de Equações Diferenciais Parciais através de Séries de Potências</b>	<b>77</b>
4.1	O Problema de Cauchy para Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem . . . . .	77
4.1.1	Problema de Cauchy e Curvas Características . . . . .	77
4.1.2	Classificação das Equações Quasilineares de Segunda Ordem . . . . .	79
4.2	O Problema de Cauchy para Equações Diferenciais Parciais de Ordem Superior . . . . .	81
4.2.1	Notação . . . . .	81
4.2.2	Exercícios . . . . .	82
4.2.3	O Problema de Cauchy e Superfícies Características . . . . .	82
4.3	O Teorema de Cauchy-Kowalevski . . . . .	86
4.3.1	Funções Analíticas Reais . . . . .	86
4.3.2	Exercícios . . . . .	88
4.3.3	O Teorema de Cauchy-Kowalevski . . . . .	88
4.3.4	Exercícios . . . . .	94
4.4	O Teorema de Unicidade de Holmgren . . . . .	94
4.4.1	Caracterização de Funções Analíticas . . . . .	95
4.4.2	O Teorema de Unicidade de Holmgren . . . . .	97
4.4.3	Exercícios . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Equação de Laplace</b>	<b>99</b>
5.1	Funções Harmônicas e as Propriedades do Valor Médio . . . . .	101
5.2	Princípio do Máximo . . . . .	104
5.3	Desigualdade de Harnack . . . . .	105
5.4	Solução da Equação de Laplace através de Funções de Green . . . . .	106
5.4.1	Solução Fundamental da Equação de Laplace . . . . .	106
5.4.2	Função de Green . . . . .	109
5.4.3	Solução da Equação de Poisson em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	111
5.4.4	Propriedades da Função de Green . . . . .	113
5.4.5	Solução da Equação de Laplace em Bolas – Fórmula Integral de Poisson . . . . .	114
5.4.6	Mais Propriedades das Funções Harmônicas . . . . .	117
5.5	Existência de Solução para o Problema de Dirichlet . . . . .	120
5.6	Singularidades de Funções Harmônicas . . . . .	124
5.7	Transformada de Kelvin . . . . .	128
5.8	Exercícios . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Equações Diferenciais Parciais Elípticas de Segunda Ordem</b>	<b>135</b>
6.1	Princípio do Máximo Fraco . . . . .	136
6.2	Lema de Hopf e Princípio do Máximo Forte . . . . .	138
6.3	Princípios do Máximo Especiais . . . . .	140
6.4	Simetria de Soluções: Método dos Planos Móveis . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Equação do Calor</b>	<b>149</b>
7.1	Núcleo do Calor . . . . .	150
7.2	Solução do Problema de Cauchy . . . . .	151
7.2.1	O Caso Homogêneo . . . . .	151
7.2.2	O Caso Não-Homogêneo - Princípio de Duhamel . . . . .	153
7.2.3	O Caso Geral . . . . .	155

7.3	O Princípio do Máximo e Unicidade de Soluções . . . . .	155
7.3.1	O Princípio do Máximo em Domínios Limitados . . . . .	155
7.3.2	O Princípio do Máximo em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	157
7.4	Regularidade de Soluções . . . . .	158
<b>8</b>	<b>Equação da Onda</b> . . . . .	<b>159</b>
8.1	Solução através de Médias Esféricas . . . . .	159
8.1.1	Solução para $n$ ímpar . . . . .	160
8.1.2	Solução para $n$ par – Método da Descida . . . . .	163
8.2	Solução do Problema Não-Homogêneo – Princípio de Duhamel . . . . .	165
8.3	Unicidade de Soluções através de Métodos de Energia . . . . .	166
<b>9</b>	<b>Equação de Poisson</b> . . . . .	<b>167</b>
9.1	O Potencial Newtoniano e Continuidade de Hölder . . . . .	167
9.2	O Problema de Dirichlet para a Equação de Poisson . . . . .	168
9.3	Espaços de Hölder . . . . .	173
9.4	Normas de Hölder via Funções Suavizantes . . . . .	178
9.4.1	Funções Suavizantes e Regularizações . . . . .	179
9.4.2	Regularizações e Normas de Hölder . . . . .	181
9.5	Estimativas $C^{2,\alpha}$ para Soluções da Equação de Poisson . . . . .	186
9.6	Exercícios . . . . .	189
<b>10</b>	<b>Teoria de Schauder</b> . . . . .	<b>192</b>
10.1	Estimativas a priori para Soluções de Equações Elípticas com Coeficientes Constantes . . . . .	193
10.2	Estimativas Interiores . . . . .	195
10.3	Estimativas Globais . . . . .	203
10.4	Estimativas de Schauder para Operadores Elípticos com $c \leq 0$ . . . . .	207
10.5	Método da Continuidade . . . . .	209
10.6	O Problema de Dirichlet para Operadores Elípticos com $c \leq 0$ . . . . .	210
10.7	Exercícios . . . . .	212
<b>11</b>	<b>Espaços de Sobolev</b> . . . . .	<b>213</b>
11.1	O Princípio de Dirichlet . . . . .	213
11.2	A Derivada Fraca . . . . .	215
11.2.1	Definição . . . . .	215
11.2.2	Um Teorema de Aproximação para Funções Fracamente Diferenciáveis . . . . .	217
11.2.3	Caracterização das Funções Fracamente Diferenciáveis . . . . .	218
11.2.4	Apêndice: Funções Absolutamente Contínuas . . . . .	220
11.2.5	Regra da Cadeia . . . . .	221
11.3	Espaços de Sobolev em Abertos de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	223
11.3.1	Definição e Propriedades Básicas . . . . .	223
11.3.2	Teoremas de Densidade . . . . .	225
11.3.3	Os espaços $H^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	227
11.3.4	Caracterização dos Espaços $W_0^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	228
11.3.5	Extensões de Funções em Espaços de Sobolev . . . . .	230
11.4	Teoremas de Imersão . . . . .	232
11.4.1	Teoremas de Imersão Contínua: O Caso $k < n/p$ . . . . .	232
11.4.2	Teoremas de Imersão Contínua: O Caso $k = n/p$ . . . . .	237
11.4.3	Teoremas de Imersão Contínua: O Caso $k > n/p$ . . . . .	238
11.4.4	Teoremas de Imersão Compacta . . . . .	246
11.5	Desigualdades de Poincaré e Desigualdades de Interpolação . . . . .	250

11.6	O dual de $W^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	255
11.7	Traços . . . . .	258
11.8	Os Espaços $D^{k,p}$ . . . . .	260
11.9	Exercícios . . . . .	270
<b>12</b>	<b>Métodos Variacionais e Teoria da Regularidade</b>	<b>272</b>
12.1	Existência de Soluções Fracas para a Equação de Poisson . . . . .	272
12.2	Teorema de Representação de Riesz, o Teorema de Lax-Milgram e a Alternativa de Fredholm	275
12.3	Existência de Soluções Fracas para Equações Lineares Elípticas na Forma Divergente . . . . .	276
12.3.1	Definição de Solução Fraca . . . . .	276
12.3.2	Existência e Unicidade de Solução Fraca através do Teorema de Lax-Milgram . . . . .	278
12.3.3	Princípio do Máximo para Soluções Fracas . . . . .	282
12.3.4	Existência e Unicidade de Solução Fraca através da Alternativa de Fredholm . . . . .	284
12.4	Regularidade de Soluções Fracas . . . . .	286
12.4.1	Quocientes de Diferença . . . . .	286
12.4.2	Regularidade Interior . . . . .	288
12.4.3	Regularidade Global . . . . .	292
12.5	Problema de Autovalor . . . . .	293
12.5.1	O Problema de Autovalor para o Laplaciano . . . . .	293
12.5.2	O Problema de Autovalor para Operadores Elípticos Auto-Adjuntos . . . . .	297
12.5.3	Autovalor Principal . . . . .	299
12.6	Exercícios . . . . .	299
<b>13</b>	<b>Estimativas <math>L^p</math></b>	<b>301</b>
13.1	Estimativas $L^p$ para a Equação de Poisson: Desigualdade de Calderon-Zygmund . . . . .	301
13.2	Estimativas $L^p$ para Equações Elípticas . . . . .	302
13.3	Existência de Soluções Fortes em $W^{2,p}$ . . . . .	303

# Capítulo 0

## Introdução

Uma **equação diferencial parcial** (EDP) é uma equação matemática envolvendo derivadas parciais, ou seja, uma expressão da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right) = 0 \quad (1)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  pertence a algum domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função com derivadas parciais até a ordem  $m$ . Uma **solução** para uma equação diferencial parcial é uma função que satisfaz a equação. Dizemos que uma equação diferencial parcial tem **ordem**  $m$  quando a derivada parcial de ordem mais alta tem ordem  $m$ . Uma das distinções mais fundamentais entre equações diferenciais parciais é aquela entre equações *lineares* e *não lineares*:

**0.1 Definição.** Dizemos que a EDP (1) é **linear** se  $F$  é linear em relação a  $u$  e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a EDP é **não linear**.

Dependendo do tipo da não linearidade, as EDPs não lineares são classificadas da seguinte forma:

1. *Equações semilineares*: quando  $F$  é não linear somente com relação a  $u$ , mas é linear com relação a todas as suas derivadas parciais.
2. *Equações quasilineares*: quando  $F$  é linear somente com relação às derivadas parciais da ordem da equação.
3. *Equações totalmente não lineares*: quando  $F$  é não linear com relação às derivadas parciais da ordem da equação.

Na tabela a seguir, alguns dos exemplos mais importantes de EDPs e sua classificação:

Nome	Equação	Tipo
<i>Equação do transporte</i>	$u_t + u_x = 0$	primeira ordem, linear
<i>Equação de Burgers (inviscida)</i>	$u_t + uu_x = 0$	primeira ordem, quasilinear
<i>Equação Eikonal</i>	$ \nabla u  = 1$	primeira ordem, totalmente não linear
<i>Equação de Laplace</i>	$\Delta u = 0$	segunda ordem, linear
<i>Equação de Poisson</i>	$\Delta u = f(x)$	segunda ordem, linear
<i>Equação de Helmholtz</i>	$-\Delta u = \lambda u$	segunda ordem, linear
<i>Equação da difusão (ou do calor)</i>	$u_t = \Delta u$	segunda ordem, linear
<i>Equação da onda</i>	$u_{tt} = \Delta u$	segunda ordem, linear
<i>Equação de Schrödinger</i>	$iu_t + \Delta u = V(x)u$	segunda ordem, linear
<i>Equação de Klein-Gordon</i>	$u_{tt} = \Delta u - m^2u$	segunda ordem, linear
<i>Equação do telégrafo</i>	$u_{tt} + 2du_t = u_{xx}$	segunda ordem, linear
<i>Equação de Poisson não linear</i>	$\Delta u = f(u)$	segunda ordem, semilinear
<i>Equação de reação-difusão</i>	$u_t = \Delta u + f(u)$	segunda ordem, semilinear
<i>Equação de Yamabe</i>	$\Delta u = K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}}$	segunda ordem, semilinear
<i>Equação de Burgers (viscosa)</i>	$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$	segunda ordem, quasilinear
<i>Equação do <math>p</math>-Laplaciano</i>	$\operatorname{div}( \nabla u ^{p-2} \nabla u) = 0$	segunda ordem, quasilinear
<i>Equação do meio poroso</i>	$u_t = \operatorname{div}(u^\gamma \nabla u)$	segunda ordem, quasilinear
<i>Equação da superfície mínima</i>	$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 +  \nabla u ^2}} \right) = 0$	segunda ordem, quasilinear
<i>Equação de Monge-Ampère</i>	$\det(D^2u) = f$	segunda ordem, totalmente não linear
<i>Equação de Airy</i>	$u_{tt} + u_{xxx} = 0$	terceira ordem, linear
<i>Equação de Korteweg-deVries (KdV)</i>	$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$	terceira ordem, quasilinear
<i>Equação biharmônica</i>	$\Delta^2 u = 0$	quarta ordem, linear
<i>Equação de vibração da chapa</i>	$u_{tt} = \Delta^2 u$	quarta ordem, linear

A maioria das equações diferenciais parciais surgem de modelos físicos. Uma outra classe importante surge de problemas em geometria diferencial. Nestas notas, cada equação que estudarmos será precedida pela introdução de um modelo físico. O modelo físico, além de prover uma motivação para o estudo de determinada equação (por que estudar exatamente esta equação diferencial parcial, já que existem infinitas outras possibilidades matemáticas?), sugere as propriedades matemáticas que as soluções desta equação devem ter e, muitas vezes, métodos para resolvê-la ou até mesmo a expressão exata da solução.

Como exemplos de áreas que são altamente dependentes do estudo de EDPs, destacamos as seguintes: acústica, aerodinâmica, elasticidade, eletrodinâmica, dinâmica dos fluidos, geofísica (propagação de ondas

sísmicas), transferência de calor, meteorologia, oceanografia, ótica, prospecção de petróleo, física do plasma, mecânica quântica, relatividade, circulação de fluidos e formação de tecidos e padrões dentro de organismos vivos e crescimento de tumores.

## 0.1 Leis de Conservação e Relações Constitutivas

### 0.1.1 Lei de Conservação Unidimensional

Muitas das equações diferenciais parciais que aparecem nas ciências naturais são obtidas através de *leis de conservação*.

Leis de conservação são essencialmente leis de balanceamento, expressando o fato de que alguma substância é balanceada (ou seja, conservada). Aqui, o termo *substância* pode indicar uma substância realmente material, ou até mesmo um conceito abstrato, tal como energia ou uma população de animais. Por exemplo, a primeira lei da termodinâmica é a lei de conservação da energia: a variação de energia interna de um sistema é igual ao calor total adicionado ao sistema mais o trabalho realizado sobre o sistema. Como outro exemplo, considere um fluido escoando em alguma região do espaço, consistindo de substâncias sofrendo reações químicas: para cada substância química individual, a taxa de variação da quantidade total da substância na região é igual à taxa com que a substância flui para dentro da região, menos a taxa com que ela flui para fora da região, mais a taxa com que ela é criada, ou consumida, pelas reações químicas. Como último exemplo, a taxa de variação de uma dada população de animais em uma região é igual à taxa de nascimentos, menos a taxa de mortes, mais a taxa de migração para dentro ou fora da região.

Matematicamente, leis de conservação traduzem-se em *equações integrais*, de onde podem ser deduzidas *equações diferenciais*, na maior parte dos casos. Estas equações descrevem como o processo evolui com o tempo. Por este motivo, elas são também chamadas de **equações de evolução**. Vamos examinar primeiro o caso unidimensional.

Seja  $u = u(x, t)$  a densidade ou concentração de alguma substância, por unidade de volume, que depende apenas de uma variável espacial  $x \in \mathbb{R}$  e do tempo  $t > 0$ . Novamente enfatizamos que a substância cuja densidade estamos medindo pode ser massa, momento, energia, população, ou qualquer outra coisa, material ou abstrata. Por exemplo, no caso da equação do calor, a temperatura  $u$  é uma medida da *densidade de energia térmica*. De fato, se  $e(x, t)$  denota a densidade de energia térmica, isto é, a quantidade de energia térmica por unidade de volume, então a densidade de energia térmica e a temperatura estão relacionadas através da equação

$$e(x, t) = c(x)\rho(x)u(x, t),$$

cujos significado é: a energia térmica por unidade de volume é igual à energia térmica por unidade de massa por unidade de temperatura (i.e., o calor específico), vezes a temperatura, vezes a densidade volumétrica de massa.

Imaginamos que a substância está distribuída em um tubo uniforme com seção transversal de área constante  $A$ . Por hipótese,  $u$  é constante em cada seção transversal do tubo, variando apenas na direção  $x$ . Considere um segmento arbitrário do tubo, entre as seções transversais localizadas em  $x = a$  e em  $x = b$ . Chamamos este segmento de **volume de controle**. A quantidade total da substância dentro do volume de controle no instante de tempo  $t$  é

Quantidade total da substância dentro do volume de controle	$= \int_a^b u(x, t)A dx.$
--	---------------------------

Assuma agora que existe movimento da substância através do tubo na direção axial. Definimos o fluxo  $\phi(x, t)$  da substância no tempo  $t$  como sendo a quantidade da substância fluindo através da seção transversal em  $x$  no tempo  $t$  por unidade de área, por unidade de tempo. Assim as dimensões de  $\phi$  são  $[\phi] = \text{quantidade da substância} / (\text{área} \times \text{tempo})$ . Por convenção,  $\phi$  será positivo se a substância estiver se movendo na direção positiva do eixo  $x$ , e negativo se ela estiver se movendo na direção negativa do eixo  $x$ . Portanto, no tempo  $t$ ,



a quantidade líquida de substância permanecendo no volume de controle será a diferença entre a quantidade da substância entrando em  $x = a$  e a quantidade da substância saindo em  $x = b$ :

$$\text{Taxa de transferência líquida da substância para dentro do volume de controle} = \phi(a, t)A - \phi(b, t)A.$$

A substância pode ser criada ou destruída dentro do volume de controle por uma fonte interna ou externa. A taxa de criação ou destruição da substância, que chamaremos de *termo fonte* e denotaremos por  $f(x, t, u)$ , tem dimensões  $[f] = \text{quantidade da substância} / (\text{volume} \times \text{tempo})$ , tendo sinal positivo se a substância é criada dentro do volume de controle e negativa se a substância for destruída dentro do volume de controle. Observe que ela pode depender da própria quantidade da substância disponível, medida pela densidade  $u$ . A taxa de criação ou destruição da substância dentro do volume de controle é então dada por

$$\text{Taxa de criação da substância dentro do volume de controle} = \int_a^b f(x, t, u)A \, dx.$$

A **lei de conservação** para a substância pode ser formulada da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} \text{Taxa de variação da quantidade de substância dentro do volume de controle} \\ \text{Taxa de transferência líquida de substância para dentro do volume de controle através de sua fronteira} \\ \text{Taxa de criação da substância dentro do volume de controle} \end{array} = \quad +$$

ou, em termos matemáticos, após cancelar o termo comum  $A$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) \, dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b f(x, t, u) \, dx. \quad (2)$$

Esta é a lei de conservação na *forma integral*, valendo mesmo se  $u$ ,  $\phi$  ou  $f$  não forem funções diferenciáveis (o que pode ocorrer em certos fenômenos físicos, como por exemplo naqueles que envolvem ondas de choque ou outros tipos de descontinuidade). Se estas funções forem continuamente diferenciáveis, podemos derivar sob o sinal de integração na primeira integral

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) \, dx = \int_a^b u_t(x, t) \, dx$$

e usar o Teorema Fundamental do Cálculo para escrever

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = - \int_a^b \phi_x(x, t) \, dx,$$

obtendo a equação diferencial parcial

$$u_t + \phi_x = f(x, t, u) \quad (3)$$

que é a lei de conservação na *forma diferencial*.

### 0.1.2 Lei de Conservação em Várias Dimensões

Vamos formular a lei de conservação nas formas integral e diferencial para os espaços  $\mathbb{R}^n$ . Considere um volume de controle  $V$  em  $\mathbb{R}^n$ , em que a densidade ou concentração  $u = u(\mathbf{x}, t)$  de alguma substância por unidade de volume depende de  $n$  variáveis espaciais  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e do tempo  $t > 0$ . Temos

$$\text{Quantidade total da substância dentro do volume de controle} = \int_V u(\mathbf{x}, t) \, dV$$

e, se  $f(\mathbf{x}, t, u)$  denota o termo fonte,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Taxa de criação da substância} \\ \text{dentro do volume de controle} \end{array} = \int_V f(\mathbf{x}, t, u) dV.}$$

Em  $n$  dimensões, o fluxo pode ser em qualquer direção, logo ele é uma grandeza vetorial que denotaremos por  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . Se  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$  denota o vetor unitário normal apontando para fora da região  $V$ , a taxa de transferência líquida da substância para fora do volume de controle através de sua fronteira  $\partial V$  é dada por

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Taxa de transferência líquida da substância} \\ \text{para fora do volume de controle} \end{array} = \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) dS.}$$

A lei de conservação é, portanto,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V u(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) dS + \int_V f(\mathbf{x}, t, u) dV.} \quad (4)$$

Se  $u$ ,  $\phi$  e  $f$  forem todas de classe  $C^1$  (assim como a região  $V$ ), podemos derivar sob o sinal de integração e usar o Teorema da Divergência

$$\int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) dS = \int_V \operatorname{div} \phi(\mathbf{x}, t) dV,$$

para obter a lei de conservação em forma diferencial

$$\boxed{u_t + \operatorname{div} \phi = f(\mathbf{x}, t, u).} \quad (5)$$

### 0.1.3 Relações Constitutivas

A lei de conservação na forma diferencial é uma equação diferencial parcial em duas incógnitas,  $u$  e  $\phi$ . Precisamos, portanto, de uma segunda equação para obter um sistema bem determinado. A equação adicional é freqüentemente baseada nas propriedades físicas do meio, as quais freqüentemente decorrem de observações empíricas. Tais equações são chamadas de **relações constitutivas** ou **equações de estado**.

**Exemplo 0.1.** (Equação do Calor) No caso da equação do calor, a relação constitutiva é a lei de Fourier:

$$\phi(x, t) = -ku_x(x, t).$$

Em dimensões 2 e 3, a lei de Fourier assume a forma

$$\phi(x, t) = -k\nabla u(x, t). \quad (6)$$

De fato, para materiais isotrópicos (isto é, materiais em que não existem direções preferenciais) verifica-se experimentalmente que o calor flui de pontos quentes para pontos frios na direção em que a diferença de temperatura é a maior. O fluxo de calor é proporcional à taxa de variação da temperatura nesta direção, com a constante de proporcionalidade  $k$  sendo chamada a *condutividade térmica* do meio. Como sabemos, a direção onde uma função cresce mais rápido é exatamente aquela dada pelo vetor gradiente da função, e o módulo do gradiente fornece a magnitude da taxa de variação da função nesta direção. O sinal negativo ocorre, como no caso unidimensional, porque o vetor gradiente aponta na direção de crescimento da temperatura, enquanto que o fluxo do calor se dá na direção oposta (da temperatura maior para a temperatura menor). O fluxo do calor em uma região bi ou tridimensional

pode ser facilmente visualizado quando se lembra que o gradiente de uma função é perpendicular às superfícies de nível da função. No caso em que a função é a temperatura, as superfícies de nível são chamadas *superfícies isotérmicas* ou, simplesmente, *isotermas*. Assim, o calor flui das isotermas mais quentes para as isotermas mais frias, e em cada ponto da isoterma perpendicularmente à isoterma. Em outras palavras, as linhas de corrente do fluxo de calor correspondem às linhas de fluxo do campo gradiente da temperatura.

Portanto, a equação do calor em  $\mathbb{R}^n$  com termo fonte independente de  $u$  tem a forma

$$u_t = K\Delta u + f(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

onde  $\Delta u$  denota o laplaciano de  $u$ :

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \quad (8)$$

A constante  $K = \frac{k}{c\rho}$  é chamada a *difusividade térmica* do material.  $\square$

**Exemplo 0.2.** (Equação da Difusão) Não apenas na difusão do calor, mas em muitos outros processos físicos observa-se que a substância flui a uma taxa diretamente proporcional ao gradiente de densidade, de regiões de maior densidade para regiões de menor densidade. Esta relação geral é chamada de *lei de Fick*:

$$\phi(x, t) = -D\nabla u(x, t), \quad (9)$$

onde  $D$  é a *constante de difusão*. Se o termo fonte é independente de  $u$ , obtemos a **equação da difusão**

$$u_t = D\Delta u + f(\mathbf{x}, t). \quad (10)$$

O nome *difusão* vem do fato de que a substância difunde-se para regiões adjacentes por causa de gradientes (i.e., diferenças) de concentração, e não porque é transportada pela corrente (i.e., não através de *convecção*). Por este motivo, o termo  $D\Delta u$  é chamado de **termo difusivo**.

Além do calor, exemplos de outras substâncias que se comportam assim são substâncias químicas dissolvidas em algum fluido (neste caso,  $u$  representa a *concentração química*) e até mesmo populações de insetos. Além de ser confirmada através de observações empíricas, a lei de Fick que governa estes e vários outros fenômenos físicos e biológicos pode ser justificada teoricamente através de argumentos baseados em modelos probabilísticos e caminhos aleatórios.  $\square$

**Exemplo 0.3.** Quando o termo fonte não é independente de  $u$ , processos governados pela lei de conservação e pela lei de Fick são regidos pela chamada **equação da reação-difusão**

$$u_t = \Delta u + f(\mathbf{x}, t, u). \quad (11)$$

O termo fonte, também chamado *termo de reação*, pode ser não linear em  $u$ . Exemplos importantes aparecem na teoria de combustão e em biologia.  $\square$

**Exemplo 0.4.** (Equação da Continuidade) Se  $\rho$  denota a densidade de um fluido e  $\mathbf{V}$  é o campo de velocidades de escoamento do fluido, o *fluxo de massa* (taxa de transferência de massa, medida em quantidade de massa / (área)×(tempo)) é dado por

$$\phi = \rho\mathbf{V}.$$

Note que a densidade  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  de um fluido movendo-se no espaço, assim como o seu campo de velocidades  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ , são funções da posição no espaço e do instante de tempo considerado. A lei de conservação de massa implica então a **equação da continuidade**

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0.$$

A equação da continuidade é a primeira das **equações de Navier-Stokes** que governam a dinâmica dos fluidos.  $\square$

**Exemplo 0.5.** (Equação da Advecção) Quando a velocidade do fluido é constante, o fluxo de massa é dado por uma relação linear simples. No caso unidimensional (por exemplo, quando o fluido está restrito a um tubo ou cano), o fluxo é

$$\phi = cu, \quad (12)$$

onde  $c$  é a velocidade do fluido e denotamos a densidade por  $u$ . Neste caso, a equação da continuidade torna-se

$$u_t + cu_x = 0. \quad (13)$$

Esta é a chamada **equação da advecção** ou **equação do transporte**. Advecção refere-se ao movimento horizontal de uma propriedade física. Esta equação de primeira ordem linear é o modelo mais simples de convecção.  $\square$

#### 0.1.4 Exercícios

**Exercício 0.1.** Identifique as relações constitutivas para as seguintes leis de conservação escritas em forma diferencial:

1. *Equação de Burgers:*

$$u_t + u u_x = 0.$$

2. *Equação de Korteweg-deVries (KdV):*

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0.$$

3. *Equação dos meios porosos:*

$$u_t + (u^\gamma)_{xx} = 0.$$

# Capítulo 1

## Equações de Primeira Ordem Lineares

Conforme já observamos na Introdução, a maioria das equações diferenciais parciais surgem de modelos físicos e cada equação que estudarmos nestas notas será precedida pela introdução de um modelo físico. O modelo físico, além de prover uma motivação para o estudo de determinada equação (por que estudar tal equação diferencial parcial, dentre as infinitas possibilidades matemáticas, ou qual a importância relativa desta equação em relação às outras?), sugere as propriedades matemáticas que as soluções desta equação devem ter e, muitas vezes, métodos para resolvê-la ou até mesmo a expressão exata da solução.

### 1.1 Lei de Conservação da Massa

Como vimos na Introdução, equações diferenciais parciais frequentemente resultam de (ou são equivalentes a) *leis de conservação*. Estas são equações que expressam o fato de que a quantidade de uma certa grandeza física é preservada durante um processo. Estas leis de conservação são comumente expressas através de equações integrais; a equação diferencial parcial derivada da lei de conservação pode ser vista como uma formulação equivalente da lei de conservação em forma diferencial. Como nosso primeiro modelo para uma equação de primeira ordem, vamos considerar a *equação da continuidade*, mostrando em primeiro lugar como ela é derivada da (ou expressa a) *lei de conservação da massa*.

#### 1.1.1 Equação da Continuidade: O Caso Homogêneo

A taxa de transferência da massa de um fluido especificado ou de uma substância química dissolvida em um fluido ao longo de uma certa direção fixa é chamada o **fluxo de massa**. É a quantidade do fluido ou da substância transportada por unidade de tempo; nas unidades padrão do SI, ele é medido em kg/s. O fluxo de massa é portanto uma grandeza vetorial. A **densidade do fluxo de massa**  $\phi$  é a taxa de transferência de massa por unidade de área, i.e., a quantidade de fluido ou substância transportada por unidade de área por unidade de tempo (kg/m<sup>2</sup>s no SI). Às vezes, a densidade de fluxo de massa é chamada também de fluxo de massa. Se  $\rho$  denota a densidade do fluido ou a concentração de uma substância química dissolvida no fluido e  $\mathbf{V}$  é o campo de velocidades de escoamento do fluido, o fluxo de massa é dado por

$$\phi = \rho \mathbf{V}.$$

(Note que no caso de uma substância dissolvida em um fluido estamos ignorando os efeitos da *difusão*. Estamos portanto assumindo que o transporte da substância no espaço é totalmente devido ao movimento do fluido, isto é, à *convecção*.) A densidade  $\rho$  de um fluido movendo-se no espaço, assim como o seu campo de velocidades  $\mathbf{V}$ , são funções da posição no espaço e do instante de tempo considerado:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$  no modelo físico) e  $t \in \mathbb{R}$ .

A **lei de conservação da massa** pode ser expressa matematicamente em forma integral da seguinte forma. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  uma região do espaço fixada por onde o fluido escoar;  $\Omega$  é chamado um **volume de controle**. Aplicado a este volume de controle, o princípio físico fundamental de que a massa é conservada significa que

$$\begin{array}{l} \text{Taxa de transferência total de massa} \\ \text{para fora do volume de controle} \\ \text{através de sua fronteira} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Taxa de variação (decréscimo) da massa} \\ \text{dentro do volume de controle} \end{array}$$

O lado esquerdo desta identidade é dado pela integral do fluxo através da fronteira  $\partial\Omega$  do volume de controle (integral da taxa de transferência de massa por unidade de área através da superfície que envolve o volume de controle), orientada com o vetor normal unitário apontando para fora:

$$-\int_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S} = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} d\mathbf{S}.$$

O sinal negativo deve-se ao fato de que quando o fluxo é para fora de uma região, a integral é positiva (devido à convenção de se orientar superfícies fechadas com o vetor normal apontando para fora), mas a massa de fluido dentro do volume de controle está decrescendo. O lado direito é dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV,$$

pois  $m(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV$  é a massa presente no volume de controle  $\Omega$  no instante de tempo  $t$ . Portanto, a expressão matemática para a lei de conservação da massa em um volume de controle fixo  $\Omega$  é a equação integral

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} = 0. \quad (1.1)$$

O teorema da divergência permite obter uma equação diferencial a partir desta equação integral. Ele diz que

$$\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} = \int_{\Omega} \text{div}(\rho \mathbf{V}).$$

Substituindo esta expressão na lei de conservação de massa, e passando o operador de derivação para dentro da integral, obtemos

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) \right] = 0.$$

Como a lei de conservação da massa é válida para qualquer volume de controle  $\Omega$  arbitrário, segue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (1.2)$$

Esta é a **equação da continuidade**. Ela é equivalente à lei de conservação da massa aplicada ao escoamento de fluidos: elas expressam o mesmo fenômeno em formulações diferentes, uma integral, a outra diferencial. Observe que em princípio ela é uma equação diferencial parcial de primeira ordem não linear envolvendo as incógnitas  $\rho$  e  $\mathbf{V}$ . Como a velocidade  $\mathbf{V}$  é uma grandeza vetorial, no espaço tridimensional ela na realidade corresponde a 3 incógnitas; logo a equação da continuidade envolve 4 incógnitas. Ela é a primeira das **equações de Navier-Stokes** que regem a dinâmica dos fluidos, um sistema de três equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem.

Uma das vantagens da formulação integral é que ela é válida mesmo quando as funções presentes no integrando não são diferenciáveis. Esta vantagem é crucial no estudo de fenômenos físicos em que as soluções são descontínuas, por exemplo na presença de ondas de choque, como veremos.

### 1.1.2 O Caso Não-Homogêneo

Existe a possibilidade de que massa seja criada ou destruída através de alguma fonte interna ou externa (por exemplo, através de reações químicas no caso de uma substância dissolvida em um fluido, ou através de processos nucleares de fusão ou fissão no caso de um fluido de partículas radiativas ou íons dentro de uma estrela). Neste caso, o princípio físico de conservação da massa precisa ser reescrito como

$$\begin{array}{rcc} \text{Taxa de transferência total de massa} & \text{Taxa de criação ou destruição} & \text{Taxa de variação (decréscimo)} \\ \text{para fora do volume de controle} & \text{de massa} & \text{de massa} \\ \text{através de sua fronteira} & \text{dentro do volume de controle} & \text{dentro do volume de controle} \end{array} \quad + \quad =$$

Se  $F(\mathbf{x}, t)$  é a taxa de criação ou destruição de massa (kg/s, no sistema SI; a taxa tem sinal negativo se ocorre destruição de massa), a lei de conservação de massa torna-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} = \int_{\Omega} F. \quad (1.3)$$

e a correspondente equação diferencial, através do teorema da divergência, é a equação não-homogênea

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = F. \quad (1.4)$$

Neste capítulo, em que estudaremos apenas equações de primeira ordem lineares, assumiremos que o campo de velocidades  $\mathbf{V}$  é uma função dada, independente de  $\rho$ .

## 1.2 Equações de Primeira Ordem Linear com Coeficientes Constantes

Se o campo de velocidades do fluido é um campo vetorial constante, digamos  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{b}$  é um vetor em  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{b}$  é o vetor velocidade do fluido), e não existe uma fonte de criação ou destruição de massa, isto é,  $F \equiv 0$ , a equação da continuidade torna-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

ou, em notação mais compacta,

$$\rho_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b} \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.5)$$

Esta equação é chamada a **equação do transporte** ou **equação da advecção**, por motivos que ficarão claros na subseção a seguir (*advecção*, no sentido mais estrito da palavra, significa a transmissão de calor através do movimento horizontal de uma massa de ar). Ela é uma equação de primeira ordem linear com coeficientes constantes.

### 1.2.1 O Caso Unidimensional

No caso unidimensional, imaginando um fluido restrito a movimento em apenas uma dimensão (um fluido contido dentro de um tubo ou cano muito longo, por exemplo), a equação da continuidade torna-se

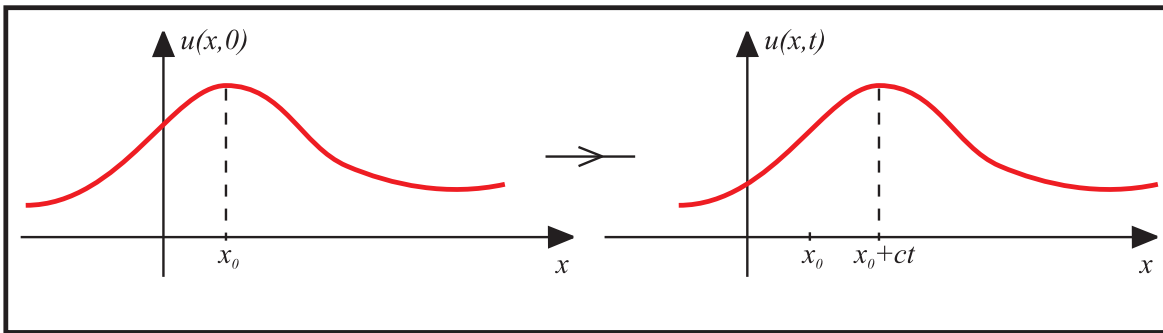
$$\rho_t(x, t) + c \rho_x(x, t) = 0,$$

onde  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e  $c$  é a velocidade escalar do fluido: convencionamos  $c > 0$  se o fluido está movendo-se para a direita e  $c < 0$  se o fluido está movendo-se para a esquerda. Este é um modelo para a equação

diferencial parcial mais simples (substituiremos  $\rho$  por  $u$ , por conveniência da notação e, principalmente, para distinguir o modelo físico da equação matemática):

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Uma solução para esta equação é uma função  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Voltando ao modelo físico, onde  $u$  representa a densidade de massa  $\rho$ , fica claro qual deve ser o aspecto geral da solução desta equação. Dada uma distribuição de massa  $\rho(x, t_0)$  em um certo instante de tempo  $t_0$ , a distribuição de densidade de massa  $\rho(x, t_1)$  no instante de tempo posterior  $t_1$  será exatamente a distribuição de densidade de massa anterior deslocada espacialmente pela distância percorrida pelo fluido no intervalo de tempo  $\Delta t = t_1 - t_0$ . Dado que o fluido se move com velocidade constante  $c$ , esta distância é  $c\Delta t$ . Portanto, devemos ter  $\rho(x, t_1) = \rho(x - c(t_1 - t_0), t_0)$ . A distribuição de densidade  $\rho(x, t)$  é *transportada* horizontalmente pelo movimento do fluido, daí o nome *equação do transporte* ou *equação da advecção*. Esta expectativa intuitiva é demonstrada rigorosamente no teorema a seguir. Nele vemos que a equação do transporte linear com coeficientes constantes possui uma **solução geral**, o que não é usual para equações diferenciais parciais, mesmo lineares. Esta solução geral permite resolver o problema de existência e unicidade para o problema de valor inicial da equação do transporte.



**Figura 1.1.** A solução da equação do transporte  $u_t + cu_x = 0$  é uma onda viajante para a direita com velocidade  $c$ .

**1.1 Teorema.** A solução geral da equação do transporte

$$u_t + cu_x = 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

é

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (1.7)$$

para alguma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

**Prova.** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então é fácil ver que

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

é uma solução para a equação do transporte. De fato, pela regra da cadeia,

$$u_t(x, t) = f'(x - ct) \cdot \frac{d}{dt}(x - ct) = -cf'(x - ct) = -cu_x(x, t).$$

Reciprocamente, se  $u(x, t)$  é uma solução para a equação do transporte, podemos obter uma função diferenciável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u(x, t) = f(x - ct)$ . Com efeito, suponha que  $u(x, t)$  é uma solução para a equação do transporte. Fixe um ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e defina uma função  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v(s) = u(x_0 + cs, t_0 + s).$$



Observe que  $v$  nada mais é que  $u$  ao longo da reta iniciando em  $(x_0, t_0)$  e com inclinação  $(c, 1)$ ; no plano  $tx$ , estas são as retas de inclinação  $c$ , ou seja, as retas definidas pela equação  $x(t) = c(t - t_0) + x_0$ . Pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + cs, t_0 + s) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(x_0 + cs) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + cs, t_0 + s) \frac{\partial}{\partial s}(t_0 + s) \\ &= cu_x(x_0 + cs, t_0 + s) + u_t(x_0 + cs, t_0 + s) = 0. \end{aligned}$$

Isso significa que  $v$  é uma função constante, isto é,  $u$  é constante ao longo de tais retas. Defina uma função diferenciável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = u(x, 0).$$

Segue que para cada ponto  $(x_0, t_0)$  temos

$$f(x_0 - ct_0) = u(x_0 - ct_0, 0) = v(-t_0) = v(0) = u(x_0, t_0).$$

■

**1.2 Corolário.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.8)$$

*possui a solução única*

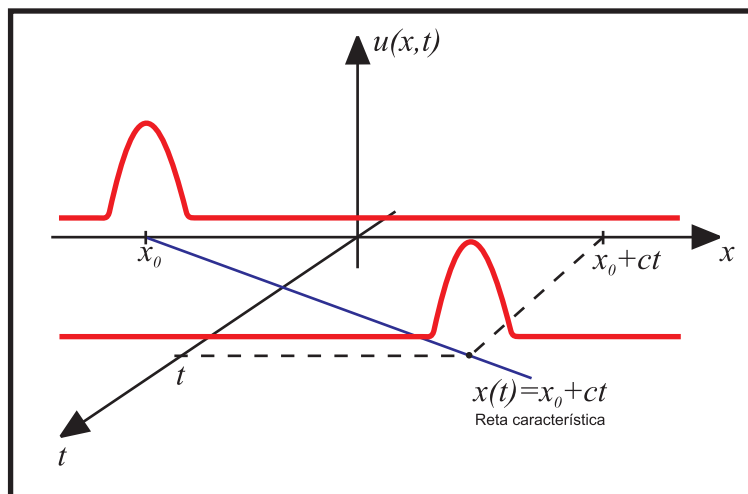
$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (1.9)$$

Podemos portanto enxergar a solução do problema inicial como o gráfico de  $f$  movendo-se com velocidade  $c$  para a direita, se  $c > 0$ , ou para a esquerda, se  $c < 0$ . Assim, a solução da equação do transporte possui o comportamento de uma *onda viajante*.

Na demonstração do Teorema 1.1, vimos que  $u$  é constante ao longo das retas

$$x - ct = \text{constante}. \quad (1.10)$$

Portanto, se soubermos o valor de  $u$  em qualquer ponto desta reta, saberemos o valor de  $u$  em todos os pontos da reta. Expressamos este fato através de uma analogia física, dizendo que *a informação sobre o valor de  $u$  em um ponto da reta é transmitida para todos os pontos da reta*; se o parâmetro  $t$  é interpretado como representando o tempo decorrido, então podemos dizer que a informação é transmitida com velocidade  $c$ . Esta reta é chamada uma *reta característica* da equação do transporte. Ela recebe este nome por ser característica da equação, independente da condição inicial.

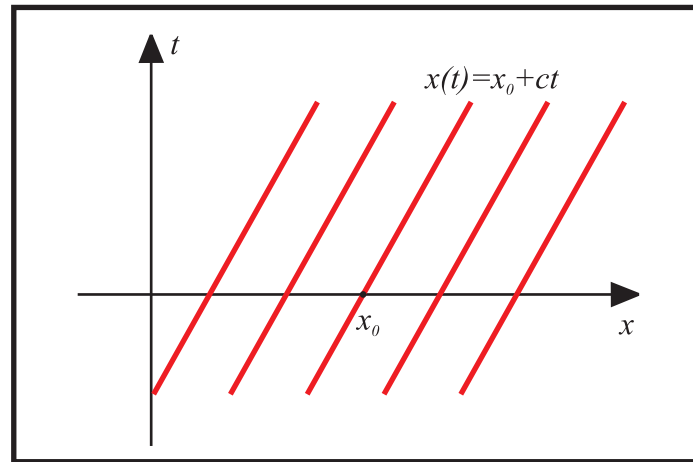


**Figura 1.2.** Uma solução  $u$  da equação do transporte é constante ao longo de uma reta característica.

**1.3 Definição.** As retas

$$x(t) = c(t - t_0) + x_0$$

são chamadas as **retas características** da equação do transporte  $u_t + cu_x = 0$ .



**Figura 1.3.** Retas características da equação do transporte  $u_t + cu_x = 0$ .

Observe que faz sentido atribuir ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

uma solução mesmo se a condição inicial  $f$  não for de classe  $C^1$ . Isto é claro se  $f$  for diferenciável, mas mesmo se  $f$  é apenas contínua, ainda assim  $u(x, t) = f(x - ct)$  deve ser a solução do problema (imagine  $f$  como representando a concentração inicial de uma substância química em um fluido, incapaz de se difundir neste fluido: esta concentração inicial, mesmo que apenas contínua, é deslocada, para a direita ou para a esquerda, com o movimento do fluido). Na verdade, isto faz sentido mesmo se  $f$  for descontínua (as descontinuidades são igualmente transportadas pelo movimento do fluido). Neste caso, dizemos que  $u(x, t) = f(x - ct)$  é uma **solução fraca** para o problema; quando  $u(x, t)$  é de classe  $C^1$ , o que ocorre se e somente se  $f$  for de classe  $C^1$ ,  $u$  é chamada uma **solução clássica**. Discutiremos a noção de solução fraca com mais precisão e rigor em um capítulo posterior.

## 1.2.2 Exercícios

**1.1 Exercício.** Use a transformada de Fourier para dar uma prova diferente para o Corolário 1.2.

## 1.2.3 O Caso $n$ -dimensional

Em  $n$  dimensões espaciais, a equação do transporte com coeficientes constantes é

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n c_i u_{x_i}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

ou, em notação mais compacta,

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

onde  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  é um vetor fixado. Uma solução para esta equação é uma função diferenciável  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . O tratamento da equação do transporte  $n$ -dimensional com coeficientes constantes é completamente análogo ao caso unidimensional:

**1.4 Teorema.** *A solução geral da equação do transporte*

$$u_t + \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

é

$$u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) \quad (1.13)$$

para alguma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

**Prova.** Usando a regra da cadeia é fácil ver que se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então

$$u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} - t\mathbf{c})$$

é uma solução para a equação do transporte:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \nabla f(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) \frac{\partial}{\partial t}(x_i - tc_i) = - \sum_{i=1}^n u_{x_i}(\mathbf{x}, t)c_i = -\mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t).$$

Reciprocamente, se  $u(\mathbf{x}, t)$  é uma solução para a equação do transporte, então existe uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} - t\mathbf{c})$ . De fato, suponha que  $u(\mathbf{x}, t)$  é uma solução para a equação do transporte. Fixe um ponto  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e defina uma função  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v(s) = u(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s).$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} v'(s) &= \nabla u(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}) + \frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s) \frac{\partial}{\partial s}(t_0 + s) \\ &= \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s) + u_t(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s) = 0. \end{aligned}$$

Isso significa que  $v$  é uma função constante. Defina uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, 0).$$

Então, segue que para cada ponto  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  temos

$$f(\mathbf{x}_0 - t_0\mathbf{c}) = u(\mathbf{x}_0 - t_0\mathbf{c}, 0) = v(-t_0) = v(0) = u(\mathbf{x}_0, t_0).$$

■

**1.5 Corolário.** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.14)$$

tem a solução única

$$u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x} - t\mathbf{c}). \quad (1.15)$$

Vemos da demonstração do Teorema 1.4 que para cada ponto fixado  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ ,  $u$  é constante ao longo da reta que passa por  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  e tem direção  $(\mathbf{c}, 1)$ . Estas retas são as **retas características** para a equação do transporte  $n$ -dimensional.

Como no caso unidimensional,  $u$  será uma solução de classe  $C^1$  se e somente se a condição inicial  $f$  for de classe  $C^1$ . Se a condição inicial for descontínua, ainda assim podemos falar de solução fraca, a qual também será descontínua: as discontinuidades serão propagadas ao longo das retas características.

### 1.2.4 O Problema Não-homogêneo

O problema de valor inicial não-homogêneo da equação do transporte

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.16)$$

pode ser resolvido de modo análogo ao usado para resolver o caso homogêneo, usando as retas características deste:

**1.6 Proposição.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$ . O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.17)$$

tem a solução única

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) + \int_0^t f(\mathbf{x} + (s-t)\mathbf{c}, s) ds. \quad (1.18)$$

**Prova.** Suponha que  $u$  é uma solução para o problema de valor inicial dado e considere  $u$  ao longo das retas características da equação do transporte (isto é, a equação homogênea). Em outras palavras, para cada ponto  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  defina  $v(s) = u(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s)$ . Desta vez,

$$v'(s) = \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s) + u_t(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s) = f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s),$$

de modo que

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0, t_0) - g(\mathbf{x}_0 - t_0\mathbf{c}) &= u(\mathbf{x}_0, t_0) - u(\mathbf{x}_0 - t_0\mathbf{c}, 0) = v(0) - v(-t_0) \\ &= \int_{-t_0}^0 v'(s) ds = \int_{-t_0}^0 f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{c}, t_0 + s) ds \\ &= \int_0^{t_0} f(\mathbf{x}_0 + (s-t_0)\mathbf{c}, s) ds \end{aligned}$$

(fizemos a mudança de variáveis  $\xi = t_0 + s$  no último passo).

Reciprocamente, definindo  $u(\mathbf{x}, t)$  como no enunciado, claramente  $u$  satisfaz a condição inicial e usando a regra da cadeia podemos verificar que  $u$  satisfaz a equação do transporte não-homogênea:

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) + \int_0^t f(\mathbf{x} + (s-t)\mathbf{c}, s) ds \right] \\ &= -\mathbf{c} \cdot \nabla g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) - \int_0^t \mathbf{c} \cdot \nabla f(\mathbf{x} + (s-t)\mathbf{c}, s) ds + f(\mathbf{x}, t) \\ &= -\mathbf{c} \cdot \left[ \nabla g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) + \int_0^t \nabla f(\mathbf{x} + (s-t)\mathbf{c}, s) ds \right] + f(\mathbf{x}, t) \\ &= -\mathbf{c} \cdot \nabla \left[ g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) + \int_0^t f(\mathbf{x} + (s-t)\mathbf{c}, s) ds \right] + f(\mathbf{x}, t) \\ &= -\mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

■

### 1.3 Equações de Primeira Ordem Linear com Coeficientes Variáveis e o Método das Características

Suponha que o campo de velocidades de um fluido não é constante. Na equação da continuidade com geração ou destruição interna de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = F,$$

o termo  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$  pode ser expandido na forma

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \rho (\operatorname{div} \mathbf{V}).$$

Quando  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ , o fluido é dito ser um **fluido incompressível**. Isso significa que não há variação de volume ao longo do escoamento. Mas então também não é possível haver variação na densidade de massa do fluido, a não ser aquela causada pela criação ou destruição de massa; assim, se  $F \equiv 0$ , devemos ter  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  e a equação da continuidade fica trivial. Talvez o modelo físico significativo mais simples para entender a equação da continuidade no caso incompressível em que  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  é quando  $\rho$  representa a concentração de uma substância dissolvida no fluido. Chamaremos esta equação de **equação da convecção para fluidos incompressíveis**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = F. \quad (1.19)$$

Isso dá uma motivação física para o estudo da equação linear de primeira ordem com coeficientes variáveis

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n c_i(\mathbf{x}, t) u_{x_i}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Como no caso de coeficientes constantes, as soluções para a equação linear de primeira ordem com coeficientes variáveis, homogênea, são constantes ao longo de curvas, chamadas *curvas características* (mas que em geral não são retas) e portanto a equação da convecção para fluidos incompressíveis também possui uma solução geral. As curvas características, como as retas características, são linhas de transporte de informação. No caso não-homogêneo, podemos ainda definir o conceito de curvas características, apesar da solução não mais ser constante ao longo delas.

A idéia principal do **método das características** para resolver equações de primeira ordem é obter curvas ao longo das quais a equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária, que são chamadas as **curvas características** da equação (assim chamadas porque independem das condições iniciais), e integrar a equação diferencial ordinária obtida ao longo das curvas características para obter a solução. Mais precisamente, ao longo das curvas características, a equação diferencial parcial é uma *derivada total*, o que dá esperanças de que ela possa ser integrada. Nos casos lineares homogêneos, a equação diferencial ordinária é simplesmente  $v' = 0$  cuja solução é  $v = \text{constante}$ , daí as soluções para as equações de primeira ordem lineares homogêneas serem constantes ao longo das curvas características; em geral, no entanto, a equação diferencial ordinária é mais complicada, podendo até mesmo não ser integrável em forma fechada, mas podemos fazer uso da teoria de equações diferenciais ordinárias para provar a existência e unicidade da solução e usar métodos numéricos para achar a solução, quando não existirem métodos analíticos.

O método das características ainda pode ser desenvolvido através de um argumento puramente geométrico. Isto será feito no próximo capítulo, quando estudarmos equação quasilineares.

#### 1.3.1 O Caso Unidimensional: Problema Homogêneo

Em uma dimensão, a equação de convecção homogênea para um fluido incompressível com velocidade variável é

$$u_t(x, t) + c(x, t) u_x(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

com  $c \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Analogamente ao caso homogêneo de coeficientes constantes, as soluções para esta equação são constantes ao longo de curvas, as curvas características, mas que em geral não são retas, como veremos a seguir.

Como já mencionada na introdução à esta seção, a idéia principal do método das características para resolver equações de primeira ordem é reduzir a equação diferencial parcial a uma equação diferencial ordinária ao longo das curvas características da equação. Para absorver melhor este conceito, e para entender como obter as curvas características para uma equação qualquer, vamos rever o caso da equação do transporte (coeficientes constantes). Observe que se  $(x(t), t)$  é uma curva arbitrária do plano  $xt$ , a derivada de uma função qualquer  $u$  ao longo desta curva é dada através da regra da cadeia por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + x'(t)u_x(x(t), t). \quad (1.22)$$

Portanto, se  $u$  satisfaz a equação do transporte, então

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{ao longo das curvas em que } x'(t) = c,$$

o que equivale a

$$u = \text{constante} \quad \text{ao longo das curvas } x - ct = \text{constante}.$$

Ou seja, ao longo das retas características desta equação, a EDP  $u_t + cu_x = 0$  foi reduzida à EDO  $u' = 0$ . Daí,

$$u(x, t) = u(x - ct, 0) = f(x - ct).$$

Vamos agora estender a noção acima para encontrar a solução geral para a equação do transporte com velocidade variável

$$u_t + c(x, t)u_x = 0 \quad (1.23)$$

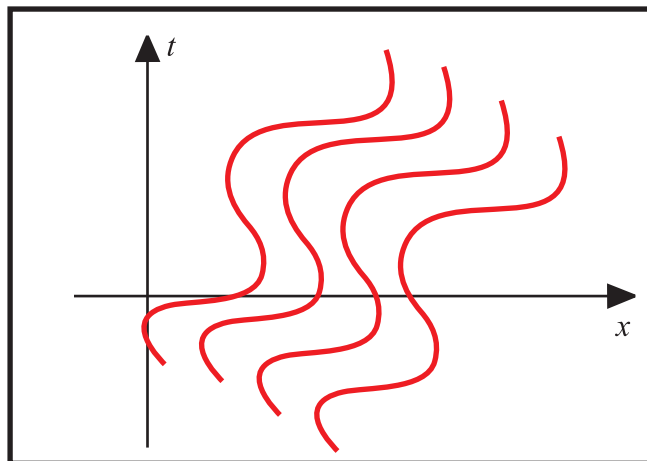
Por (1.22), temos

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{ao longo das curvas em que } x'(t) = c(x, t)$$

ou

$$u = \text{constante} \quad \text{ao longo das curvas } x'(t) = c(x, t).$$

Assim, novamente a EDP  $u_t + c(x, t)u_x = 0$  foi reduzida à EDO simples  $u' = 0$  ao longo de *curvas características* da equação: por definição, estas são as curvas  $(x(t), t)$  que satisfazem a equação diferencial ordinária  $x'(t) = c(x, t)$ . Para obter a solução para o problema, basta integrar a equação diferencial ordinária ao longo destas curvas características.



**Figura 1.4.** Curvas características da equação  $u_t + c(x, t)u_x = 0$ .

**1.7 Definição.** As curvas soluções da equação diferencial ordinária

$$x'(t) = c(x, t)$$

são chamadas as **curvas características** da equação do transporte  $u_t + c(x, t)u_x = 0$ .

Observe que as curvas características são definidas através de uma equação diferencial ordinária possivelmente não linear ( $c(x, t)$  pode não ser uma função linear em  $x$ ), logo não podemos garantir que as curvas características estejam definidas ao longo de todo o domínio do problema: as curvas características em geral estão definidas apenas localmente. Por este motivo, *nem sempre é possível encontrar uma solução global para uma equação de primeira ordem linear com coeficientes variáveis*.

**1.8 Exemplo.** Para examinar um exemplo concreto, vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - xtu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As curvas características são, por definição, as soluções da equação diferencial ordinária

$$x'(t) = -xt.$$

Resolvendo esta equação através de separação de variáveis

$$\frac{dx}{x} = -tdt,$$

segue que

$$x(t) = c_0 e^{-t^2/2},$$

onde  $c_0$  é uma constante. Portanto,

$$u = \text{constante} \text{ ao longo das curvas } x(t) = c_0 e^{-t^2/2}.$$

Note que para  $t = 0$  temos  $x(0) = c_0$ . Dado um ponto  $(x_0, t_0)$ , a curva característica que passa por  $(x_0, t_0)$  é dada por

$$x_0 = c_0 e^{-t_0^2/2} \Rightarrow c_0 = x_0 e^{t_0^2/2},$$

ou

$$x(t) = x_0 e^{-(t^2 - t_0^2)/2}. \quad (1.24)$$

Como  $u$  é constante ao longo das curvas características, segue que

$$u(x_0, t_0) = u(c_0, 0) = u(x_0 e^{t_0^2/2}, 0) = f(x_0 e^{t_0^2/2}).$$

Assim, a solução para o problema de valor inicial é

$$u(x, t) = f(xe^{t^2/2}). \quad (1.25)$$

□

Na verdade, nem todo problema de valor inicial para equações lineares de primeira ordem, mesmo com coeficientes constantes, tem solução. O próximo exemplo é clássico.

**1.9 Exemplo.** Considere os seguintes problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

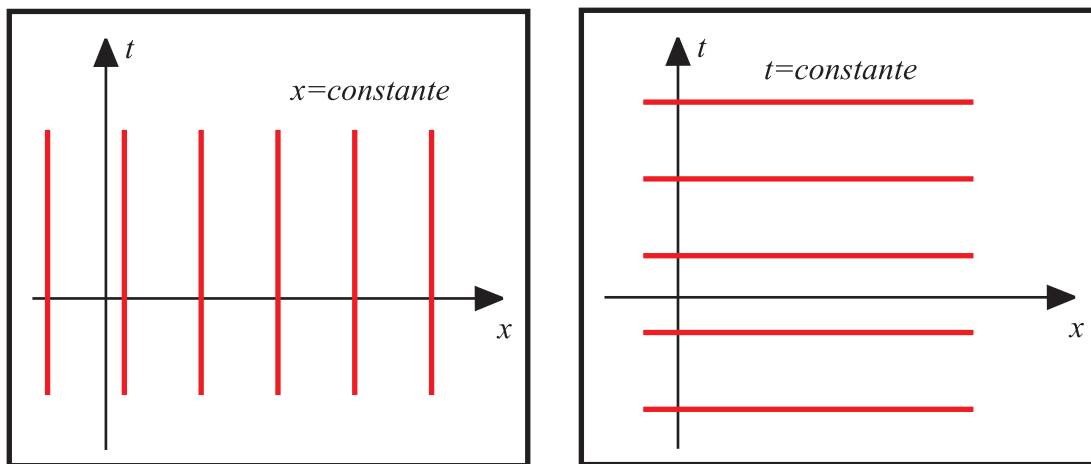
Ambos os problemas podem ser resolvidos através de uma integração simples. O primeiro problema, que fisicamente corresponde à equação da continuidade em que a velocidade do fluido é  $c = 0$ , tem como solução

$$u(x, t) = f(x);$$

ou seja, como a velocidade do fluido é zero, a distribuição de densidade não se altera com o passar do tempo: a solução é *estacionária*. O segundo problema, que não tem interpretação física evidente, não tem solução se  $g$  não for uma função constante. De fato, integrando a equação obtemos

$$u(x, t) = h(t),$$

para alguma função arbitrária  $h(t)$ , enquanto que a condição inicial  $u(x, 0) = g(x)$  implica que  $h(0) = g(x)$ , logo  $g$  precisa ser uma função constante para existir uma solução; por outro lado, se  $g$  for uma função constante, digamos  $g \equiv C$ , então o problema tem infinitas soluções, pois qualquer função  $h(t)$  que satisfaça  $h(0) = C$  será uma solução para o problema.



**Figura 1.5.** Retas características de  $u_t = 0$  e de  $u_x = 0$ .

Quando se compreende o significado das curvas características, é possível entender porque não era de se esperar que o segundo problema tivesse soluções para condições iniciais não constantes. As características da equação  $u_t = 0$  são as retas  $x = \text{constante}$  (soluções de  $x'(s) = 0$ ), logo a informação dada no instante de tempo  $t = 0$  (o eixo  $x$ ) pode ser levada para qualquer ponto do plano através destas retas, que interceptam o eixo  $x$  perpendicularmente e cobrem o plano todo. Já as características da equação  $u_x = 0$  são as retas  $t = \text{constante}$  (soluções de  $t'(s) = 0$ ), e como estas retas são paralelas ao eixo  $x$  e portanto não o interceptam (exceto no caso  $t = 0$ , que coincide com o eixo  $x$ ), elas não podem levar a informação dada no instante de tempo inicial  $t = 0$  para pontos do plano fora do eixo  $x$ ; o único caso em que há intersecção é a reta  $t = 0$ , o que significa que a informação em qualquer ponto do eixo  $x$  é levada para todos os outros pontos do eixo  $x$ , logo a condição inicial tem que ser constante para que exista solução.

Este exemplo ilustra porque na área de EDPs é melhor estudar apenas equações que surgem de um modelo oriundo do mundo real ou de outra área da matemática (por exemplo, geometria riemanniana) ou, no máximo, generalizações destes.  $\square$



### 1.3.2 O Problema de Cauchy

A partir de agora estudaremos a equação linear de primeira ordem homogênea em sua forma mais geral

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s) & \text{se } s \in I, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto do plano e  $C(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  é uma parametrização de uma curva qualquer em  $\Omega$ , chamada *curva inicial* do problema (uma vez que agora ambas são variáveis espaciais, não há motivo para privilegiarmos os eixos coordenados como antes, em que uma delas era uma variável temporal e o momento inicial de um processo físico em geral tem um significado importante). Este tipo de problema é chamado um **problema de Cauchy**.

Observe que no caso em que a segunda variável é  $y = t$ , tempo, e a interpretação física buscada é em termos da equação da convecção, não podemos ter em momento algum  $b(x, t) = 0$ . Por outro lado, se  $b(x, t)$  nunca se anula, basta dividir a equação toda por  $b(x, t)$  para colocá-la na forma  $u_t + c(x, t)u_x = 0$ . Assim, o que aprendermos nesta seção e nas seções subseqüentes aplica-se à equação da convecção desde que  $b(x, t)$  nunca se anule.

O último exemplo da subseção anterior mostra que para que o problema de Cauchy para a equação linear com coeficientes variáveis tenha solução, os coeficientes  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  e a curva inicial  $c(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  devem ter uma relação apropriada. Intuitivamente, para que informação seja transportada a partir da curva inicial ao longo das características, estas devem interceptar a curva inicial transversalmente (isto é, não podem interceptar a curva inicial tangencialmente).

Nesta formulação mais geral, em que existem coeficientes  $a(x, y)$  e  $b(x, y)$ , na maioria dos casos as curvas características não podem ser escritas em uma forma em que uma das componentes é expressa como função da outra (por exemplo,  $x(t)$ , como temos visto até agora). Para o caso mais geral, tentaremos encontrar curvas características na forma  $C(t) = (x(t), y(t))$ . Neste caso, a derivada de  $u$  ao longo de  $C$  é dada, pela regra da cadeia, por

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)).$$

No caso em que  $b(x, t) \equiv 1$ , temos  $y'(t) \equiv 1$  e portanto podemos escolher  $y(t) = t$ , caindo no casos mais simples em que  $x$  é uma função de  $t$ .

**1.10 Definição.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto. As **curvas características** da equação de primeira ordem linear homogênea

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0,$$

com coeficientes variáveis  $a, b \in C^1(\Omega)$  são as curvas  $C(t) = (x(t), y(t))$ , soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases}.$$

**1.11 Proposição.** Uma solução  $u$  para a equação de primeira ordem linear homogênea

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$$

é constante ao longo de uma curva se e somente se ela é uma curva característica da equação.

**Prova.** De fato, se  $C(t) = (x(t), y(t))$  é uma solução do sistema de equações diferenciais acima, então, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(C(t)) &= \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)) \\ &= a(x(t), y(t))u_x(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t))u_y(x(t), y(t)) = 0 \end{aligned}$$

e portanto  $u$  é constante ao longo da curva  $C$ .

Reciprocamente, seja  $C(t) = (x(t), y(t))$  uma curva parametrizada em  $\Omega$  e suponha que ela seja uma curva de nível de  $u$ . Então ao longo desta curva temos

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = 0.$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)) = (x'(t), y'(t)) \cdot \nabla u(x(t), y(t)) = 0,$$

ou seja, o vetor gradiente  $\nabla u(x(t), y(t))$  é perpendicular à curva  $C$  em cada ponto  $(x(t), y(t))$ . Mas  $u$  ser solução da equação de primeira ordem homogênea é equivalente a dizer que o vetor  $(a(x, y), b(x, y))$  também é perpendicular ao vetor  $\nabla u(a(x, y), b(x, y))$ :

$$0 = a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = (a(x, y), b(x, y)) \cdot \nabla u(a(x, y), b(x, y)).$$

Assim, se  $u$  é uma solução da equação homogênea, os vetores  $(x'(t), y'(t))$  e  $(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$  são paralelos, logo existe uma função real  $\lambda(t)$  tal que

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = \lambda(t)b(x(t), y(t)) \end{cases}.$$

Por uma mudança da parametrização das curvas características (mudando o vetor tangente  $(x'(t), y'(t))$ ), podemos tomar  $\lambda(t) \equiv 1$ . ■

Dado que o comportamento das curvas características longe da curva inicial pode ser complexo, não esperamos estabelecer resultados globais de existência de soluções (ou seja, uma solução definida em todo o domínio); a existência de uma solução global dependerá tanto da organização das curvas características, como da escolha de uma curva inicial adequada. Assim, o teorema a seguir estabelece a existência de uma solução apenas localmente.

**1.12 Teorema.** (Existência e Unicidade Locais para o Problema de Cauchy) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $\Gamma \subset \Omega$  uma curva de classe  $C^1$ . Seja  $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  uma parametrização de  $\Gamma$  de classe  $C^1$ , definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Suponha que  $f \in C^1(I)$  e que  $a, b \in C^1(\Omega)$  não se anulam simultaneamente em nenhum ponto  $(x, y) \in \Omega$  e satisfazem*

$$\det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s)) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } s \in I.$$

Então, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s) & \text{se } s \in I, \end{cases}$$

tem uma única solução de classe  $C^1$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ .

**Prova.** As curvas características da equação  $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$  são as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases}.$$

A hipótese do determinante implica que quando uma curva característica intercepta a curva inicial, isto é, quando  $(x(0), y(0)) = (\alpha(s), \beta(s))$ , o seu vetor tangente  $(x'(0), y'(0)) = (a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$  nunca é paralelo ao vetor tangente à curva inicial  $(\alpha'(s), \beta'(s))$ .

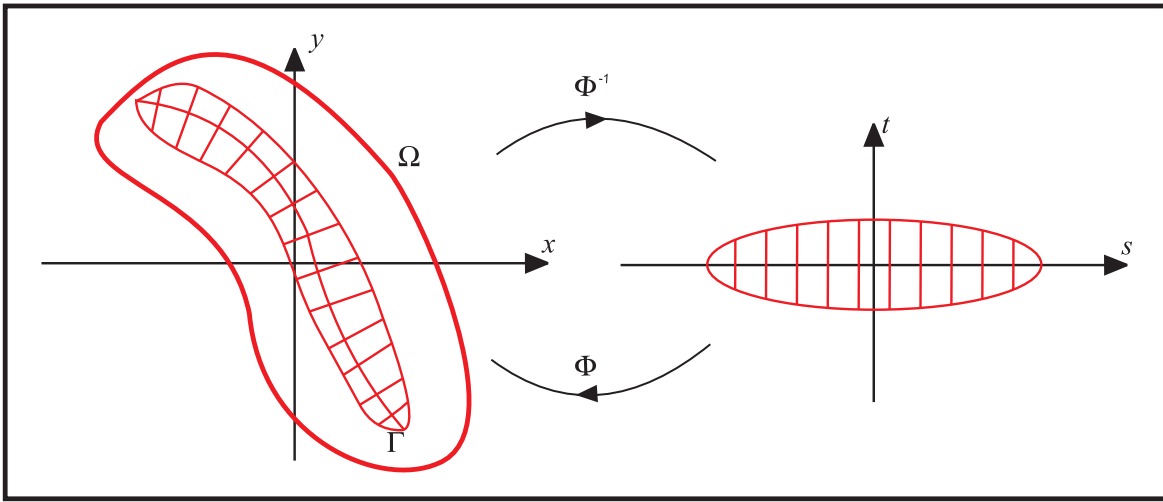
Pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, para cada  $s \in I$ , existe uma única curva característica  $(x_s(t), y_s(t))$  que satisfaz a condição inicial  $(x(0), y(0)) = (\alpha(s), \beta(s))$ . Isso permite cobrir uma vizinhança da curva inicial  $\Gamma$  por curvas características que não se interceptam. Cada ponto  $(x_s(t), y_s(t)) = (x(s, t), y(s, t))$  desta vizinhança pode então ser descrito pelas variáveis  $(s, t)$ :

$$\Phi : (s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t)).$$

De fato, para cada  $s$  fixado,

$$\det D\Phi(s, 0) = \det \begin{bmatrix} x_s(s, 0) & x_t(s, 0) \\ y_s(s, 0) & y_t(s, 0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s)) \end{bmatrix} \neq 0,$$

pela hipótese do determinante, logo  $\det D\Phi(s, t) \neq 0$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ . Pelo teorema da função inversa,  $\Phi$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  em uma (possivelmente menor) vizinhança de  $\Gamma$ .



**Figura 1.6.** Construção do difeomorfismo  $\Phi$ .

Suponha que exista uma solução  $u$  para o problema de Cauchy nesta vizinhança. Como  $\Phi$  é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $\Gamma$ , podemos fazer a mudança de variáveis

$$v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t)) \quad (1.26)$$

(em outras palavras,  $v = u \circ \Phi$ ). Observe que, para  $s$  fixado,  $v$  é  $u$  ao longo de uma curva característica. Derivando  $v$  em relação a  $t$ , segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) &= u_x(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + u_y(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \\ &= u_x(x(s, t), y(s, t)) a(x(s, t), y(s, t)) + u_y(x(s, t), y(s, t)) b(x(s, t), y(s, t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, fixado  $s$ ,  $v$  satisfaz a equação diferencial ordinária com condição inicial

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(s, t) = 0, \\ v(s, 0) = f(s). \end{cases} \quad (1.27)$$

Em particular,  $v$  é constante e a solução deste problema é única:  $v(s, t) = f(s)$ . Isso mostra que a solução  $u$  é única nesta vizinhança e também que ela é constante ao longo das curvas características da equação.

Reciprocamente, suponha que, para cada  $s \in I$ ,  $v$  é a solução de (1.27). Novamente usando o fato de que  $\Phi$  é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $\Gamma$ , definimos

$$u(x(s, t), y(s, t)) = v(s, t) \quad (1.28)$$

(em outras palavras,  $u$  é definida por  $u = v \circ \Phi^{-1}$ ). Temos

$$u(\alpha(s), \beta(s)) = u((x(s, 0), y(s, 0))) = v(s, 0) = f(s)$$

para todo  $s \in I$  e, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} & a(x(s, t), y(s, t))u_x(x(s, t), y(s, t)) + b(x(s, t), y(s, t))u_y(x(s, t), y(s, t)) \\ &= \frac{\partial x}{\partial t}(s, t)u_x(x(s, t), y(s, t)) + \frac{\partial y}{\partial t}(s, t)u_y(x(s, t), y(s, t)) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $f$  é de classe  $C^1$ ,  $v$  é de classe  $C^1$  e como a definição de  $u$  a partir de  $v$  é através da composta de um difeomorfismo de classe  $C^1$ , segue que  $u$  é de classe  $C^1$ . ■

### 1.3.3 O Caso Unidimensional: Problema Não-homogêneo

Em uma dimensão, a equação de primeira ordem linear com coeficientes variáveis, não homogênea, é

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.29)$$

com  $a, b, c \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Vamos primeiro examinar o caso mais simples da equação de convecção:

$$u_t + c(x, t)u_x = f(x, t). \quad (1.30)$$

Por (1.22), temos

$$\frac{du}{dt} = f(x, t) \quad \text{ao longo das curvas em que } x'(t) = c(x, t).$$

Desta vez, no caso não-homogêneo, a EDP  $u_t + c(x, t)u_x = f(x, t)$  foi reduzida à EDO  $u' = f(x, t)$  ao longo das curvas características da equação. Estas são as curvas  $(x(t), t)$  que satisfazem a equação diferencial ordinária  $x'(t) = c(x, t)$ .

**1.13 Exemplo.** Usando o método das características, vamos resolver a equação de transporte não-homogênea

$$\begin{cases} u_t + u_x = t & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(s, 0) = s^2 & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As características desta equação satisfazem  $x'(t) = 1$ , de modo que a reta característica que passa por  $(s, 0)$  é a reta

$$x(t) = t + s. \quad (1.31)$$

Ao longo destas curvas características temos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = t.$$

Integrando esta equação de 0 a  $t$  obtemos

$$u(x(t), t) - u(x(0), 0) = \frac{t^2}{2},$$

ou

$$u(x(t), t) = \frac{t^2}{2} + s^2.$$

Como  $s = x(t) - t$ , segue que

$$u(x(t), t) = \frac{t^2}{2} + (x(t) - t)^2,$$

que podemos escrever simplesmente (já que todo ponto  $(x, t)$  do plano corresponde de maneira única aos pontos  $(x(t), t)$  das retas características)

$$u(x, t) = \frac{t^2}{2} + (x - t)^2. \quad (1.32)$$

Esta é exatamente a solução obtida aplicando-se diretamente a Proposição 1.6.  $\square$

Portanto, no caso não-homogêneo, a EDP de primeira ordem é transformada em uma EDO não-homogênea.

**1.14 Proposição.** *Considere a equação de primeira ordem linear não-homogênea*

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \quad \text{em } \Omega,$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é aberto e  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ . Se  $u$  é uma solução para esta equação, então ao longo das curvas características para a correspondente equação homogênea,  $u$  satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = c(x(t), y(t)).$$

**Prova.** Seja  $C(t) = (x(t), y(t))$  uma solução do sistema de equações diferenciais acima. Então, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(C(t)) &= \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)) \\ &= a(x(t), y(t))u_x(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t))u_y(x(t), y(t)) = c(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

■

**Observação.** Diferentemente da Proposição 1.11, a recíproca não é válida. Ou seja, se  $u$  é uma solução para a equação de primeira ordem linear não-homogênea e  $C(t) = (x(t), y(t))$  é uma curva parametrizada do plano  $xy$  tal que ao longo desta curva temos

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = c(C(t)),$$

não é necessariamente verdade que (mesmo a menos de parametrização, como na Proposição 1.11)

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases}.$$

De fato, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}u(C(t)) = \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)) = c(x(t), y(t)).$$

Por outro lado, se  $u$  satisfaz a equação de primeira ordem não-homogênea, temos

$$a(x(t), y(t))u_x(x(t), y(t)) + b(x(t), y(t))u_y(x(t), y(t)) = c(x(t), y(t)).$$

Em notação vetorial, estas duas equações podem ser respectivamente escritas nas formas

$$\begin{aligned}(x', y') \cdot \nabla u &= c, \\ (a, b) \cdot \nabla u &= c.\end{aligned}$$

Se  $c \neq 0$ , os ângulos entre os vetores e o vetor gradiente não estão fixados, e portanto não é necessário que os vetores  $(x'(t), y'(t))$  e  $(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$  sejam iguais para que estas duas identidades sejam verdadeiras (por outro lado, eles não podem ser apenas paralelos, porque as identidades não são homogêneas). No caso homogêneo, as curvas características ficam essencial e unicamente caracterizadas pelo fato de serem as curvas de nível da função  $u$ . Esta caracterização não existe no caso não-homogêneo.

**1.15 Exemplo.** Vamos encontrar a solução do problema não-homogêneo

$$\begin{cases} 3u_x - 4u_y = x^2 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u\left(s, \frac{3}{4}s\right) = \frac{s^3}{9} & \text{se } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As curvas características da equação homogênea correspondente  $3u_x - 4u_y = 0$  são as retas soluções do sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 3 \\ y'(t) = -4 \end{cases}.$$

Tomando como pontos iniciais para estas retas os pontos ao longo da reta inicial do problema de Cauchy dado, elas podem ser parametrizadas por

$$\begin{cases} x(t) = 3t + s \\ y(t) = -4t + \frac{3}{4}s \end{cases}.$$

Integrando

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = x^2(t) = (3t + s)^2,$$

desde 0 até  $t$ , obtemos

$$u(x(t), y(t)) - u(x(0), y(0)) = \frac{(3t + s)^3}{9} - \frac{s^3}{9},$$

ou

$$\begin{aligned} u(x(t), y(t)) &= \frac{(3t + s)^3}{9} - \frac{s^3}{9} + u\left(s, \frac{3}{4}s\right) \\ &= \frac{x^3(t)}{9} - \frac{s^3}{9} + \frac{s^3}{9} \\ &= \frac{x^3(t)}{9}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do problema de Cauchy é

$$u(x, y) = \frac{x^3}{9}.$$

□

**1.16 Exemplo.** Vamos encontrar a solução do problema não-homogêneo seguinte através do método das características

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = 4xy & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(s, 0) = f(s) & \text{se } s \geq 0. \end{cases}$$

As curvas características desta equação satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} .$$

A solução deste sistema acoplado com pontos iniciais  $(s, 0)$  no semi-eixo positivo é

$$\begin{cases} x(t) = s \cos t \\ y(t) = s \sin t \end{cases} ,$$

ou seja, as curvas características são círculos centrados na origem; todo ponto do plano, à exceção da origem (em que a equação diferencial parcial não está definida), está em algum desses círculos característicos. A equação diferencial parcial ao longo dos círculos característicos torna-se

$$\frac{du}{dt}(x(t), y(t)) = 4s^2 \sin t \cos t = 2s^2 \sin 2t.$$

Integrando de 0 até  $t$ , obtemos

$$u(x(t), y(t)) - u(x(0), y(0)) = s^2 - s^2 \cos 2t,$$

ou

$$\begin{aligned} u(x(t), y(t)) &= s^2 (1 - \cos 2t) + u(s, 0) \\ &= 2s^2 \sin^2 t + f(s) \\ &= 2y^2(t) + f\left(\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right). \end{aligned}$$

Portanto, a solução é

$$u(x, y) = 2y^2 + f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Se  $f'(0) = 0$ , então  $u_x$  e  $u_y$  estão definidas na origem.  $\square$

**1.17 Teorema.** (Existência e Unicidade Locais para o Problema de Cauchy) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $\Gamma \subset \Omega$  uma curva de classe  $C^1$ . Seja  $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  uma parametrização de  $\Gamma$  de classe  $C^1$ , definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Suponha que  $f \in C^1(I)$  e que  $a, b \in C^1(\Omega)$  não se anulam simultaneamente em nenhum ponto  $(x, y) \in \Omega$  e satisfazem*

$$\det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s)) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } s \in I.$$

Então, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s) & \text{se } s \in I, \end{cases}$$

tem uma única solução de classe  $C^1$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ .

**Prova.** A demonstração é análoga à do Teorema 1.12. Assumimos a parte inicial da demonstração daquele teorema até a construção do difeomorfismo local  $\Phi$ , inclusive, e prosseguimos a partir dali.

Suponha que exista uma solução  $u$  para o problema de Cauchy nesta vizinhança. Usando o difeomorfismo local  $\Phi$ , fazemos a mudança de variáveis

$$v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t)). \tag{1.33}$$

Derivando  $v$  em relação a  $t$ , segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) &= u_x(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + u_y(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \\ &= u_x(x(s, t), y(s, t)) a(x(s, t), y(s, t)) + u_y(x(s, t), y(s, t)) b(x(s, t), y(s, t)) \\ &= c(x(s, t), y(s, t)).\end{aligned}$$

Portanto, fixado  $t$ ,  $v$  satisfaz a equação diferencial ordinária com condição inicial

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(s, t) = c(x(s, t), y(s, t)), \\ v(s, 0) = f(s). \end{cases} \quad (1.34)$$

Em particular,  $v$  é única. Isso mostra que a solução  $u$  é única nesta vizinhança.

Reciprocamente, suponha que, para cada  $s \in I$ ,  $v$  é a solução de (1.34). Defina

$$u(x(s, t), y(s, t)) = v(s, t). \quad (1.35)$$

Temos

$$u(\alpha(s), \beta(s)) = u(x(s, 0), y(s, 0)) = v(s, 0) = f(s)$$

para todo  $s \in I$  e, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} & a(x(s, t), y(s, t))u_x(x(s, t), y(s, t)) + b(x(s, t), y(s, t))u_y(x(s, t), y(s, t)) \\ &= \frac{\partial x}{\partial t}(s, t)u_x(x(s, t), y(s, t)) + \frac{\partial y}{\partial t}(s, t)u_y(x(s, t), y(s, t)) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(s, t) \\ &= c(x(s, t), y(s, t)).\end{aligned}$$

Como  $c$  e  $f$  são de classe  $C^1$ ,  $v$  é de classe  $C^1$  e como a definição de  $u$  a partir de  $v$  é através da composta de um difeomorfismo de classe  $C^1$ , segue que  $u$  é de classe  $C^1$ . ■

### 1.3.4 O Caso Geral

Suponha que o campo de velocidades de um fluido não é constante. Na equação da continuidade com geração ou destruição interna de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = F$$

o termo  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$  pode ser expandido na forma

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + (\operatorname{div} \mathbf{V}) \rho.$$

Quando  $\operatorname{div} \mathbf{V} \neq 0$ , o fluido é dito ser um **fluido compressível**. Assim, para fluidos compressíveis, com geração ou destruição interna de massa, a equação da continuidade é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + (\operatorname{div} \mathbf{V}) \rho = F. \quad (1.36)$$

Portanto, a equação de convecção linear geral é

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t) u_{x_i}(\mathbf{x}, t) + c(\mathbf{x}, t) u = d(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (1.37)$$



ou, em notação mais compacta,

$$u_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) + c(\mathbf{x}, t)u = d(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (1.38)$$

com  $\mathbf{b} \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ,  $c, d \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Mais geralmente, desprezando o significado físico da variável  $t$ , uma equação linear de primeira ordem tem a forma

$$\sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x})u_{x_i}(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1.39)$$

ou

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1.40)$$

em notação mais compacta, com  $\mathbf{b} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $c, d \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

Destacamos em primeiro lugar o caso bidimensional com coeficientes constantes. Compare a solução abaixo com a solução geral da equação do transporte.

**1.18 Teorema.** *Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a, b$  não simultaneamente nulos. A solução geral da equação de primeira ordem linear com coeficientes constantes*

$$au_x + bu_y + cu = d \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \quad (1.41)$$

é

$$u(x, y) = \frac{d}{a^2 + b^2}(ax + by) + f(-bx + ay) \quad (1.42)$$

se  $c = 0$ , e

$$u(x, y) = \frac{d}{c} + f(-bx + ay)e^{-\frac{c}{a^2+b^2}(ax+by)} \quad (1.43)$$

se  $c \neq 0$ , para alguma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

**Prova.** As curvas características desta equação são as soluções de

$$\begin{cases} x'(t) = a, \\ y'(t) = b, \end{cases}$$

ou seja, as retas características

$$\begin{aligned} x(t) &= at + x_0, \\ y(t) &= bt + y_0, \end{aligned}$$

que são as retas

$$ay - bx = \text{constante}. \quad (1.44)$$

Vamos obter uma mudança de variáveis que transforme a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária ao longo das retas características, como fizemos na demonstração do Teorema 1.12. Como não temos um problema de Cauchy aqui, ou seja, não é dada uma curva inicial transversal às retas características, precisamos definir uma tal curva. Tratando-se de retas, o mais fácil é tomar as retas ortogonais às retas características; como isso dá um sistema de coordenadas para o plano, a transformação de coordenadas fica imediatamente definida. As retas ortogonais às retas características são as retas  $ax + by = \text{constante}$ . Portanto, definimos as novas variáveis  $s, t$  por

$$\begin{aligned} s &= ay - bx, \\ t &= ax + by. \end{aligned}$$

Assim, a variável  $s$  é constante ao longo das retas características, enquanto que a variável  $t$  é constante ao longo das retas ortogonais. A inversa desta transformação é

$$\begin{aligned}x &= \frac{at - bs}{a^2 + b^2}, \\y &= \frac{bt + as}{a^2 + b^2};\end{aligned}$$

note que, para cada  $s$  fixado,  $(x(s, t), y(s, t))$  é uma reta característica. Defina

$$v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t)).$$

Derivando  $v$  em relação a  $t$ , segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(s, t) &= u_x(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + u_y(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \\&= u_x(x(s, t), y(s, t)) \frac{a}{a^2 + b^2} + u_y(x(s, t), y(s, t)) \frac{b}{a^2 + b^2} \\&= \frac{1}{a^2 + b^2} [au_x(x(s, t), y(s, t)) + bu_y(x(s, t), y(s, t))] \\&= \frac{1}{a^2 + b^2} [d - cu(x(s, t), y(s, t))] \\&= \frac{1}{a^2 + b^2} [d - cv(s, t)].\end{aligned}$$

Assim, para cada  $s$  fixado,  $v$  satisfaz a equação diferencial ordinária

$$(a^2 + b^2) \frac{\partial v}{\partial t} + cv = d.$$

Se  $c = 0$ , segue através de uma integração simples que

$$v(s, t) = \frac{d}{a^2 + b^2} s + f(s).$$

Se  $c \neq 0$ , multiplicando esta equação pelo fator integrante

$$\frac{1}{a^2 + b^2} e^{\frac{ct}{a^2 + b^2}},$$

ela transforma-se na equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v e^{\frac{ct}{a^2 + b^2}} \right) = \frac{d}{a^2 + b^2} e^{\frac{ct}{a^2 + b^2}}.$$

Integrando, obtemos

$$v(s, t) e^{\frac{ct}{a^2 + b^2}} = \frac{d}{a^2 + b^2} e^{\frac{ct}{a^2 + b^2}} + f(s),$$

donde

$$v(s, t) = \frac{d}{a^2 + b^2} + f(s) e^{-\frac{ct}{a^2 + b^2}}.$$

Voltando às variáveis originais  $x, y$ , obtemos o resultado enunciado. ■

A estratégia adotada para encontrar a solução geral da equação com coeficientes constantes pode ser adotada no caso bidimensional em que os coeficientes são variáveis. Como sempre, as curvas características da equação de primeira ordem

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y) \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \tag{1.45}$$

são as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t)) \end{cases} . \quad (1.46)$$

Logo, elas são as soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$a(x, y)dy - b(x, y)dx = 0. \quad (1.47)$$

Se as soluções desta equação tiverem a forma  $t(x, y) = \text{constante}$  para alguma função  $t$ , podemos tomar  $t$  como uma das novas variáveis. Para escolher a variável  $s$ , podemos tomar as soluções da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0,$$

pois estas são ortogonais às curvas anteriores. Se isso não for fácil, basta escolher  $s$  de tal forma que o jacobiano

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0$$

em todo ponto do domínio.

**1.19 Exemplo.** Vamos encontrar a solução geral da equação

$$x^2u_x - xyu_y + yu = xy^2. \quad (1.48)$$

As curvas características da correspondente equação homogênea são as soluções de

$$\begin{cases} x'(t) = x^2, \\ y'(t) = xy, \end{cases}$$

ou

$$x^2dy + xydx = 0,$$

isto é,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

que são as hipérbolas

$$xy = \text{constante}.$$

Ao invés de procurar curvas ortogonais a estas hipérbolas características, é fácil ver que a transformação

$$\begin{aligned} s &= x, \\ t &= xy, \end{aligned}$$

define uma mudança de variáveis (já que as retas verticais interceptam as hipérbolas características sempre transversalmente). A mudança de coordenadas inversa é

$$\begin{aligned} x &= s, \\ y &= \frac{t}{s}. \end{aligned}$$

Definindo

$$v(s, t) = u(x, y),$$

segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial s} &= u_x \frac{\partial x}{\partial s} + u_y \frac{\partial y}{\partial s} = u_x - u_y \frac{t}{s^2} = \frac{x^2}{s^2} u_x - \frac{xy}{t} u_y \frac{t}{s^2} = \frac{1}{s^2} (x^2 u_x - xy u_y) = \frac{1}{s^2} (xy^2 - yu) \\ &= \frac{1}{s^2} \left( \frac{t^2}{s} - \frac{t}{s} v \right).\end{aligned}$$

Portanto  $v$  satisfaz a equação diferencial ordinária

$$s^2 \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{t}{s} v = \frac{t^2}{s}$$

que tem

$$\frac{1}{s^2} e^{-t/2s^2}$$

como fator integrante. Multiplicando a equação pelo fator integrante, obtemos a equação

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( v e^{-t/2s^2} \right) = \frac{t^2}{s^3} e^{-t/2s^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}v(s, t) &= e^{t/2s^2} \left[ t^2 \int \frac{e^{-t/2s^2}}{s^3} + f(t) \right] = e^{t/2s^2} \left[ t e^{-t/2s^2} + f(t) \right] \\ &= t + f(t) e^{t/2s^2}.\end{aligned}$$

Daí,

$$u(x, y) = xy + f(xy) e^{y/2x}$$

para alguma função  $f$  de classe  $C^1$ . Observe que  $u$  não está definida para  $x = 0$ . Não conseguimos obter uma solução global, válida em todo o plano, porque não há nenhuma hipérbole característica interceptando o eixo  $x$ .  $\square$

Quando a curva inicial não é tangente a uma curva característica, um teorema de existência e unicidade local para o problema de Cauchy semelhante aos Teoremas 1.12 e 1.18 é válido para o caso geral de equações lineares de primeira ordem. O enunciado preciso do teorema pode ser visto no próximo capítulo como um caso particular do teorema de existência e unicidade local para o problema de Cauchy para equações de primeira ordem quasilineares.

O que ocorre quando a curva inicial do problema de Cauchy é uma curva tangente à uma curva característica ou, pior ainda, é uma curva característica? Já vimos (no Exemplo 1.9) que pode não existir solução ou podem existir infinitas soluções. A resposta precisa a este problema depende da consideração de curvas características no espaço com uma dimensão mais alta. Isso será visto no próximo capítulo em um contexto mais geral.

### 1.3.5 Exercícios

**1.2 Exercício.** *Nos itens a seguir, esboce o diagrama de curvas características da equação de primeira ordem linear e resolva o problema de Cauchy associado, determinando o domínio da condição inicial e da solução.*

- (a)  $\begin{cases} 5u_x + 4u_y = x^3 + 1 + 2e^{3y}, \\ u(4t, -5t + 1) = te^t. \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} -yu_x + xu_y = 2xy, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad & \begin{cases} x^2 u_x - xy u_y = 2x^3 + x^2 y + x^2 + \frac{x^3 y}{x+1}, \\ u(t, t+1) = t^2 + t. \end{cases} \\
\text{(d)} \quad & \begin{cases} u_x + a(\cos x) u_y = \cos x + y, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \\ u(\pi/2, y) = \frac{\log(\sin y)}{a}. \end{cases} \\
\text{(e)} \quad & \begin{cases} u_t + cu_x = xu, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}
\end{aligned}$$

**1.3 Exercício.** Nos itens a seguir, ache a solução geral da equação de primeira ordem.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & u_y = x^2 + y^2. \\
\text{(b)} \quad & u_x - 3u_y = \sin x + \cos y. \\
\text{(c)} \quad & u_x - au_y = e^{mx} \cos(by), \quad a, b, m \in \mathbb{R}, m^2 + a^2 b^2 \neq 0. \\
\text{(d)} \quad & u_t + tu = t^3 + 3xt. \\
\text{(e)} \quad & (x+a)u_x + (y+b)u_y + cu = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**1.4 Exercício.** Enuncie e demonstre um teorema de existência e unicidade para o problema de Cauchy para o caso mais geral da equação de primeira ordem linear.

## Capítulo 2

# Equações de Primeira Ordem Não-Lineares

Quando obtivemos a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0,$$

assumimos que o campo de velocidades  $\mathbf{V}$  dependia apenas da posição no espaço e do instante de tempo:  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ . Em muitas situações, no entanto, a velocidade do fluido depende da própria densidade deste:  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \rho)$ . Nestes casos, obtemos uma equação diferencial parcial não-linear para descrever o fenômeno.

**Exemplo 2.1.** (Equação Cinemática da Onda) Um exemplo de equação não-linear é a *equação cinemática da onda*, que descreve fenômenos não-lineares em dinâmica dos fluidos em que os efeitos dissipativos tais como viscosidade e difusão são ignorados. Ela é dada (em uma dimensão) por

$$u_t + c(u)u_x = 0, \tag{2.1}$$

onde  $u$  representa densidade e  $c$  é uma função de classe  $C^1$  dada. O termo  $c(u)$  significa que a velocidade do fluido em um ponto depende exclusivamente de sua densidade naquele ponto.  $\square$

**Exemplo 2.2.** (Equação de Burgers) Um caso especial importante do exemplo anterior é a *equação de Burgers*, que aparece no estudo da dinâmica dos gases, dada em uma dimensão por

$$u_t + uu_x = 0, \tag{2.2}$$

quando, mais uma vez, ignora-se os efeitos dissipativos. Neste caso, a velocidade do fluido em cada ponto é diretamente proporcional (com constante de proporcionalidade 1) à densidade do fluido no ponto. Matematicamente, ela pode ser vista como um caso especial de uma equação não-linear do tipo

$$u_t + [F(u)]_x = 0 \tag{2.3}$$

escolhendo-se  $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ . Esta equação nada mais é que uma *lei de conservação* na forma diferencial, com  $\phi(u) = F(u)$  sendo o fluxo. No caso  $n$ -dimensional, esta lei de conservação tem a forma

$$u_t + \operatorname{div}[F(u)] = 0 \tag{2.4}$$

Fisicamente, a equação de Burgers é derivada a partir das equações de Navier-Stokes para um gás barotrópico através de um método chamado o *modelo fracamente não-linear*. O caso unidimensional pode ser visto em [Logan], pp. 227–232.  $\square$

## 2.1 Equações Quasilineares

### 2.1.1 O Método das Características para Equações Quasilineares Bidimensionais

A equação diferencial parcial não-linear

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (2.5)$$

é chamada uma **equação quasilinear** porque ela é linear em suas derivadas de ordem mais alta (ou seja, as derivadas de ordem 1).

Esta equação bidimensional também pode ser resolvida através do método das características, embora a situação agora seja mais complicada. Neste caso, o método das características reduz a equação diferencial parcial à equação diferencial ordinária

$$\frac{du}{dt} = c(x, y, u)$$

ao longo das curvas em que

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), u(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), u(t)) \end{cases} .$$

Observe que as curvas características não podem mais ser encontradas independentemente: a velocidade  $(x'(t), y'(t))$  das curvas características depende da solução  $u$ . Como esta é desconhecida a priori, somos agora forçados a resolver um problema simultâneo: encontrar, ao mesmo tempo, as curvas características e a solução da equação quasilinear, ou seja, resolver o sistema completo de equações diferenciais ordinárias não-lineares

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), u(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), u(t)) \\ u'(t) = c(x(t), y(t), u(t)) \end{cases} ,$$

sujeito a alguma condição inicial.

As soluções do sistema acima são curvas no espaço tridimensional  $xyu$ . Estas também serão chamadas de curvas características. Para compreender melhor o seu significado, desenvolveremos a teoria do método das características a partir de argumentos puramente geométricos. Curiosamente, a teoria das curvas características residindo no espaço tridimensional é mais poderosa e será capaz de dar uma resposta mais completa ao problema de Cauchy também para as equações de primeira ordem lineares.

Uma solução  $u$  para a equação quasilinear representa uma superfície bidimensional no espaço tridimensional  $xyu$ , gráfico da função  $u = u(x, y)$ . Esta superfície é chamada uma **superfície solução**. O vetor normal à esta superfície em cada ponto é o vetor

$$(u_x(x, y), u_y(x, y), -1).$$

Resolver a equação quasilinear é equivalente a encontrar uma superfície que ao mesmo tempo seja o gráfico de uma função  $u$  e cujo vetor normal satisfaça a restrição

$$(u_x(x, y), u_y(x, y), -1) \cdot (a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y))) = 0. \quad (2.6)$$

Em outras palavras, uma superfície  $u = u(x, y)$  tal que o vetor  $(a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$  esteja contido no plano tangente à superfície em cada ponto  $(x, y, u(x, y))$ . Considere uma tal superfície solução. Dado um ponto  $(x_0, y_0, u_0)$  desta superfície, procuramos condições sobre uma curva  $(x(t), y(t), u(t))$  passando por este ponto no instante  $t = 0$  para que ela esteja inteiramente contida na superfície. Como primeiro passo, exigimos que o vetor tangente  $(x'(0), y'(0), u'(0))$  esteja no plano tangente à superfície solução no ponto  $(x_0, y_0, u_0)$ . Este plano tangente tem equação

$$u - u_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \quad (2.7)$$

onde  $p = u_x(x_0, y_0)$  e  $q = u_y(x_0, y_0)$ , ou seja, seu vetor normal é o vetor  $(p, q, -1)$ . Os valores de  $p$  e  $q$  são desconhecidos, já que não sabemos qual é a solução  $u$ , e à princípio a equação (2.7) definiria uma família a dois parâmetros de planos passando pelo ponto  $(x_0, y_0, u_0)$ . Contudo, sabemos também que os valores de  $p$  e  $q$  estão restringidos pela equação

$$a(x_0, y_0, u_0)p + b(x_0, y_0, u_0)q = c(x_0, y_0, u_0). \quad (2.8)$$

Esta equação define  $q$  em função de  $p$ , ou vice-versa, já que assumimos que  $a$  e  $b$  não podem se anular simultaneamente, caso contrário a equação diferencial parcial deixaria de existir em um ponto. Assim, as equações (2.7) e (2.8) juntas determinam uma família de planos a um parâmetro que inclui o plano tangente à superfície solução em  $(x_0, y_0, u_0)$ .

Podemos garantir, no entanto, que esta família de planos intercepta-se ao longo de uma única reta passando por  $(x_0, y_0, u_0)$ , que é exatamente a reta

$$\frac{x - x_0}{a(x_0, y_0, u_0)} = \frac{y - y_0}{b(x_0, y_0, u_0)} = \frac{u - u_0}{c(x_0, y_0, u_0)}. \quad (2.9)$$

De fato, diferenciando as equações (2.7) e (2.8) com relação a  $p$ , segue que

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{x - x_0}{y - y_0} = -\frac{a(x_0, y_0, u_0)}{b(x_0, y_0, u_0)},$$

donde

$$\frac{x - x_0}{a(x_0, y_0, u_0)} = \frac{y - y_0}{b(x_0, y_0, u_0)}.$$

Substituindo esta relação em (2.7), temos

$$\begin{aligned} u - u_0 &= p(x - x_0) + q \frac{b(x_0, y_0, u_0)}{a(x_0, y_0, u_0)}(x - x_0) = \frac{pa(x_0, y_0, u_0) + qb(x_0, y_0, u_0)}{a(x_0, y_0, u_0)}(x - x_0) \\ &= \frac{c(x_0, y_0, u_0)}{a(x_0, y_0, u_0)}(x - x_0), \end{aligned}$$

e daí obtemos a segunda relação:

$$\frac{u - u_0}{c(x_0, y_0, u_0)} = \frac{x - x_0}{a(x_0, y_0, u_0)}.$$

O vetor direção da reta dada pela equação (2.9) é o vetor  $(a(x_0, y_0, u_0), b(x_0, y_0, u_0), c(x_0, y_0, u_0))$ . Portanto, podemos garantir que o vetor  $(x'(0), y'(0), u'(0))$  será tangente à superfície solução passando por  $(x_0, y_0, u_0)$  desde que ele seja um múltiplo escalar deste vetor direção. Reparametrizando a curva, se necessário, podemos tomar a constante de proporcionalidade como sendo 1. Como este argumento pode ser repetido para todo ponto na curva, segue que a curva  $(x(t), y(t), u(t))$  que satisfaz o sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), u(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), u(t)) \\ u'(t) = c(x(t), y(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.10)$$

está contida em uma superfície solução. Estas curvas são chamadas as **curvas características** da equação quasilinear e o sistema de equações diferenciais ordinárias é chamado o **sistema de equações características** ou, simplesmente, **sistema característico**. Observe que no caso linear, em que os coeficientes  $a, b$  não dependem de  $u$ , as projeções destas curvas características no plano  $xy$  são as curvas características no sentido do capítulo anterior. Uma superfície solução deverá ser a união de todas estas curvas que interceptam transversalmente uma determinada curva inicial dada, embora isso não seja uma condição suficiente. Assim, para obtermos uma superfície solução, precisamos primeiramente resolver o sistema característico sujeito à condição inicial

$$\begin{cases} x(s, 0) = x_0(s) \\ y(s, 0) = y_0(s) \\ u(s, 0) = u_0(s) \end{cases} \quad (2.11)$$



para cada  $s$  fixado, onde  $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$  é uma parametrização da curva inicial. Uma superfície que satisfaz estas condições é chamada uma **superfície integral** (porque para obtê-la é necessário integrar o campo vetorial  $(a, b, c)$ ), mas não necessariamente uma superfície solução, pois não é sempre verdade que ela pode ser escrita como um gráfico de uma função de  $(x, y)$ . Para que isso seja verdade, uma vez obtida a solução

$$(x(s, t), y(s, t), u(s, t)),$$

é necessário encontrar  $s$  e  $t$  em função de  $x$  e  $y$ ,

$$s = s(x, y), t = t(x, y)$$

de modo que a solução da equação quasilinear possa ser escrita na forma

$$u = u(s(x, y), t(x, y)) = u(x, y).$$

Isso nem sempre é possível ao longo de todo o plano ou domínio dado. O motivo é que, embora as curvas características não se interceptam (pelo teorema de unicidade para soluções de equações diferenciais ordinárias), não existe razão a priori para impedir que as suas projeções no plano  $xy$  se interceptem; assim, em um ponto de interseção das **projeções características**, poderá haver um conflito entre duas informações potencialmente diferentes transmitidas a partir de uma condição inicial, e a solução deixa de existir naquele ponto. Esta situação não ocorre no caso linear porque as projeções características são as soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano. O que acontece quando as projeções características se interceptam será estudado com mais detalhe no próximo capítulo.

**Exemplo 2.3.** O método das características residindo no espaço tridimensional também pode ser usado para resolver as equações lineares de primeira ordem, sendo mais simples de usar que o método das características do capítulo anterior. Como exemplo, vamos usá-lo para resolver a equação linear

$$\begin{cases} xu_x + (x + y)u_y = u + 1, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

As curvas características devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \\ u' = u + 1 \end{cases} .$$

A curva inicial pode ser parametrizada por

$$\begin{cases} x(s, 0) = s \\ y(s, 0) = 0 \\ u(s, 0) = s^2 \end{cases} .$$

Observe que o vetor tangente a esta curva no ponto  $(s, 0, s^2)$  é o vetor  $(1, 0, 2s)$ , enquanto que a curva característica que intercepta a curva no ponto  $(s, 0, s^2)$  tem vetor tangente  $(s, s + 0, s^2 + 1)$ ; como os vetores  $(1, 0, 2s)$  e  $(s, s, s^2 + 1)$  nunca são paralelos, a curva inicial intercepta as curvas características da equação sempre transversalmente.

Resolvendo por integração simples

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = x(t) \\ x(s, 0) = s \end{cases}$$

para cada  $s$  fixado, obtemos

$$x(s, t) = se^t.$$

Daí podemos resolver a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = y(t) + se^t \\ y(s, 0) = 0 \end{cases}$$

para cada  $s$  fixado, multiplicando a equação pelo fator integrante  $e^{-t}$ , obtendo

$$y(s, t) = ste^t.$$

Finalmente, resolvemos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = u(t) + 1 \\ u(s, 0) = s^2 \end{cases}$$

obtendo

$$u(s, t) = (s^2 + 1)e^t - 1.$$

Para escrever  $s, t$  em função de  $x, y$ , note que  $t = y/x$ , donde  $s = xe^{-y/x}$ . Assim,

$$u(x, y) = (x^2 e^{-2y/x} + 1)e^{y/x} - 1 = x^2 e^{-y/x} + e^{y/x} - 1.$$

Esta solução, no entanto, não vale se  $x = 0$ . O motivo é que não podemos escrever  $t$  em função de  $x, y$  quando  $x = 0$ : a superfície integral gerada pelas curvas características que interceptam transversalmente a curva inicial dada não pode ser escrita como um gráfico de uma função de  $x, y$  na vizinhança do ponto  $(0, 0)$ .  $\square$

**Exemplo 2.4.** O método das características introduzido neste capítulo também pode ser usado para resolver mais facilmente as equações lineares com coeficientes constantes. Por exemplo, no problema de valor inicial para a equação do transporte

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

as curvas características desta equação devem satisfazer

$$\begin{cases} x'(t) = c \\ t'(t) = 1 \\ u'(t) = 0 \end{cases},$$

sujeitas à condição inicial (i.e., parametrização da curva inicial)

$$x(0) = s, t(0) = 0 \text{ e } u(0) = f(s).$$

o que leva a

$$\begin{aligned} x &= s + ct, \\ t &= t \\ u &= f(s). \end{aligned}$$

Escrevendo  $s, t$  em função de  $x, t$  obtemos  $s = x - ct$ , logo

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

No capítulo anterior, esta solução foi obtida independentemente, e menos simplesmente, através da regra da cadeia (Teorema 1.1 e seu corolário) e pela transformada de Fourier (Exercício 1.1).  $\square$

### 2.1.2 Exercícios

**Exercício 2.1.** Nos itens a seguir, resolva o problema de Cauchy para a equação quasilinear dada, determinando o domínio da solução.

- (a) 
$$\begin{cases} xu_x - yu_y = u^2, \\ u(x, 1) = 1. \end{cases}$$
- (b) 
$$\begin{cases} uu_x + xu_y = y, \\ u(0, y) = -y, \quad y > 0. \end{cases}$$
- (c) 
$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = u^2 + 1, \\ u(x, 0) = -x^2, \quad x > 0. \end{cases}$$
- (d) 
$$\begin{cases} uu_x + uu_y = -x - y, \\ u(s, -s) = 2s, \quad s > 0. \end{cases}$$
- (e) 
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = xu, \\ u(a, a \cos s) = a \sin s, \quad 0 < s < \pi, a \in \mathbb{R}, a > 0. \end{cases}$$

### 2.1.3 O Problema de Cauchy para Equações Quasilineares Bidimensionais

Relembrando as definições da seção anterior, consideraremos uma equação quasilinear de primeira ordem na forma

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.12)$$

onde  $\Omega$  é um aberto e  $a, b, c \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ , com  $a$  e  $b$  nunca se anulando simultaneamente. Uma superfície  $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$  é chamada uma **superfície integral** para esta equação, se para todo ponto  $(x, y, z) \in \Sigma$ , o vetor  $(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$  é tangente a  $\Sigma$ ; se  $\Sigma$  puder ser escrita como o gráfico de uma função  $z = u(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ , isto é equivalente a dizer que  $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$  em  $\Omega$ , isto é, que  $u$  é uma solução para a equação quasilinear, e dizemos que  $\Sigma$  é uma **superfície solução**. As curvas que satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = c(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

são chamadas as **curvas características** associadas à equação quasilinear (2.12). O sistema de equações diferenciais ordinárias que a define é chamado o **sistema de equações características** ou, simplesmente, **sistema característico**.

**Proposição 2.5.** *Se uma superfície  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  é a união de curvas características para a equação quasilinear (2.12), então ela é uma superfície integral para ela. Reciprocamente, toda superfície integral  $z = u(x, y)$  é a união de curvas características.*

**Prova.** A primeira afirmação é óbvia, já que por todo ponto  $p$  de  $\Sigma$  passa uma curva característica  $\Gamma$  contida na superfície e o vetor tangente à uma curva característica por definição tem a direção do *vetor característico*  $(a, b, c)$ : como o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $p$  pertence ao plano tangente  $T_p\Sigma$ , porque  $\Gamma \subset \Sigma$ , concluímos que em todo ponto da superfície o vetor característico está contido no plano tangente à superfície naquele ponto.

Para provar a recíproca, seja  $\Sigma$  uma superfície integral que é o gráfico de uma função  $z = u(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ . Dado um ponto  $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0)) \in \Sigma$ , seja  $\Gamma$  a curva característica que passa por este ponto. Mostraremos que  $\Gamma \subset \Sigma$ .

De fato, seja  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  uma parametrização de  $\Gamma$  satisfazendo

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = c(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

e  $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ ; como o vetor tangente à curva característica  $\Gamma$  em  $(x_0, y_0, z_0)$  não é paralelo ao eixo  $u$ , esta parametrização faz sentido. Defina

$$w(t) = z(t) - u(x(t), y(t)). \quad (2.13)$$

Provaremos que  $w \equiv 0$ , isto é,  $z(t) = u(x(t), y(t))$  para todo  $t$  e portanto  $\Gamma \subset \Sigma$ . De fato, temos

$$w(0) = z(0) - u(x(0), y(0)) = z_0 - u(x_0, y_0) = 0$$

e

$$\begin{aligned} w'(t) &= z'(t) - u_x(x(t), y(t))x'(t) - u_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= c(x(t), y(t), z(t)) - a(x(t), y(t), z(t))u_x(x(t), y(t)) - b(x(t), y(t), z(t))u_y(x(t), y(t)) \\ &= c(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t))) \\ &\quad - a(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_x(x(t), y(t)) - b(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_y(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Portanto,  $w$  é a solução única do problema de valor inicial

$$\begin{cases} w'(t) = c(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t))) - a(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_x(x(t), y(t)) \\ \quad - b(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_y(x(t), y(t)), \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, a solução identicamente nula também é uma solução para este problema, porque  $u$  é uma solução para a equação quasilinear. Por unicidade de solução para uma equação diferencial ordinária, segue que  $w \equiv 0$ . ■

**Corolário 2.6.** *Se duas superfícies solução têm um ponto em comum, então elas se interceptam ao longo de toda a curva característica que passa por este ponto. Reciprocamente, se duas superfícies integrais interceptam-se transversalmente ao longo de uma curva, então esta curva é uma curva característica.*

**Prova.** A primeira afirmação é uma consequência direta da Proposição 2.5. Para provar a segunda afirmação, sejam  $\Sigma_1, \Sigma_2$  duas superfícies integrais que se interceptam transversalmente ao longo de uma curva  $\Gamma$ . Dado um ponto qualquer  $p \in \Gamma$ , considere os planos tangentes  $T_p\Sigma_1, T_p\Sigma_2$ . Como a intersecção das superfícies integrais é transversal, por definição os planos  $T_p\Sigma_1$  e  $T_p\Sigma_2$  também interceptam-se transversalmente, isto é, ao longo de uma única direção comum, a qual obviamente é a direção tangente à curva  $\Gamma$  em  $p$ . Esta direção é dada pelo vetor  $(a, b, c)$ , já que ambos os planos contêm este vetor, por definição de superfície integral. Segue que a tangente à curva  $\Gamma$  em  $p$  está na direção do vetor  $(a, b, c)$ , logo  $\Gamma$  é uma curva característica. ■

A Proposição 2.5 pode ser vista como descrevendo a *solução geral* para a equação quasilinear: a solução geral é o conjunto de superfícies solução, as quais por sua vez são uniões de curvas características. Uma solução particular  $u(x, y)$  pode ser obtida através da especificação de uma superfície solução. A especificação de uma superfície integral em geral pode ser feita através de uma curva inicial  $\tilde{\Gamma}$  no espaço  $xyz$  que seja capaz de gerar uma tal superfície. Uma condição necessária é que a curva  $\tilde{\Gamma}$  seja transversal às curvas características: as curvas características que passam pelos pontos de  $\tilde{\Gamma}$  geram uma superfície integral. Se parametrizarmos  $\tilde{\Gamma}$  por

$$\tilde{\gamma}(s) = (\alpha(s), \beta(s), f(s)),$$

então especificar a superfície solução que passa por  $\tilde{\Gamma}$  é equivalente a encontrar a solução  $u(x, y)$  para a equação quasilinear que satisfaça a condição

$$f(s) = u(\alpha(s), \beta(s))$$

sobre a curva inicial  $\Gamma$  parametrizada por  $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ . É necessário, pois, saber que condições a curva inicial  $\Gamma$  deve satisfazer para que a curva  $\tilde{\Gamma}$  gere uma superfície integral que seja o gráfico de uma função

$z = u(x, y)$ , para que possamos estabelecer a existência de uma solução (pelo menos local) para o problema de Cauchy assim definido. Segue do próximo teorema que a única condição exigida é que a curva inicial  $\Gamma$  intercepte transversalmente as projeções das curvas características em  $\Omega$ . A grande diferença com relação ao caso linear é que no caso quasilinear as projeções características não são independentes da condição inicial: enquanto que no caso linear as projeções características são exclusivamente associadas à equação, e não se alteram quando a condição inicial do problema muda, no caso quasilinear a sua definição depende também da condição  $f$  sobre a curva inicial  $\Gamma$ . Isso se deve ao fato de que no caso quasilinear o vetor tangente às projeções características no ponto de interseção com a curva inicial é o vetor  $(a(\alpha(s), \beta(s), f(s)), b(\alpha(s), \beta(s), f(s)))$ .

**Teorema 2.7.** (Existência e Unicidade Locais para o Problema de Cauchy Quasilinear) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $\Gamma \subset \Omega$  uma curva de classe  $C^1$ . Seja  $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  uma parametrização de  $\Gamma$  de classe  $C^1$ , definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Suponha que  $a, b, c \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ ,  $f \in C^1(I)$ , com  $a$  e  $b$  não se anulando simultaneamente em nenhum ponto  $x \in \Omega$  e satisfazendo*

$$\det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } s \in I. \quad (2.14)$$

Então, o problema de Cauchy quasilinear

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s) & \text{se } s \in I, \end{cases} \quad (2.15)$$

possui uma única solução de classe  $C^1$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ .

**Prova.** Seja  $(x(s, t), y(s, t), u(s, t))$  a solução local, definida em uma vizinhança  $V_0$ , do sistema de equações características

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = a(x(s, t), y(s, t), u(s, t)) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = b(x(s, t), y(s, t), u(s, t)) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = c(x(s, t), y(s, t), u(s, t)) \end{cases}$$

sujeito à condição inicial

$$\begin{cases} x(s, 0) = \alpha(s) \\ y(s, 0) = \beta(s) \\ u(s, 0) = f(s) \end{cases} .$$

A hipótese do determinante significa geometricamente que a curva inicial intercepta as projeções das curvas características em  $\Omega$  transversalmente; analiticamente, através do Teorema da Função Implícita, ela permite encontrar localmente  $s, t$  em função de  $x, y$  (ou seja, nesta vizinhança da curva  $\Gamma$ , a superfície escreve-se como o gráfico de uma função de  $x, y$ ). De fato, para cada  $s$  temos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}(s, 0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s, 0) & \frac{\partial x}{\partial t}(s, 0) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, 0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s, 0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & a(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \\ \beta'(s) & b(\alpha(s), \beta(s), f(s)) \end{bmatrix} \neq 0,$$

logo, pelo Teorema da Função Implícita, em uma vizinhança  $V \subset V_0$  de  $\Gamma$  podemos resolver

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \end{cases}$$

para  $s$  e  $t$  em termos de  $x$  e  $y$ , obtendo

$$\begin{cases} s = s(x, y) \\ t = t(x, y) \end{cases} ,$$

com

$$s(\alpha(s), \beta(s)) = s \text{ e } t(\alpha(s), \beta(s)) = 0.$$

Conseqüentemente, podemos definir  $u$  como uma função de  $x$  e  $y$ :

$$u = u(x, y) = u(s(x, y), t(x, y)).$$

Vamos verificar que a função  $u$  assim definida satisfaz o problema de Cauchy. A condição inicial é satisfeita porque

$$u(\alpha(s), \beta(s)) = u(s, 0) = f(s).$$

Que  $u$  satisfaz a equação quasilinear pode ser visto através da regra da cadeia: como

$$\begin{aligned} u_x &= u_s s_x + u_t t_x, \\ u_y &= u_s s_y + u_t t_y, \end{aligned}$$

segue que

$$au_x + bu_y = (as_x + bs_y)u_s + (at_x + bt_y)u_t.$$

Mas, novamente pela regra da cadeia,

$$as_x + bs_y = s_x x_t + s_y y_t = s_t = 0,$$

pois  $s, t$  são variáveis independentes, e

$$at_x + bt_y = t_x x_t + t_y y_t = t_t = 1.$$

Portanto,

$$au_x + bu_y = u_t = c.$$

A unicidade da solução segue da teoria de unicidade para soluções de equações diferenciais ordinárias. Se  $u(x, y)$  é uma solução qualquer para o problema de Cauchy na vizinhança  $V$  encontrada acima, nós construímos uma curva  $(x(t), y(t)) \subset V$  como sendo a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \end{cases}$$

sujeito à condição inicial  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ , onde  $(x_0, y_0)$  é um ponto qualquer do domínio da superfície solução. Defina agora

$$u(t) = u(x(t), y(t)).$$

Então  $u(t)$  satisfaz

$$u'(t) = u_x x_t + u_y y_t = au_x + bu_y = c(x(t), y(t), u(x(t), y(t))),$$

de modo que a curva  $(x(t), y(t), u(t))$  satisfaz o sistema de equações características e passa por um ponto  $(x_0, y_0, u_0)$  na superfície. Pelo teorema de unicidade para equações diferenciais ordinárias, esta curva é única. ■

A seguir, vamos ilustrar o teorema anterior considerando alguns exemplos de problemas de valor inicial para equações quasilineares que surgem em situações físicas.

**Exemplo 2.8.** Primeiro vamos analisar o problema de valor inicial para a equação cinemática da onda

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde  $c$  e  $f$  são funções de classe  $C^1$ . O sistema característico é

$$\begin{cases} x' = c(u) \\ t' = 1 \\ u' = 0 \end{cases},$$

com condição inicial parametrizada por

$$\begin{cases} x(s, 0) = s \\ t(s, 0) = 0 \\ u(s, 0) = f(s) \end{cases}.$$

Como

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}(s, 0) = \det \begin{bmatrix} 1 & u(s, 0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

sabemos que existe uma solução local em uma vizinhança do eixo  $x$ . Integrando cada equação do sistema característico e levando em conta as condições iniciais, obtemos as curvas características

$$\begin{aligned} x &= c(u)t + s, \\ t &= t, \\ u &= f(s). \end{aligned}$$

Observe que, dado um ponto inicial  $(x_0, 0)$  no eixo  $x$ , a curva característica emanando deste ponto é uma reta, com inclinação variável  $c(u(x_0)) = c(f(x_0))$  dependendo do ponto  $x_0$ : é a reta  $x = c(f(x_0))t + x_0$ . Portanto, apesar do problema ser não-linear, vemos que suas curvas características são retas. Além disso, como  $u' = 0$ , segue que  $u$  é constante ao longo destas retas características (consequência da equação ser homogênea), logo o valor de  $u$  nos pontos  $(x_0, 0)$  é transmitido ao longo das retas características com velocidade variável igual a  $c(f(x_0))$ . A solução é, portanto,  $u(x, t) = c(f(x_0))$  se  $x = c(f(x_0))t + x_0$ .

Queremos investigar a existência de uma solução global, definida para todo  $t > 0$ . Resolvendo  $s, t$  implicitamente em função de  $x, t$ , segue que

$$u(x, t) = f(x - c(u)t). \quad (2.16)$$

Obviamente esta é uma equação implícita que ainda não é a solução  $u$ . Sabemos que existe uma solução local em uma vizinhança do eixo  $x$ , mas para que exista uma solução global  $u$  é necessário poder escrever a variável  $s$  explicitamente em função de  $x, t$ . Para isso, é necessário que as retas características não se interceptem: cada ponto  $(s, t)$  deve corresponder a um único ponto  $(x, t)$ , o que não acontece no ponto de interseção de duas retas características, quando diferentes valores de  $s$  dão origem a um mesmo ponto  $(x, t)$ . O teorema de existência e unicidade local garante que isso não ocorre durante um certo tempo (ou seja, próximo a vizinhança do eixo  $x$ ), mas não pode garantir que isso eventualmente não acontecerá, para algum valor de  $t$ . Para que as retas características nunca se interceptem, a função  $c \circ f$  precisa ser não-decrescente, ou seja, ambas as funções  $c$  e  $f$  devem ser não-decrescentes. Quando isso ocorre, existe uma solução global para o problema de valor inicial.  $\square$

**Exemplo 2.9.** Vamos considerar agora o seguinte problema específico de valor inicial para a equação de Burgers:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-1/x} & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0,$$

Neste caso temos  $c(u) = u$  e  $f$  é uma função de classe  $C^\infty$ . Ambas são funções não-decrescentes. As características emanando de um ponto  $(s, 0)$  no eixo  $x$  tem velocidade  $c(u(s, 0)) = f(s)$ . Logo,  $c = 0$

se  $x \leq 0$  e as retas características são retas verticais; se  $x > 0$ , então  $c = e^{-1/x}$  e as características começam a inclinar-se para a direita, tendendo à velocidade 1 quando  $x \rightarrow \infty$ , descrevendo uma situação em que as retas características tendem a se espalhar (esboce o diagrama característico). A região onde as características se espalham é chamada uma *onda de rarefação*. A solução do problema é dada implicitamente por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-1/s} & \text{onde } x - s = te^{-1/s}, \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

□

Terminamos esta seção dando uma solução mais completa para o problema de Cauchy quasilinear, considerando também o caso em que a curva inicial é uma projeção característica.

**Teorema 2.10.** (Solução do Problema de Cauchy Quasilinear) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto. Suponha que  $a, b, c \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ ,  $f \in C^1(I)$  e que  $a, b$  não se anulam simultaneamente em nenhum ponto  $(x, y) \in \Omega$ . Considere o problema de Cauchy quasilinear*

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s) & \text{se } s \in I, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde  $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  é a parametrização de uma curva  $\Gamma \subset \Omega$  de classe  $C^1$ . Defina a curva  $\tilde{\Gamma}(s) = (\alpha(s), \beta(s), f(s))$ . Valem as seguintes possibilidades:

- (i) Se  $\Gamma$  é transversal às projeções características do problema de Cauchy, então (2.17) tem uma única solução de classe  $C^1$  na vizinhança de  $\Gamma$ ; a superfície solução é gerada por  $\tilde{\Gamma}$  e pelas curvas características que interceptam  $\tilde{\Gamma}$  transversalmente.
- (ii) Se  $\Gamma$  é uma projeção característica e  $\tilde{\Gamma}$  é uma curva característica da equação quasilinear, então (2.17) tem infinitas soluções.
- (iii) Se  $\Gamma$  é uma projeção característica e  $\tilde{\Gamma}$  não é uma curva característica da equação quasilinear, então (2.17) não tem solução.

**Prova.** A parte (i) é essencialmente o Teorema 2.7. Para provar a parte (ii), considere uma curva plana qualquer  $\Delta$  que intercepta a curva  $\Gamma$  em um ponto  $\gamma(s_0) = (\alpha(s_0), \beta(s_0))$  e que é transversal às projeções características. Seja  $\delta(s) = (\varphi(s), \psi(s))$  uma parametrização de  $\Delta$  com  $\delta(s_0) = \gamma(s_0)$ , e seja  $g$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $g(s_0) = f(s_0)$ . Como  $\Delta$  é transversal às projeções características, pela parte (i) o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ u(\varphi(s), \psi(s)) = g(s) & \text{se } s \in I, \end{cases}$$

tem uma única solução  $u$  na vizinhança de  $\Delta$ . Além disso, a superfície solução contém a curva  $\tilde{\Delta}(t) = (\delta(t), g(t))$  e todas as curvas características que interceptam  $\tilde{\Delta}$ . Em particular, a superfície solução contém  $\tilde{\Gamma}$ , e portanto a solução  $u$  também é solução do problema de Cauchy com condição inicial  $f$  em  $\Gamma$ . Como existe uma infinidade de escolhas possíveis para  $\delta(t)$  e  $g(t)$ , o problema tem uma infinidade de soluções.

A demonstração de (iii) segue por contradição. Suponha por absurdo que o problema de Cauchy tenha solução neste caso. Derivando a condição inicial, obtemos

$$\alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s), f(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s), f(s)) = f'(s).$$

Por outro lado, a equação quasilinear no ponto  $(\alpha(s), \beta(s), f(s))$  fica

$$a(\alpha(s), \beta(s), f(s))u_x(\alpha(s), \beta(s), f(s)) + b(\alpha(s), \beta(s), f(s))u_y(\alpha(s), \beta(s), f(s)) = c(\alpha(s), \beta(s), f(s)).$$



Comparando as equações e usando o fato que os vetores em  $\mathbb{R}^2$

$$(\alpha'(s), \beta'(s)) \quad \text{e} \quad (a(\alpha(s), \beta(s), f(s)), b(\alpha(s), \beta(s), f(s)))$$

são iguais, pois  $\Gamma$  é uma projeção característica, concluímos que os vetores em  $\mathbb{R}^3$

$$(\alpha'(s), \beta'(s), f'(s)) \quad \text{e} \quad (a(\alpha(s), \beta(s), f(s)), b(\alpha(s), \beta(s), f(s)), c(\alpha(s), \beta(s), f(s)))$$

também são iguais, contradizendo o fato de que  $\tilde{\Gamma}$  não é característica. ■

Observe que o Teorema 2.10 trata apenas dos casos extremos. Para uma análise de alguns casos intermediários (por exemplo, quando a curva inicial é tangente a uma projeção característica em apenas um ponto), veja [Íorio].

### 2.1.4 Exercícios

**Exercício 2.2.** *Nos itens a seguir, resolva o problema de Cauchy para as equações quasilineares, esboçando as projeções das características.*

- (a) 
$$\begin{cases} u_t + uu_x = -ku^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
- (b) 
$$\begin{cases} u_t + cu_x = xu & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
- (c) 
$$\begin{cases} u_t - xt u_x = x & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
- (d) 
$$\begin{cases} u_t + u_x = u^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Exercício 2.3.** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -ku & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante positiva. *Determine uma condição em  $f$  para que uma solução exista para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ , e determine uma solução em forma implícita.*

**Exercício 2.4.** *Enuncie e demonstre o Teorema 2.1 no caso geral  $n$ -dimensional.*

**Exercício 2.5.** *Demonstre o Teorema 2.2 no caso geral  $n$ -dimensional.*

**Exercício 2.6.** ([John], pág. 18) *Seja  $u$  uma solução de classe  $C^1$  da equação linear*

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = -u \quad \text{em } D,$$

onde  $D$  é o disco unitário do plano. *Suponha que  $a(x, y)x + b(x, y)y > 0$  na fronteira de  $D$ . Prove que  $u$  é a função identicamente nula. (Sugestão: Mostre que  $\max_D u \leq 0$  e  $\min_D u \geq 0$ , usando as condições para um máximo em um ponto de fronteira.)*

## 2.2 Equações Não-Lineares

A forma mais geral de uma equação diferencial parcial de primeira ordem é

$$F(\mathbf{x}, u, \nabla u) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.18)$$

onde  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada. Costuma-se usar a notação

$$F = F(\mathbf{x}, z, \mathbf{p}) = (x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n),$$

onde  $z$  é a variável que será substituída pela solução  $u$  e  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  é a variável que será substituída pelo gradiente  $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ . Assim, por exemplo, no caso linear bidimensional  $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + d(x, y) = 0$ , temos  $F(x, y, z, p, q) = a(x, y)p + b(x, y)q + c(x, y)z + d(x, y)$ , enquanto que no caso quasilinear bidimensional  $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$  temos  $F(x, y, z, p, q) = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q - c(x, y, z)$ . Observe que no nosso estudo das equações lineares de primeira ordem requerimos que  $F_p = a(x, y)$ ,  $F_q = b(x, y)$ ,  $F_z = c(x, y)$  fossem de classe  $C^1$  para que pudéssemos obter soluções  $u$  de classe  $C^1$ ; por este motivo, assumiremos que  $F$  é de classe  $C^2$ . [Embora, no caso linear, basta que  $F$  seja de classe  $C^2$  nas variáveis  $z, \mathbf{p}$  e apenas de classe  $C^1$  na variável  $\mathbf{x}$ , o método que utilizaremos para resolver a equação não-linear geral necessitará que  $F$  seja mais regular; como conseqüência, a solução que obteremos será mais regular, de classe  $C^2$ , mas o teorema não será uma simples extensão do caso quasilinear, que tem hipóteses mais fracas com relação à regularidade dos coeficientes.] Além disso, para que a equação acima de fato represente uma equação diferencial parcial, também precisamos assumir que a derivada de  $F$  em relação à variável  $\mathbf{p}$ ,  $F_{\mathbf{p}} = (F_{p_1}, \dots, F_{p_n})$ , é sempre um vetor não-nulo (no caso linear bidimensional, isso corresponde a exigir que os coeficientes  $a$  e  $b$  não se anulem simultaneamente em nenhum ponto do domínio).

Mais uma vez utilizaremos o método das características para resolver a equação não-linear, convertendo-a em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Consideraremos apenas o caso bidimensional, que ilustrará bem as idéias geométricas envolvidas. Neste caso escrevemos

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.19)$$

onde  $p, q$  serão substituídas por  $u_x, u_y$ , respectivamente. Primeiro, desenvolveremos o método tentando encontrar curvas características ao longo das quais uma equação diferencial ordinária substitui a equação diferencial parcial. Depois veremos como o método pode ser desenvolvido a partir de um ponto de vista geométrico. A geometria no caso não-linear é bem mais complexa que a geometria no caso quasilinear. Ao invés de considerarmos curvas integrais, precisaremos usar *faixas*, um conceito que será definido na seqüência.

### 2.2.1 A Abordagem da Derivada Total

A principal dificuldade para a equação não-linear mais geral é que não há uma derivada direcional que defina explicitamente direções características ao longo das quais a equação diferencial parcial possa ser reduzida a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Vamos tentar descobrir estas direções através de alguma análise. Seja  $C(t) = (x(t), y(t))$  uma parametrização de uma curva em  $\Omega$ . Então a derivada total de uma função  $u$  ao longo de  $C$  é

$$u'(t) = u_x x'(t) + u_y y'(t) = p x'(t) + q y'(t).$$

Nosso objetivo é determinar se existe alguma direção  $(x'(t), y'(t))$  que tem significado especial para a equação diferencial parcial. Para isso, calculamos as derivadas totais de  $p$  e  $q$  ao longo de  $C$ , isto é, das derivadas parciais  $u_x$  e  $u_y$ , assumindo que  $u$  é uma função de classe  $C^2$  e portanto possui derivadas parciais de segunda ordem:

$$p'(t) = \frac{d}{dt} u_x = u_{xx} x'(t) + u_{xy} y'(t),$$

$$q'(t) = \frac{d}{dt} u_y = u_{yx} x'(t) + u_{yy} y'(t).$$

Agora, se  $u$  é uma solução da equação diferencial parcial, isto é, se  $F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0$ , derivando esta identidade em relação a  $x$  e  $y$  obtemos:

$$\begin{aligned} F_x + F_z u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{yx} &= 0, \\ F_y + F_z u_y + F_p u_{xy} + F_q u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Comparando estas relações, e observando que , vemos que uma escolha razoável para a direção  $(x'(t), y'(t))$  é

$$\begin{cases} x'(t) = F_p \\ y'(t) = F_q \end{cases} . \quad (2.20)$$

(Se lembrarmos que no caso quasilinear temos  $F_p = a(x, y)$  e  $F_q = b(x, y)$ , isso parece ainda mais razoável.) Com esta escolha, a derivada total de  $u$  ao longo de  $C$  passa a ser

$$u'(t) = pF_p + qF_q \quad (2.21)$$

e as derivadas totais de  $p$  e  $q$  ao longo de  $C$  tornam-se

$$p'(t) = u_{xx}F_p + u_{xy}F_q = -F_x - F_u p, \quad (2.22)$$

$$q'(t) = u_{yx}F_p + u_{yy}F_q = -F_y - F_u q. \quad (2.23)$$

Em resumo, temos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x'(t) = F_p(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) \\ y'(t) = F_q(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) \\ u'(t) = p(t)F_p(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) + q(t)F_q(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) \\ p'(t) = -F_x(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) - p(t)F_u(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) \\ q'(t) = -F_y(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) - q(t)F_u(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) \end{cases} , \quad (2.24)$$

ou, em notação mais compacta,

$$\begin{cases} x' = F_p \\ y' = F_q \\ u' = pF_p + qF_q \\ p' = -F_x - pF_u \\ q' = -F_y - qF_u \end{cases} . \quad (2.25)$$

As soluções deste sistema são curvas no espaço  $\mathbb{R}^5$ , que são as **curvas características** associadas à equação diferencial parcial. Uma condição inicial da forma  $u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s)$  para uma curva  $\Gamma$  de classe  $C^1$  contida no aberto  $\Gamma$  traduz-se então, para cada  $s$  fixado, por

$$\begin{cases} x(s, 0) = \alpha(s) \\ y(s, 0) = \beta(s) \\ u(s, 0) = f(s) \\ F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s, 0), q(s, 0)) = 0 \\ \alpha'(s)p(s, 0) + \beta'(s)q(s, 0) = f'(s) \end{cases} . \quad (2.26)$$

A penúltima condição é obtida substituindo  $t = 0$  na equação diferencial parcial

$$F(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) = 0$$

para cada valor fixado de  $s$ , assumindo que ela possa ser resolvida para  $p(s, 0)$  e  $q(s, 0)$ . A última condição é obtida derivando  $u$  sobre a curva inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(\alpha(s), \beta(s)) = u_x(\alpha(s), \beta(s))\alpha'(s) + u_y(\alpha(s), \beta(s))\beta'(s) = p(s, 0)\alpha'(s) + q(s, 0)\beta'(s).$$

## 2.2.2 A Abordagem Geométrica

Vamos agora obter as curvas características para a equação não-linear

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.27)$$

através de uma abordagem puramente geométrica. Esta abordagem nos permitirá enxergar o sistema característico visto na subseção anterior como descrevendo um objeto imaginável no espaço tridimensional (a chamada “faixa característica”), ao invés de curvas no espaço pentadimensional.

Uma solução  $u = u(x, y)$  para a equação não-linear define uma superfície bidimensional no espaço  $xyu$ . Considere uma tal superfície solução. Dado um ponto  $(x_0, y_0, u_0)$  desta superfície, procuramos condições sobre uma curva  $(x(t), y(t), u(t))$  passando por este ponto no instante  $t = 0$  para que ela esteja inteiramente contida na superfície. Como primeiro passo, exigimos que o vetor tangente  $(x'(0), y'(0), u'(0))$  esteja no plano tangente à superfície solução no ponto  $(x_0, y_0, u_0)$ . Este plano tangente tem equação

$$u - u_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \quad (2.28)$$

onde  $p = u_x(x_0, y_0)$  e  $q = u_y(x_0, y_0)$ , ou seja, seu vetor normal é o vetor  $(p, q, -1)$ . Entretanto, os valores de  $p$  e  $q$  são desconhecidos, já que não sabemos qual é a solução  $u$ , e à princípio a equação (2.28) definiria uma família a dois parâmetros de planos passando pelo ponto  $(x_0, y_0, u_0)$ . Contudo, sabemos também que os valores de  $p$  e  $q$  estão restringidos pela equação

$$F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0. \quad (2.29)$$

Esta equação define implicitamente  $q$  em função de  $p$ , ou vice-versa (mas não explicitamente, como no caso quasilinear) já que assumimos que  $F_p$  e  $F_q$  não podem se anular simultaneamente, caso contrário a equação diferencial parcial deixaria de existir em um ponto. Assim, as equações (2.28) e (2.29) determinam uma família de planos a um parâmetro passando pelo ponto  $(x_0, y_0, u_0)$ , que inclui o plano tangente à superfície solução em  $(x_0, y_0, u_0)$ .

No caso quasilinear, esta família de planos intercepta-se ao longo de uma única reta passando por  $(x_0, y_0, u_0)$ , que é exatamente a reta

$$\frac{x - x_0}{a(x_0, y_0, u_0)} = \frac{y - y_0}{b(x_0, y_0, u_0)} = \frac{u - u_0}{c(x_0, y_0, u_0)},$$

que tem direção  $(a(x_0, y_0, u_0), b(x_0, y_0, u_0), c(x_0, y_0, u_0))$ . Para a equação quasilinear, o envelope da família de planos é então caracterizado pelo fato de que a sua interseção é uma reta, e esta reta é conhecida. Este fato tornou a análise do caso quasilinear mais simples, em comparação com o caso não-linear geral, onde a situação é mais complicada. Agora, o envelope da família de planos é um cone, chamado um **cone de Monge**. Um dos geradores do cone é tangente à superfície solução e pode ser usado para determinar as características.

Para determinar o envelope da família de planos, assumimos para fixar idéias que  $F_q \neq 0$  na região do espaço pentadimensional  $xyupq$  em consideração. Podemos então determinar implicitamente  $q$  em função de  $p$  em (2.29), ou seja,  $q = q(p)$ . Logo, podemos derivar (2.28) explicitamente e (2.29) implicitamente com respeito a  $p$  obtendo, respectivamente,

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{x - x_0}{y - y_0}$$

e

$$F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0,$$

donde

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q}.$$

Substituindo esta relação em (2.28), obtemos uma segunda relação:

$$u - u_0 = p(x - x_0) + q \frac{F_q}{F_p}(x - x_0) = \frac{pF_p + qF_q}{F_p}(x - x_0),$$

isto é,

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{u - u_0}{pF_p + qF_q}.$$

Assim, para o caso não-linear, temos

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} = \frac{u - u_0}{pF_p + qF_q} \quad (2.30)$$

que é precisamente a equação de uma das retas que geram o cone de Monge, com vetor direção  $(F_p, F_q, pF_p + qF_q)$ ; o ponto  $(x_0, y_0, u_0)$  é um vértice do cone e diferentes geradores são determinados para cada escolha diferente de  $p$  e  $q$  que satisfazem (2.29),  $F_p$  e  $F_q$  sendo então calculados no ponto  $(x_0, y_0, u_0, p, q)$  do espaço pentadimensional. No caso quasilinear, o cone de Monge degenera-se a uma reta.

Como uma primeira condição, requeremos que o vetor tangente à curva em  $(x_0, y_0, u_0)$  esteja na direção deste gerador do cone de Monge, isto é, requeremos que

$$\begin{cases} x'(0) = F_p \\ y'(0) = F_q \\ u'(0) = pF_p + qF_q \end{cases}.$$

Em contraste com o caso quasilinear, este sistema de equações diferenciais não determina ainda a direção do vetor  $(x'(0), y'(0), u'(0))$ , isto é, a direção característica, porque as incógnitas  $p, q$  aparecem nas equações. É necessário encontrar condições sobre  $p'(0)$  e  $q'(0)$  que garantam que o vetor  $(p'(0), q'(0), -1)$  seja normal à superfície solução (apenas um dos geradores do cone de Monge está no plano tangente à superfície solução que passa por  $(x_0, y_0, u_0)$ ). Para determinarmos equações para  $p'(0)$  e  $q'(0)$ , derivando (2.27) com respeito a  $x$  temos

$$F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x = 0,$$

e usando o fato que  $q_x = p_y$  segue que

$$F_x + F_u p + F_p p_x + F_q p_y = 0. \quad (2.31)$$

Conseqüentemente, se  $(x_0, y_0, u_0) = (x(0), y(0), u(0))$  está na superfície solução  $u = u(x, y)$ , segue que

$$p'(0) = \left. \frac{d}{dt} p(x(t), y(t)) \right|_{t=0} = x'(0) p_x + y'(0) p_y = -F_x - p(0) F_u. \quad (2.32)$$

Analogamente, derivando (2.27) com respeito a  $y$  e usando  $p_y = q_x$  obtemos

$$q'(0) = -F_y - q(0) F_u. \quad (2.33)$$

Como este argumento pode ser repetido para cada ponto da curva, obtemos o *sistema característico*

$$\begin{cases} x'(t) = F_p(x, y, u, p, q) \\ y'(t) = F_q(x, y, u, p, q) \\ u'(t) = pF_p(x, y, u, p, q) + qF_q(x, y, u, p, q) \\ p'(t) = -F_x(x, y, u, p, q) - pF_u(x, y, u, p, q) \\ q'(t) = -F_y(x, y, u, p, q) - qF_u(x, y, u, p, q) \end{cases}. \quad (2.34)$$

Assim para cada valor de  $t$ , precisamos determinar 5 valores

$$(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)),$$

que determinam o ponto  $(x(t), y(t), u(t))$  pela qual a curva passa e um plano tangente a esta curva que também é tangente à superfície solução, gerado pelas derivadas direcionais  $p(t)$  e  $q(t)$  (em outras palavras, um plano tangente cujo vetor normal é  $(p(s), q(s), -1)$ ). Este conjunto de planos fixados à curva é chamado uma **faixa característica**; a curva  $(x(t), y(t), u(t))$  é chamada o **suporte** da faixa. As faixas características são construídas a partir de uma **faixa inicial**, do mesmo modo que as curvas características no caso quasilinear são construídas a partir de uma curva inicial. Para determinar uma faixa inicial, partimos de uma curva suporte inicial  $(\alpha(s), \beta(s), f(s))$ . Então, os vetores  $p(s)$  e  $q(s)$  que determinam o plano tangente em cada ponto da faixa inicial devem satisfazer a equação

$$F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) = 0, \quad (2.35)$$

Esta equação é insuficiente para determinar  $p(s)$  e  $q(s)$ . Mas lembramos que, como nós procuramos uma superfície solução  $u = u(x, y)$  passando por esta curva, precisamos também ter

$$f'(s) = u_x \alpha'(s) + u_y \beta'(s)$$

para todo  $s$ , e esta equação pode ser derivada para obtermos

$$f'(s) = u_x \alpha'(s) + u_y \beta'(s) = \alpha'(s)p(s) + \beta'(s)q(s).$$

Conseqüentemente, dada uma curva inicial  $(\alpha(s), \beta(s), f(s))$ , os valores de  $p(s), q(s)$  são obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{cases} F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) = 0 \\ \alpha'(s)p(s) + \beta'(s)q(s) = f'(s) \end{cases}, \quad (2.36)$$

determinando a faixa inicial, a partir da qual as faixas características são construídas.

Resumindo, as faixas características são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = F_p(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = F_q(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = p(s, t)F_p(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) + q(s, t)F_q(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) \\ \frac{\partial p}{\partial t}(s, t) = -F_x(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) - p(s, t)F_z(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) \\ \frac{\partial q}{\partial t}(s, t) = -F_y(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) - q(s, t)F_z(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) \end{cases},$$

sob a condição inicial

$$\begin{cases} x(s, 0) = \alpha(s) \\ y(s, 0) = \beta(s) \\ u(s, 0) = f(s) \\ F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s, 0), q(s, 0)) = 0 \\ \alpha'(s)p(s, 0) + \beta'(s)q(s, 0) = f'(s) \end{cases}.$$

**Exemplo 2.11.** Considere o problema de valor inicial não-linear

$$\begin{cases} u_t + u_x^2 = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = x & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aqui

$$F(x, t, u, p, q) = q + p^2.$$

A reta inicial pode ser parametrizada por

$$\alpha(s) = s, \beta(s) = 0, f(s) = s,$$

de modo que as condições iniciais para  $p$  e  $q$  são dadas por

$$\begin{aligned} F(s, 0, s, p(s), q(s)) &= q(s) + p^2(s) = 0, \\ \alpha'(s)p(s) + \beta'(s)q(s) &= f'(s) \Rightarrow p(s) = 1, \end{aligned}$$

onde  $q(s) = -1$ . Portanto, as condições iniciais associadas a este problema são

$$\begin{cases} x(0) = s \\ t(0) = 0 \\ u(0) = s \\ p(0) = 1 \\ q(0) = -1 \end{cases} .$$

O sistema característico associado à equação é

$$\begin{cases} x'(t) = F_p = 2p \\ t'(t) = F_q = 1 \\ u'(t) = pF_p + qF_q = 2p^2 + q \\ p'(t) = -F_x - pF_u = 0 \\ q'(t) = -F_y - qF_u = 0 \end{cases} .$$

Este sistema é fácil de resolver (na maioria dos casos, resolver analiticamente o sistema característico é muito difícil ou impossível). Integrando a segunda e as duas últimas equações, e levando em conta as condições iniciais, obtemos imediatamente  $t = t$ ,  $p = C_1 = 1$ ,  $q = C_2 = -1$ . Daí, integrando a primeira equação, segue que  $x(t) = 2t + C(s)$ ; como  $x(0) = s$ , segue que  $x(t) = 2t + s$ . Finalmente, integrando a última equação, temos que  $u(t) = (2 \cdot 1 - 1)t + C(s) = t + C(s)$ ; como  $u(0) = s$ , segue que  $u(t) = t + s$ . Em outras palavras, a faixa característica é

$$\begin{cases} x(s, t) = s + 2t \\ t(s, t) = t \\ u(s, t) = s + t \\ p(s, t) = 1 \\ q(s, t) = -1 \end{cases} .$$

Observe que apesar da equação ser não-linear, suas características ( $s$  fixado) são retas. Resolvendo  $(s, t)$  em função de  $(x, t)$ , temos que  $s = x - 2t$  e  $t = t$ , logo a solução do problema de Cauchy é

$$u(x, t) = x - t.$$

Apesar do problema ser não-linear, esta solução é linear em  $x$  e  $t$ . As faixas características neste caso são suportadas por retas com mesmo vetor-direção  $(2, 1, 1)$  e em cada ponto destas retas o plano com o mesmo vetor normal  $(1, -1, -1)$  é afixado.  $\square$

### 2.2.3 Existência de Soluções e Condições para a Unicidade

**Teorema 2.12.** (Existência Local para o Problema de Cauchy Não-Linear) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $\Gamma \subset \Omega$  uma curva de classe  $C^2$ . Seja  $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  uma parametrização de  $\Gamma$  de classe  $C^2$ , definida em um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Suponha que  $F \in C^2(D, \mathbb{R})$ , onde  $D = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , e que  $(F_p, F_q) \neq 0$  em  $D$ . Suponha ainda que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ . Considere o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} F(x, y, u, p, q) = 0 & \text{se } (x, y) \in \Omega, \\ u(\alpha(s), \beta(s)) = f(s) & \text{se } s \in I. \end{cases}$$

Suponha que para cada valor de  $s \in I$  o sistema

$$\begin{cases} F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) = 0 \\ \alpha'(s)p(s) + \beta'(s)q(s) = f'(s) \end{cases}$$

tem solução para  $(p(s), q(s))$ , produzindo uma faixa inicial  $(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s))$  de classe  $C^2$  contida em  $D$  tal que

$$\det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & F_p(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) \\ \beta'(s) & F_q(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } s \in I.$$

Então, o problema de Cauchy tem pelo menos uma solução  $u$  de classe  $C^2$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ .

**Prova.** Pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = F_p(x, y, u, p, q) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = F_q(x, y, u, p, q) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = pF_p(x, y, u, p, q) + qF_q(x, y, u, p, q) \\ \frac{\partial p}{\partial t}(s, t) = -F_x(x, y, u, p, q) - pF_u(x, y, u, p, q) \\ \frac{\partial q}{\partial t}(s, t) = -F_y(x, y, u, p, q) - qF_u(x, y, u, p, q) \end{cases},$$

com condição inicial

$$\begin{cases} x(s, 0) = \alpha(s) \\ y(s, 0) = \beta(s) \\ u(s, 0) = f(s) \\ F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s, 0), q(s, 0)) = 0 \\ \alpha'(s)p(s, 0) + \beta'(s)q(s, 0) = f'(s) \end{cases}.$$

possui uma única solução  $(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t))$  de classe  $C^2$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ , pois  $F, \alpha, \beta, f$  são por hipótese de classe  $C^2$  (se assumíssemos dados apenas de classe  $C^1$ , obteríamos uma solução de classe  $C^1$  e precisaremos mais tarde de derivadas parciais de segunda ordem contínuas).

Pelo teorema da função implícita, podemos resolver para  $s, t$  em função de  $x, y$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ , pois

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}(s, 0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s, 0) & \frac{\partial x}{\partial t}(s, 0) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, 0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s, 0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha'(s) & F_p(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) \\ \beta'(s) & F_q(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Obtemos funções  $s = s(x, y), t = t(x, y)$  de classe  $C^2$  que satisfazem

$$s(\alpha(s), \beta(s)) = s \text{ e } t(\alpha(s), \beta(s)) = 0.$$

Conseqüentemente, podemos escrever

$$\begin{aligned} u &= u(s(x, y), t(x, y)) = u(x, y), \\ p &= p(s(x, y), t(x, y)) = p(x, y), \\ q &= q(s(x, y), t(x, y)) = q(x, y). \end{aligned}$$



A função  $u = u(x, y)$  assim definida claramente satisfaz a condição inicial, pois

$$u(\alpha(s), \beta(s)) = u(s, 0) = f(s).$$

Para verificar que  $u$  satisfaz a equação diferencial parcial, para cada  $s$  fixado obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) = F_x x_t + F_y y_t + F_u u_t + F_p p_t + F_q q_t.$$

Substituindo os valores dados pelo sistema característico, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) &= F_x F_p + F_y F_q + F_u (pF_p + qF_q) + F_p (-F_x - pF_u) + F_q (-F_y - qF_u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(x, y, u(x, y), p(x, y), q(x, y)) &= F(x(s, t), y(s, t), u(s, t), p(s, t), q(s, t)) \\ &= F(x(s, 0), y(s, 0), u(s, 0), p(s, 0), q(s, 0)) \\ &= F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, para verificar que  $u$  satisfaz a equação diferencial parcial, resta apenas verificar que

$$p(x, y) = u_x(x, y) \text{ e } q(x, y) = u_y(x, y).$$

Pela regra da cadeia,  $u_x$  e  $u_y$  satisfazem o sistema de equações (algébricas) lineares

$$\begin{cases} u_s = u_x x_s + u_y y_s \\ u_t = u_x x_t + u_y y_t \end{cases}.$$

Por hipótese, o determinante da matriz associada a este sistema é diferente de zero, logo ele possui uma única solução. Conseqüentemente, se mostrarmos que  $p$  e  $q$  satisfazem o mesmo sistema,

$$\begin{cases} u_s = p x_s + q y_s \\ u_t = p x_t + q y_t \end{cases},$$

obteremos o resultado desejado. De fato, a segunda equação segue diretamente das três primeiras equações do sistema característico. Para obter a primeira equação, usamos a segunda equação, o fato que  $u, x, y$  são de classe  $C^2$  (de modo que  $u_{st} = u_{ts}$ ,  $x_{st} = x_{ts}$  e  $y_{st} = y_{ts}$ ) e as equações do sistema característico, calculando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u_s - p x_s - q y_s) &= \frac{\partial}{\partial t} (u_s - p x_s - q y_s) - \frac{\partial}{\partial s} (u_t - p x_t - q y_t) \\ &= -p_t x_s - q_t y_s + p_s x_t + q_s y_t \\ &= x_s (F_x + p F_u) + y_s (F_y + q F_u) + p_s F_p + q_s F_q \\ &= \frac{\partial}{\partial s} F(x, y, u, p, q) + x_s p F_u + y_s q F_u - u_s F_u \\ &= (x_s p + y_s q - u_s) F_u. \end{aligned}$$

Esta é uma equação diferencial ordinária para a função  $G(s, t) = u_s - p x_s - q y_s$ , para qualquer  $s$  fixado:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(s, t) = G(s, t) F_u.$$

Agora, note que

$$G(s, 0) = f'(0) - \alpha'(s)p(s, 0) + \beta'(s)q(s, 0) = 0.$$

Integrando em  $t$  obtemos, portanto,

$$G(s, t) = G(s, 0)e^{-\int_0^t F_u dr} = 0,$$

validando a primeira equação. ■

Diferentemente do caso quasilinear, as soluções do problema de Cauchy não-linear em geral não são únicas. Apesar da unicidade da faixa característica, garantida pelo teorema da unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, não temos garantia de unicidade para a solução  $(p(s), q(s))$  do sistema algébrico não-linear

$$\begin{cases} F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) = 0 \\ \alpha'(s)p(s) + \beta'(s)q(s) = f'(s) \end{cases},$$

portanto podemos ter várias soluções para o problema de Cauchy.

**Exemplo 2.13.** Vamos obter duas soluções diferentes para o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_x^2 - 3u_y^2 = u \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

Aqui

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 - 3q^2 - u.$$

A reta inicial pode ser parametrizada por

$$\alpha(s) = s, \beta(s) = 0, f(s) = s^2,$$

de modo que as condições iniciais para  $p$  e  $q$  são dadas por

$$\begin{cases} s^2 = p^2(s) - 3q^2(s) \\ p(s) = 2s \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p(s) &= 2s, \\ q(s) &= \pm s. \end{aligned}$$

Note que  $q(s)$  não é determinado de forma única. Escolhendo  $q(s) = s$ , segue que as condições iniciais associadas a este problema são

$$\begin{cases} x(0) = s \\ y(0) = 0 \\ u(0) = s^2 \\ p(0) = 2s \\ q(0) = s \end{cases}.$$

O sistema característico associado à equação é

$$\begin{cases} x'(t) = F_p = 2p \\ y'(t) = F_q = -6q \\ u'(t) = pF_p + qF_q = 2p^2 - 6q^2 = 2(p^2 - 3q^2) = 2u \\ p'(t) = -F_x - pF_u = p \\ q'(t) = -F_y - qF_u = q \end{cases}.$$

Integrando as três últimas equações e levando em conta as condições iniciais, obtemos  $u(t) = s^2 e^{2t}$ ,  $p(t) = 2s e^t$  e  $q(t) = s e^t$ . Daí, levando os valores encontrados para  $p$  e  $q$  nas duas primeiras equações,

encontramos  $x(t) = 4s(e^t - 1) + s$  e  $y(t) = -6s(e^t - 1)$ . Em outras palavras, a faixa característica é dada por

$$\begin{cases} x(s, t) = 4s(e^t - 1) + s \\ y(s, t) = -6s(e^t - 1) \\ u(s, t) = s^2 e^{2t} \\ p(s, t) = 2se^t \\ q(s, t) = se^t \end{cases}.$$

Para resolver  $(s, t)$  em função de  $(x, t)$  e obter uma solução para o problema de Cauchy, escrevemos

$$e^t - 1 = \frac{1}{4} \left( \frac{x}{s} - 1 \right) = -\frac{y}{6s},$$

donde

$$s = x + \frac{2}{3}y,$$

e, daí,

$$e^t = -\frac{y}{6 \left( x + \frac{2}{3}y \right)} + 1 = \frac{2x + y}{2 \left( x + \frac{2}{3}y \right)}.$$

Como

$$s^2 e^{2t} = \left( x + \frac{2}{3}y \right)^2 \left[ \frac{2x + y}{2 \left( x + \frac{2}{3}y \right)} \right]^2 = \left( x + \frac{y}{2} \right)^2,$$

segue que uma solução para o problema de Cauchy é

$$u(x, y) = \left( x + \frac{y}{2} \right)^2.$$

Se tivéssemos escolhido  $q(s) = -s$ , teríamos obtido através do mesmo processo uma solução diferente:

$$u(x, y) = \left( x - \frac{y}{2} \right)^2.$$

Isso ilustra a perda da unicidade para equações não-lineares, mesmo quando a função  $F$  e os dados iniciais sejam os mais regulares possíveis (i.e., de classe  $C^\infty$ ). Observe que ambas as soluções estão definidas no plano todo.  $\square$

Mas este é o único obstáculo à existência de uma solução única para o problema de Cauchy, como pode ser visto na demonstração do Teorema 2.12.

**Teorema 2.14.** (Condições para a Unicidade de Solução no Problema de Cauchy Não-Linear) *Assuma a notação e as hipóteses do Teorema 2.12. Se para cada valor de  $s \in I$  o sistema*

$$\begin{cases} F(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s), q(s)) = 0 \\ \alpha'(s)p(s) + \beta'(s)q(s) = f'(s) \end{cases}$$

*tem uma única solução  $(p(s), q(s))$ , então o problema de Cauchy tem uma única solução  $u$  de classe  $C^2$  em uma vizinhança de  $\Gamma$ . Se o sistema possui múltiplas soluções, determinando múltiplas faixas iniciais, então o problema de Cauchy possui uma única solução para cada uma destas faixas. Se o sistema não possui nenhuma solução, então o problema de Cauchy também não possui nenhuma solução.*

A última afirmação no enunciado do teorema acima decorre do fato de que se  $u = u(x, y)$  é uma solução para o problema de Cauchy, então  $(\alpha(s), \beta(s), f(s), p(s) = u_x(\alpha(s), \beta(s)), q(s) = u_y(\alpha(s), \beta(s)))$  é uma solução para o sistema.

### 2.2.4 Exercícios

**Exercício 2.7.** Aplique os Teoremas 2.12 e 2.14 para provar o seguinte resultado para a equação da convecção não-linear: “Suponha que  $F$  é de classe  $C^2$  e que  $f$  é de classe  $C^3$ . Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = F(x, t, u, u_x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

possui uma única solução em uma vizinhança do eixo  $x$ .

**Exercício 2.8.** Nos itens a seguir, resolva o problema de Cauchy para a equação não-linear dada, determinando todas as soluções e seus domínios.

- (a)  $\begin{cases} u_x u_y = 1, \\ u(x, 0) = \log x. \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = u^2, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$
- (c)  $\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = u^2, \\ u(\cos s, \sin s) = 1. \end{cases}$
- (d)  $\begin{cases} u = xu_x + yu_y + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2), \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2). \end{cases}$
- (e)  $\begin{cases} u_y = -u_x^2, \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$
- (f)  $\begin{cases} u_x^2 - u_y^2 = x^2 - y, \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$

**Exercício 2.9.** Enuncie e prove a versão  $n$ -dimensional do Teorema 2.12.

## Capítulo 3

# Soluções Fracas e Choques

Queremos generalizar o conceito de solução para uma equação diferencial parcial de primeira ordem de forma a admitir soluções descontínuas, já que estas soluções aparecem freqüentemente na prática. Como, por definição, a solução de uma equação diferencial parcial deve possuir derivadas parciais em todo ponto (para que seja possível substituí-las na equação em cada ponto para verificar se ela de fato é uma solução), precisamos de uma formulação equivalente da equação diferencial que não envolva o cálculo de derivadas explícitas. Esta observação vale mesmo se as soluções são de fato contínuas mas a derivada deixa de existir em algum ponto.

Um problema mais grave que pode ocorrer quando há singularidades na condição inicial é que o método das características pode ser incapaz de produzir a solução porque as projeções características podem não cobrir o domínio todo (lembre-se que, para equações quasilineares e não-lineares em geral, as projeções características dependem da condição inicial); veja o Exemplo 2.11 abaixo.

Neste capítulo, examinaremos apenas equações de primeira ordem em que uma das variáveis é o tempo e que têm a forma geral

$$u_t + \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u) = 0, \quad (3.1)$$

em um aberto  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , onde  $\mathbf{F} \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Em uma dimensão, esta equação se escreve na forma

$$u_t + [F(x, t, u)]_x = 0. \quad (3.2)$$

Uma equação diferencial parcial nesta forma é chamada uma **lei de conservação** e é o equivalente diferencial de uma lei de conservação expressa em forma integral em que a função  $\mathbf{F}$  é o fluxo. Por exemplo, a equação de Burgers está nesta forma, com fluxo  $F(x, t, u) = u^2/2$ .

### 3.1 Propagação de Singularidades

Nesta seção, antes de formular uma teoria geral, vamos examinar alguns exemplos dos fenômenos que podem ocorrer quando a condição inicial possui singularidades, sejam estas descontinuidades em suas derivadas ou descontinuidades na própria função.

**3.1 Exemplo.** O problema de valor inicial para a equação do transporte

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

tem como solução geral

$$u(x, t) = f(x - ct).$$

Podemos definir que esta é uma solução para o problema de valor inicial mesmo quando  $f$  deixa de possuir derivadas, desde que isso aconteça em apenas um número finito de pontos e nos pontos onde

$f$  possui derivada a equação é satisfeita. Ou seja, quando  $f$  é contínua e de classe  $C^1$  por partes e, conseqüentemente, a solução  $u$  definida acima é também contínua e de classe  $C^1$  por partes, significando que  $u$  deixa de possuir derivadas apenas em um número finito de curvas de classe  $C^1$  (retas, neste caso específico). Por exemplo, se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

então  $f$  não possui derivadas nos pontos 0 e 1. A solução  $u(x, t) = f(x - ct)$  propaga estas singularidades ao longo das retas características  $x - ct = \text{constante}$ , de modo que no instante de tempo  $t$ ,  $u$  deixa de possuir derivadas nos pontos  $ct$  e  $1 + ct$ .  $\square$

Para equações lineares, as singularidades na condição inicial são propagadas ao longo das características. No caso não-linear geral isso não é verdade: as singularidades (neste caso chamadas *choques*) são propagadas ao longo de curvas no espaço-tempo que não são necessariamente características. No entanto, existem exemplos importantes de equações não-lineares em que as singularidades na condição inicial ainda são propagadas ao longo das curvas características.

**3.2 Exemplo.** Considere o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sabemos do Exemplo 2.8 do capítulo anterior que o problema tem uma solução global se e somente se  $f$  for não-decrescente, pois as retas características emanando de um ponto  $(s, 0)$  no eixo  $x$  são as retas  $x = f(s)t + x_0$  e nunca se interceptam. Vamos examinar um exemplo do que ocorre quando esta condição não é cumprida e as retas características se interceptam. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

que é uma função decrescente no intervalo  $[0, 1]$ . As retas características para este problema têm equação

$$x(t) = \begin{cases} t + s & \text{se } s < 0, \\ (1 - s)t + s & \text{se } 0 \leq s \leq 1, \\ s & \text{se } s > 1, \end{cases}$$

e se interceptam em  $t \geq 1$ : todas as retas características emanando de pontos  $(s, 0)$  tais que  $0 \leq s \leq 1$  interceptam-se exatamente no instante de tempo  $t = 1$ ; existem interseções destas retas com as outras retas características (e entre elas próprias) em instantes de tempo posteriores. Assim, como  $u$  é necessariamente constante ao longo das retas características, uma solução válida para todo  $x$  somente está definida para  $t < 1$ .

Como vimos naquele exemplo, a solução é dada por  $u(x, t) = f(s)$  se  $x = f(s)t + x_0$  (i.e., constante ao longo das retas características). Agora, se  $x < t < 1$ , então  $x = t + s$  para algum  $s < 0$ , logo  $u(x, t) = 1$ ; se  $t \leq x \leq 1$ , então  $x = (1 - s)t + x_0$  para algum  $0 \leq s \leq 1$  (pois  $x$  está contido no segmento entre  $t$  e 1), logo

$$u(x, t) = 1 - s = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t};$$

finalmente, se  $t < 1 < x$ , então  $x = s > 1$  e portanto  $u(x, t) = 0$ . Assim, a solução para o problema de valor inicial para  $t < 1$  é

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t, \\ \frac{1 - x}{1 - t} & \text{se } t \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

As singularidades nos pontos  $x = 0$  e  $x = 1$  são propagadas, respectivamente, pelas retas características  $x = t$  e  $x = 1$ , de modo que a solução não é diferenciável em pontos pertencentes a estas retas.

Observe que se pudéssemos seguir a solução até o instante de tempo  $t = 1$ , teríamos  $u(x, 1) = 1$  para  $x < 1$  e  $u(x, 1) = 0$  para  $x > 1$ , uma descontinuidade. Intuitivamente, o que temos é um *choque*: inicialmente, as partículas à esquerda da origem começam com velocidade 1, enquanto que as partículas à direita do ponto  $x = 1$  têm velocidade 0 (na equação de Burgers, a velocidade de propagação é proporcional à densidade); as partículas no intervalo  $[0, 1]$  têm velocidades decrescendo linearmente de 1 até 0. À medida que o tempo passa, as partículas à esquerda vão empurrando as partículas à direita, até que todas as partículas no intervalo  $[0, 1]$  adquirem velocidade 1. No entanto, as partículas à direita do ponto  $x = 1$  não tiveram tempo de responder e continuam com velocidade 0. Quando as partículas com velocidade 1 encontram as partículas com velocidade 0, um choque ocorre.

Vale a pena enfatizar que a existência do choque neste exemplo não se deve à existência de singularidades na condição inicial, mas apenas ao fato das retas características se cruzarem a partir do tempo  $t = 1$ , o que deve-se ao fato da condição inicial ser decrescente no intervalo  $[0, 1]$ . A suavização local da condição inicial nos pontos  $x = 0$  e  $x = 1$  não alteraria a formação do choque, embora talvez pudesse retardar o seu aparecimento.  $\square$

**3.3 Exemplo.** Considere o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

com

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

que é uma função crescente no intervalo  $[0, 1]$ . As retas características para este problema têm equação

$$x(t) = \begin{cases} s & \text{se } s < 0, \\ st + s & \text{se } 0 \leq s \leq 1, \\ t + s & \text{se } s > 1, \end{cases}$$

e nunca se interceptam. Por outro lado, elas se espalham na região entre as retas características  $x(t) \equiv 0$  e  $x(t) = t + 1$ , constituindo uma onda de rarefação (veja também o Exemplo 2.9 do capítulo anterior).

A solução, como antes, é dada por  $u(x, t) = f(s)$  se  $x = f(s)t + s$ . Se  $x < 0$ , então  $x = s$  para algum  $s < 0$ , logo  $u(x, t) = 0$ ; se  $0 \leq x \leq t + 1$ , então  $x = st + s = s(t + 1)$  para algum  $0 \leq s \leq 1$ , logo

$$u(x, t) = s = \frac{x}{t + 1};$$

finalmente, se  $t < 1 < x$ , então  $x = x_0 > 1$  e portanto  $u(x, t) = 0$ . Assim, a solução para o problema de valor inicial para  $t < 1$  é

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ \frac{x}{t + 1} & \text{se } t \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{se } x > t + 1. \end{cases}$$

As singularidades (na derivada) nos pontos  $x = 0$  e  $x = 1$  são propagadas, respectivamente, pelas retas características  $x = 0$  e  $x = t + 1$ , de modo que a solução não é diferenciável em pontos pertencentes a estas retas.  $\square$

Algumas vezes, ao invés da singularidade na condição inicial ser propagada ao longo das características, ela é suavizada instantaneamente, de modo que no instante imediatamente posterior (em outras palavras, para qualquer  $t > 0$ ) a solução já é contínua. Este fenômeno não é devido exclusivamente à não-linearidade da equação: na equação linear do calor isso ocorre naturalmente, devido à propagação “instantânea” do calor, que suaviza quaisquer descontinuidades presentes na distribuição inicial de temperaturas em uma barra (desde que as descontinuidades não sejam muito sérias, é claro). No caso de equações de primeira ordem lineares, no entanto, este fenômeno não pode ocorrer, já que quaisquer singularidades presentes na condição inicial são transmitidas através das curvas características (diferente do calor, a propagação é “ondulatória” e ondas movem-se com velocidade finita).

**3.4 Exemplo.** Considere o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Este pode ser visto como um problema-limite para o problema do Exemplo 3.3. Desta vez, as retas características para este problema têm equações

$$x = \begin{cases} x_0 & \text{se } x_0 < 0, \\ t + x_0 & \text{se } x_0 > 0. \end{cases}$$

Estas retas características nunca se interceptam. No entanto, observe que na região do primeiro quadrante compreendida entre o eixo  $t$  e a reta bissetriz do primeiro quadrante (isto é, a reta  $x = t$ ) não existem características. Em cima das retas características, a solução é dada como antes por  $u(x, t) = f(x_0)$  se  $x = f(x_0)t + x_0$ . Se  $x < 0$ , a solução é  $u(x, t) \equiv 0$  para todo  $t$ ; se  $x \geq t$  a solução é dada por  $u(x, t) = 1$ . Na região não coberta pelas retas características, uma solução contínua variando desde 0 até 1 pode ser construída inserindo-se características  $x = ct$ ,  $0 < c < 1$ , e tomando  $u \equiv c$  ao longo destas características; ou seja, uma solução nesta região é  $u(x, t) = x/t$ , como pode ser verificado (existem outras escolhas possíveis; veja o Exemplo 3.6 na próxima seção). Assim, a solução completa é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ e } t \geq 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t, t \neq 0, \\ 1 & \text{se } x > t \text{ e } t \geq 0, \end{cases}$$

e é contínua para  $t > 0$ . A descontinuidade na origem foi suavizada, graças à existência de uma região onde as retas características estavam ausentes. O fato das características se espalharem, a ponto de deixarem de existir em uma determinada região, também caracteriza esta onda como uma onda de rarefação.  $\square$

**3.5 Exemplo.** Considere o seguinte problema de valor inicial para a equação de Burgers, em um certo sentido semelhante ao Exemplo 3.2, com um único ponto de descontinuidade na origem  $x = 0$ :

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Este pode ser visto como um problema-limite para o problema do Exemplo 3.2. Imediatamente em  $t > 0$  as características colidem, de modo que não há solução de classe  $C^1$  definida em nenhum instante



de tempo. Uma maneira de evitar este problema é inserir uma reta  $x = mt$  de inclinação positiva ao longo da qual a descontinuidade em  $t = 0$  é propagada (veja figura). Uma solução de classe  $C^1$  fora desta reta pode então ser definida por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > mt, \\ 1 & \text{se } x < mt. \end{cases}$$

O único problema é a escolha de  $m$ : em princípio, existem infinitas escolhas para  $m$  e não há unicidade para a solução; será que existe alguma escolha significativa para  $m$ ? Na verdade, é fácil ver que não precisávamos tomar uma reta e qualquer curva partindo da origem, gráfico de uma função crescente de  $x$  serviria. Será que alguma destas soluções teria mais vantagens em relação a todas as outras?  $\square$

A resposta às questões levantadas no último exemplo é que as descontinuidades na condição inicial propagam-se ao longo de bem definidos *caminhos de choque*, que em geral não são curvas características, mas que são determinados pela lei de conservação. A lei de conservação implica uma certa condição, chamada *condição de salto*, que permitirá a determinação de um caminho de choque que carrega a descontinuidade consistente com a solução. A idéia principal é que a conservação deve valer mesmo quando se atravessa uma descontinuidade.

## 3.2 Condição de Salto

Vamos examinar primeiro o caso unidimensional. Considere a lei de conservação

$$u_t + [F(x, t, u)]_x = 0. \quad (3.3)$$

Ela é a forma diferencial da lei de conservação em forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t)). \quad (3.4)$$

[Observe que convencionamos que quando escrevemos uma lei de conservação unidimensional na forma integral, a equação integral é admitida valer para todos os valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ .] De fato, para fazer a passagem de uma forma para outra, basta usar o teorema fundamental do cálculo.

Agora, assumamos que  $x = g(t)$  é uma parametrização de classe  $C^1$  de uma curva no plano ao longo da qual  $u$  sofre uma descontinuidade simples, significando que  $u(x, t)$  é continuamente diferenciável para  $x > g(t)$  e para  $x < g(t)$  e que os limites laterais de  $u$  e de suas derivadas parciais de primeira ordem existem e são finitos quando  $x \rightarrow g(t)^-$  e quando  $x \rightarrow g(t)^+$ . Então, escolhendo  $a < g(t)$  e  $b > g(t)$ , a equação de conservação na forma integral pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_a^{g(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{g(t)}^b u(x, t) dx = F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t)).$$

Pela regra de Leibniz para derivar em relação a  $t$  uma integral em que ambos o integrando e o limite de integração dependem do parâmetro  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^{g(t)} u(x, t) dx &= \int_a^{g(t)} u_t(x, t) dx + u(g(t)^-, t)g'(t), \\ \frac{d}{dt} \int_{g(t)}^b u(x, t) dx &= \int_{g(t)}^b u_t(x, t) dx - u(g(t)^+, t)g'(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^{g(t)} u_t(x, t) dx + \int_{g(t)}^b u_t(x, t) dx + [u(g(t)^-, t) - u(g(t)^+, t)]g'(t) = F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t)).$$

Tomando o limite quando  $a \rightarrow g(t)^-$  e quando  $b \rightarrow g(t)^+$ , segue que

$$[u(g(t)^-, t) - u(g(t)^+, t)] g'(t) = F(g(t)^-, t, u(g(t)^-, t)) - F(g(t)^+, t, u(g(t)^+, t)).$$

Estabelecemos as notações

$$\begin{aligned} u^+ &= u(g(t)^+, t), \\ u^- &= u(g(t)^-, t). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [u] &= u^+ - u^-, \\ [F(u)] &= F(g(t)^+, t, u^+) - F(g(t)^-, t, u^-); \end{aligned}$$

ou seja,  $[u]$  mede o salto que a solução  $u$  dá ao cruzar a curva de descontinuidade  $x = g(t)$  e  $[F(u)]$  mede o salto que o fluxo dá ao cruzar esta curva. Então, pelo que acabamos de ver, estes saltos são relacionados pela condição

$$g'(t) [u] = [F(u)]. \quad (3.5)$$

Esta condição é chamada uma **condição de salto** ou **condição de Rankine-Hugoniot**, para o caso unidimensional (o segundo nome tem origem em dinâmica dos gases). Ela relaciona as condições à frente da descontinuidade e atrás da descontinuidade com a velocidade da descontinuidade. Neste contexto, a descontinuidade em  $u$  que se propaga ao longo da curva  $x = g(t)$  é chamada uma **onda de choque**, a própria curva  $x = g(t)$  é chamada o **caminho do choque** (ou simplesmente o **choque**),  $g'(t)$  é a **velocidade do choque** e a magnitude do salto  $[u]$  é chamada a **força do choque**. Em princípio, a condição do salto permitirá encontrar o caminho do choque.

**3.6 Exemplo.** Vamos encontrar o caminho do choque para o problema de valor inicial para a equação de Burgers do Exemplo 3.5:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Aqui, o fluxo é  $F(u) = u^2/2$ , logo a condição de salto torna-se

$$g'(t) (u^+ - u^-) = \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{2},$$

donde

$$g'(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}. \quad (3.6)$$

Portanto, a condição de salto para a equação de Burgers diz que a velocidade do choque é a média dos valores de  $u$  à frente e atrás do choque.

Em particular, levando em conta agora a condição inicial, para  $t = 0$  temos

$$g'(0) = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Em geral, a solução  $u(x, t)$  deve satisfazer

$$g'(t) = \frac{u(g(t)^+, t) + u(g(t)^-, t)}{2}.$$

Vemos, então, que uma solução para o problema de valor inicial consistente com esta condição de salto é dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > t/2, \\ 1 & \text{se } x < t/2. \end{cases}$$

Esta solução corresponde a um choque com velocidade constante igual a  $1/2$ . Vemos ainda que as soluções consideradas no Exemplo 3.4 em que o caminho do choque é uma reta de inclinação  $m$  não satisfarão a condição de salto se  $m \neq 1/2$ . Além disso, qualquer solução que valha sempre 0 à esquerda do caminho de choque e sempre 1 à direita, necessariamente implicará que o caminho de choque seja uma reta de inclinação  $1/2$ , pois a condição de salto neste caso é

$$g'(t) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Porém, não é óbvio que não existem outras soluções, mais complexas, e que ainda satisfazem a condição do salto.  $\square$

**3.7 Exemplo.** No Exemplo 3.4, consideramos o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

obtendo uma solução global (e contínua) na forma

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{se } x > t. \end{cases}$$

Como esta solução é contínua, não existe uma onda de choque. Mas podemos obter uma solução de choque. Na verdade, podemos criar uma família inteira a um parâmetro de soluções descontínuas que satisfazem a condição do salto da seguinte maneira: dado  $\gamma \in [0, 1]$ , definimos a solução  $u_\gamma$  por

$$u_\gamma(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq \gamma t, \\ \gamma & \text{se } \gamma t \leq x \leq \frac{\gamma+1}{2}t, \\ 1 & \text{se } x > \frac{\gamma+1}{2}t. \end{cases}$$

Nossa solução anterior corresponde a tomar  $\gamma = 1$ . Para cada solução  $u_\gamma$ , o caminho do choque é  $g(t) = \frac{\gamma+1}{2}t$ , onde ocorre a descontinuidade, e  $u_\gamma$  satisfaz a condição de salto porque

$$\frac{u(g(t)^+, t) + u(g(t)^-, t)}{2} = \frac{\gamma+1}{2} = g'(t).$$

Esta multiplicidade de soluções é bastante insatisfatória, tendo em mente que queremos solucionar problemas do mundo real. Na última seção deste capítulo veremos alguns “critérios de seleção” para escolher a solução “correta” dentre as várias soluções fracas possíveis.  $\square$

**3.8 Exemplo.** Como último exemplo, vamos usar a condição de salto para encontrar uma solução global para o problema dado no Exemplo 3.2:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 1-x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Usando o método das características, obtivemos uma solução contínua definida para  $0 \leq t < 1$ :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Para  $t \geq 1$ , escolhendo  $u(g(t)^-, t) = 1$  e  $u(g(t)^+, t) = 0$  de modo que

$$\frac{u(g(t)^+, t) + u(g(t)^-, t)}{2} = \frac{1}{2},$$

o caminho de choque é a reta

$$g(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2},$$

que parte do ponto  $x = 1, t = 1$ . Assim, podemos definir para  $t \geq 1$

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{t+1}{2}, \\ 0 & \text{se } x > \frac{t+1}{2}. \end{cases}$$

□

### 3.2.1 Exercícios

**Exercício 3.1.** Nos itens a seguir, ache uma solução global para o problema satisfazendo a condição de salto.

- (a) 
$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$
- (b) 
$$\begin{cases} u_t - uu_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$
- (c) 
$$\begin{cases} u_t + u^3 u_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$
- (d) 
$$\begin{cases} u_t + u^n u_x = 0, \text{ onde } n \in \mathbb{N}, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

## 3.3 Soluções Fracas

Nesta seção vamos formalizar a idéia de uma solução fraca para uma equação diferencial parcial de primeira ordem na forma divergente, começando com o caso unidimensional:

$$\begin{cases} u_t + [F(x, t, u)]_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , isto é,  $\varphi$  é uma função de classe  $C^\infty$  e suporte compacto, digamos  $\text{supp } \varphi \subset (a, b) \times [0, T)$  para algum intervalo  $[a, b]$  e algum valor de  $T$ ; em particular,  $\varphi(x, t) = 0$  se  $x = a$  ou se  $x = b$

ou se  $t = T$ . Suponha que  $u$  seja uma solução clássica para (3.7). Multiplicando a equação diferencial por  $\varphi$  e integrando sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , obtemos

$$\int_0^T \int_a^b [u_t \varphi + [F(x, t, u)]_x \varphi] dx dt = 0.$$

Integrando por partes, e usando a definição do suporte de  $\varphi$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_a^b u_t \varphi dx dt &= \int_a^b \left[ \int_0^T u_t \varphi dt \right] dx = \int_a^b \left[ u \varphi \Big|_0^T - \int_0^T u \varphi_t dt \right] dx = - \int_a^b u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_a^b \int_0^T u \varphi_t dt dx \\ &= - \int_a^b f(x) \varphi(x, 0) dx - \int_a^b \int_0^T u \varphi_t dt dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_a^b [F(x, t, u)]_x \varphi dx dt &= \int_0^T \left[ \int_a^b [F(x, t, u)]_x \varphi dx \right] dt = \int_0^T \left[ F(x, t, u) \varphi \Big|_a^b - \int_a^b F(x, t, u) \varphi_x dx \right] dt \\ &= - \int_0^T \int_a^b F(x, t, u) \varphi_x dx dt \end{aligned}$$

Portanto, se  $u$  é uma solução para o problema de valor inicial (3.7), então para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  a função  $u$  satisfaz a equação integral

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u \varphi_t + [F(x, t, u)] \varphi_x] dx dt = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x, 0) dx. \quad (3.8)$$

Note que esta formulação integral não exige a diferenciabilidade da solução  $u$ . Na verdade, ela requer apenas que  $u$  e  $F(x, t, u)$  sejam localmente integráveis.

**3.9 Definição.** Uma função  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  tal que  $F(x, t, u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  e

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u \varphi_t + [F(x, t, u)] \varphi_x] dx dt = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x, 0) dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+),$$

é chamada uma **solução fraca** para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + [F(x, t, u)]_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Uma solução clássica é também obviamente uma solução fraca.

Podemos agora obter a condição de Rankine-Hugoniot mais formalmente:

**3.10 Teorema.** (Condição de Rankine-Hugoniot) *Seja  $V$  uma vizinhança aberta do semiplano superior aberto  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, t) : t > 0\}$  e suponha que uma curva  $C$ , parametrizada por  $t \mapsto (g(t), t)$ , divide  $V$  em duas regiões  $V^-$  e  $V^+$ , à esquerda e à direita da curva, respectivamente. Seja  $u$  uma solução fraca de*

$$\begin{cases} u_t + [F(x, t, u)]_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tal que

- (i)  $u$  é uma solução clássica para este problema em ambas as regiões;
- (ii)  $u$  sofre um salto de descontinuidade  $[u]$  na curva  $C$ ; e
- (iii) o salto  $[u]$  é contínuo ao longo de  $C$ .

Então, para qualquer  $t$ , vale a relação

$$g'(t) [u] = [F(u)].$$

**Prova.** Se  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  tem suporte em  $V$ , por definição de solução fraca temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x,0) dx = \iint_V [u\varphi_t + [F(x,t,u)]\varphi_x] dx dt \\ &= \iint_{V^-} [u\varphi_t + [F(x,t,u)]\varphi_x] dx dt + \iint_{V^+} [u\varphi_t + [F(x,t,u)]\varphi_x] dx dt. \end{aligned}$$

Agora denote por  $V^*$  qualquer um dos conjuntos  $V^-, V^+$ . Como  $u$  é uma solução clássica em  $V^*$ , temos

$$\iint_{V^*} (u_t + [F(x,t,u)]_x) \varphi dx dt = 0$$

e daí, pela regra do produto,

$$\iint_{V^*} [(u\varphi)_t + (F(x,t,u)\varphi)_x] dx dt = \iint_{V^*} [u\varphi_t + F(x,t,u)\varphi_x] dx dt.$$

Além disso, como  $u$  é de classe  $C^1$  em  $V^*$ , também podemos usar o teorema de Green, obtendo

$$\iint_{V^*} [(u\varphi)_t + (F(x,t,u)\varphi)_x] dx dt = \iint_{V^*} [(F(x,t,u)\varphi)_x - (-u\varphi)_t] dx dt = \int_{\partial V^*} [-u\varphi dx + F(x,t,u)\varphi dt].$$

Usando a convenção da fronteira orientada no sentido anti-horário, segue que em  $V^-$  a curva  $C$  tem a orientação da parametrização  $t \mapsto (g(t), t)$  e em  $V^+$  a orientação reversa. Assim, como  $\varphi = 0$  em  $\partial V$ , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C -u^- \varphi dx + \int_C F(x,t,u^-) \varphi dt - \int_C -u^+ \varphi dx - \int_C F(x,t,u^+) \varphi dt \\ &= \int_C [u^+ - u^-] \varphi g'(t) dt + \int_C [F(x,t,u^-) - F(x,t,u^+)] \varphi dt \\ &= \int_C (g'(t) [u] - [F(u)]) \varphi dt. \end{aligned}$$

Como  $\varphi$  é arbitrária, concluímos a condição de Rankine-Hugoniot. ■

A definição de solução fraca para o problema de valor inicial  $n$ -dimensional

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u)] = 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é análoga. Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ , digamos  $\operatorname{supp} \varphi \subset \subset \Omega \times [0, T)$  para algum aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e algum valor de  $T$ ; em particular,  $\varphi(x, t) = 0$  se  $x \in \partial\Omega$  ou se  $t = T$ . Suponha que  $u$  seja uma solução clássica para o problema de valor inicial. Multiplicando a equação diferencial que  $u$  satisfaz por  $\varphi$  e integrando sobre  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} [u_t \varphi + \operatorname{div}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u)]\varphi] d\mathbf{x} dt = 0.$$

Integrando por partes (no caso  $n$  dimensional, este é o teorema de Green), e usando a definição do suporte de  $\varphi$ , segue como antes que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_t \varphi d\mathbf{x} dt &= \int_{\Omega} \left[ \int_0^T u_t \varphi dt \right] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left[ u\varphi|_0^T - \int_0^T u\varphi_t dt \right] d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, 0)\varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_0^T u\varphi_t dt d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \int_0^T u\varphi_t dt d\mathbf{x} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u)]\varphi \, d\mathbf{x} \, dt &= \int_0^T \left[ \int_{\Omega} \operatorname{div}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u)]\varphi \, d\mathbf{x} \right] dt = \int_0^T \left[ \int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u) \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u) \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} \right] dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u) \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} \, dt. \end{aligned}$$

**3.11 Definição.** Uma função  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  tal que  $F(\mathbf{x}, t, u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  e

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} [u_t \varphi + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u) \cdot \nabla\varphi] \, d\mathbf{x} \, dt = - \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+),$$

é chamada uma **solução fraca** para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}[\mathbf{F}(\mathbf{x}, t, u)] = 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

## 3.4 Existência e Unicidade de Soluções Fracas

A condição de Rankine-Hugoniot não é suficiente para estabelecer a unicidade de soluções fracas, como vimos no Exemplo 3.6. Há necessidade de se impor novas condições para estabelecer a unicidade de soluções. Duas das mais importantes condições são a *condição de entropia* e o *critério de viscosidade*. Consideraremos apenas o caso unidimensional.

### 3.4.1 Condições para a Unicidade de Soluções: Entropia

**3.12 Definição.** Dizemos que uma solução  $u$  satisfaz a **condição de entropia** se existe uma constante positiva  $E$  tal que para todo  $h > 0$  vale

$$u(x+h, t) - u(x, t) \leq \frac{E}{t}h \quad \text{para todo } t > 0 \text{ e para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Observe que se  $u$  satisfaz a condição de entropia, então em particular a função

$$x \mapsto u(x, t) - \frac{E}{t}x$$

é não-crescente, pois

$$u(x+h, t) - \frac{E}{t}(x+h) - \left[ u(x, t) - \frac{E}{t}x \right] = u(x+h, t) - u(x, t) - \frac{E}{t}h \leq 0,$$

logo possui limites laterais esquerdo e direito em todo ponto. Conseqüentemente, a função

$$x \mapsto u(x, t)$$

também possui limites laterais  $u^-$  e  $u^+$  em todo ponto, e do fato de que  $u(x, t) - \frac{E}{t}x$  é não-crescente segue que

$$u^- \geq u^+.$$

Em outras palavras, ao atravessar uma descontinuidade, a solução pode sofrer um salto apenas para baixo. A condição de entropia tem sua origem em uma condição na dinâmica dos gases que requer que a entropia deve crescer à medida que o tempo passa (como dita a segunda lei da termodinâmica), especialmente quando se atravessa uma onda de choque, que é um processo basicamente irreversível. Esta condição elimina a

existência de ondas de rarefação, onde existe um salto positivo da esquerda para a direita através da onda de choque.

Suponha agora que a função  $F$  é convexa (por exemplo,  $F'' > 0$ ), de modo que a derivada  $F'$  é estritamente crescente. Se  $u^- > u^+$ , a condição de entropia implica, para uma solução que também satisfaça a condição do salto, que

$$F'(u^-) > g'(t) > F'(u^+), \quad (3.10)$$

onde  $g'(t)$  é a velocidade do choque e  $u^-$  e  $u^+$  são os estados atrás e adiante do choque, respectivamente. De fato, pela condição de salto e pelo teorema do valor médio temos

$$g'(t) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-} = F'(\xi)$$

para algum  $u^- > \xi > u^+$ . Assim, sob estas hipóteses, a velocidade da onda de choque é intermediária entre as velocidades das características antes e depois do choque. Mais que isso, esta condição impede múltiplas interseções das características com a onda de choque.

**3.13 Exemplo.** No Exemplo 3.6, obtivemos infinitas soluções para o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

na forma

$$u_\gamma(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq \gamma t, \\ \gamma & \text{se } \gamma t \leq x \leq \frac{\gamma+1}{2}t, \\ 1 & \text{se } x > \frac{\gamma+1}{2}t, \end{cases}$$

para um parâmetro  $\gamma \in [0, 1]$  qualquer. Se  $0 \leq \gamma < 1$ , a solução  $u_\gamma$  é descontínua mas satisfaz a condição de salto; a única solução contínua corresponde a  $\gamma = 1$ . Para as soluções que apresentam uma onda de choque, o caminho do choque é a reta  $x = \frac{\gamma+1}{2}t$ , cuja velocidade é, portanto,  $\frac{\gamma+1}{2}$ . Por outro lado, para a equação de Burgers,  $F(u) = u^2/2$  e  $F'(u) = u$ , logo

$$F'(u^-) = u^- = \gamma,$$

$$F'(u^+) = u^+ = 1,$$

e para  $0 \leq \gamma < 1$  vale a relação inversa da relação de entropia

$$\gamma < \frac{\gamma+1}{2} < 1.$$

Assim, nenhuma das soluções descontínuas satisfaz a relação de entropia.  $\square$

A demonstração da existência e unicidade de uma solução fraca satisfazendo a condição de entropia está além do nível deste curso. Referimos o leitor para [DiBenedetto], seções VII.7-17, ou [Evans], seção 3.4; a prova em [DiBenedetto] requer hipóteses mais fracas sobre a integrabilidade da condição inicial do que as usadas em [Evans], e assim se aplicam diretamente a problemas de Riemann. Ambos as demonstrações são baseadas no cálculo variacional e teoria de Hamilton-Jacobi. Outra demonstração bastante acessível é dada em [Smoller], seção 16A. Esta última é baseada no método das diferenças finitas, e por isso requer menos *background* matemático que as duas anteriores; além disso, generaliza-se mais facilmente para sistemas de leis de conservação (tais como as equações de Navier-Stokes) e é a base de muitos métodos de resolução numérica. Das três demonstrações, é a que requer a hipótese mais fraca sobre a condição inicial: basta que ela seja limitada.



### 3.4.2 Unicidade de Soluções que satisfazem a Condição de Entropia

Nesta subseção estabeleceremos a unicidade de solução fraca integrável para um problema de valor inicial, desde que ela satisfaça a condição de Rankine-Hugoniot e a condição de entropia. A hipótese da solução fraca ser integrável, e não apenas localmente integrável como na nossa definição de solução fraca, não é uma restrição, pois é possível provar sob as hipóteses do teorema a seguir, em que se supõe que a condição inicial  $f$  é integrável, que a solução fraca  $u(x, t)$  é integrável em  $\mathbb{R}$  para todo  $t > 0$ . Já a hipótese da solução ser de classe  $C^1$  por partes é restritiva e introduzida apenas para diminuir a tecnicidade da demonstração.

**3.14 Teorema.** *Considere o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F'' > 0$  e  $f \in L^1(\mathbb{R})$  (isto é,  $f$  é integrável). Então existe no máximo uma única solução fraca integrável, de classe  $C^1$  por partes, para o problema de valor inicial que satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot e a condição de entropia.

**Prova.** Suponha que  $u$  e  $v$  sejam duas soluções fracas para o problema de valor inicial que satisfazem ambas as condições, a de Rankine-Hugoniot e a de entropia. Defina

$$w = u - v$$

e, para cada  $t \geq 0$ ,

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |w(x, t)| \, dx.$$

Para provar que  $u = v$ , mostraremos que  $I \equiv 0$ . Faremos isso provando que a função  $I$  é não-crescente, e o resultado decorrerá então do fato de que  $I(0) = 0$ , já que

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - f(x) = 0.$$

Fixe  $t$ . Usando o fato de que  $w$  é contínua por partes, partimos o eixo  $x$  em subintervalos  $[x_n, x_{n+1}]$  tais que  $w$  tem sinal constante em  $[x_n, x_{n+1}]$  e muda de sinal em intervalos sucessivos. Podemos escolher a indexação de modo que o sinal de  $w$  em  $[x_n, x_{n+1}]$  é  $(-1)^n$ . Segue que

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \int_{x_n}^{x_{n+1}} w(x, t) \, dx.$$

Daí, observando que a partição do eixo  $x$  é uma função diferenciável de cada instante de tempo  $t$ , isto é,  $x_n = x_n(t)$ ,  $x_{n+1} = x_{n+1}(t)$ , temos pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned} I'(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[ \int_{x_n}^{x_{n+1}} w_t(x, t) \, dx + w(x_{n+1}, t)x'_{n+1}(t) - w(x_n, t)x'_n(t) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[ - \int_{x_n}^{x_{n+1}} ([F(u)]_x - [F(v)]_x) \, dx + w(x_{n+1}, t)x'_{n+1}(t) - w(x_n, t)x'_n(t) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n [F(u(x_n, t)) - F(u(x_{n+1}, t)) + F(v(x_{n+1}, t)) - F(v(x_n, t)) + w(x_{n+1}, t)x'_{n+1}(t) - w(x_n, t)x'_n(t)] \end{aligned}$$

Existem duas possibilidades a considerar. A primeira possibilidade é que, para  $n$  dado,  $u$  e  $v$  são contínuas em  $(x_n, t)$  e  $(x_{n+1}, t)$ . Neste caso, como estes são pontos de mudança de sinal para  $w$ , por definição, temos necessariamente  $w = 0$  nestes pontos, donde  $u = v$  e a contribuição destes pontos para a soma acima é nula.

A segunda possibilidade é que  $u$  ou  $v$  tem uma descontinuidade, ou seja, um choque em um destes pontos. Para fixar idéias, vamos assumir que  $u$  tem um choque em  $x_{n+1}$  (isto é,  $x_{n+1}(t)$  é um caminho de choque para  $u$ ) mas que  $v$  é contínua aí, e que  $w > 0$  em  $[x_n, x_{n+1}]$ , de modo que  $v \leq u^-$  em  $(x_{n+1}, t)$ , e que ambas  $u$  e  $v$  são contínuas em  $x_n$ . A contribuição do índice  $n$  neste caso é então

$$q = F(v(x_{n+1}, t)) - F(u(x_{n+1}, t)) + w(x_{n+1}, t)x'_{n+1}(t),$$

porque  $w > 0$  implica que  $n$  é par. Escrevemos

$$q = F(v(x_{n+1}, t)) - F(u^-) + (u^- - v(x_{n+1}, t))x'_{n+1}(t).$$

Como  $F'$  é crescente, a condição de entropia

$$F'(u^-) < s' < F'(u^+)$$

implica que

$$u^+ < u^-$$

em  $(x_{n+1}, t)$ . Também temos  $v(x_{n+1}, t) \geq u^+$ , por causa da mudança de sinal de  $w$  em  $x_{n+1}$ . E, pela condição de Rankine-Hugoniot,

$$x'_{n+1}(t) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} q &= F(v(x_{n+1}, t)) - F(u^-) + (u^- - v(x_{n+1}, t)) \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-} \\ &= F(v(x_{n+1}, t)) - \left[ \frac{v(x_{n+1}, t) - u^+}{u^- - u^+} F(u^-) + \frac{u^- - v(x_{n+1}, t)}{u^- - u^+} F(u^+) \right]. \end{aligned}$$

Agora, pela convexidade de  $F$  e o fato de que  $u^+ \leq v(x_{n+1}, t) \leq u^-$ , seu valor em  $v(x_{n+1}, t)$  é menor que o valor na reta que une os pontos  $(u^+, F(u^+))$  e  $(u^-, F(u^-))$ , que é exatamente o valor dado entre colchetes. Em outras palavras,

$$F(v(x_{n+1}, t)) < \frac{v(x_{n+1}, t) - u^+}{u^- - u^+} F(u^-) + \frac{u^- - v(x_{n+1}, t)}{u^- - u^+} F(u^+),$$

logo

$$q \leq 0.$$

Os outros casos são lidados de maneira semelhante. Isso prova que  $I'(t) \leq 0$  e portanto  $I$  é não-crescente. ■

### 3.4.3 Soluções de Viscosidade

Um outro critério de seleção importante, cujo significado físico é mais fácil de entender, é especificar que apenas *soluções de viscosidade* sejam aceitas.

**3.15 Definição.** Dizemos que  $u$  é uma **solução de viscosidade** para a lei de conservação

$$u_t + [F(u)]_x = 0$$

se  $u$  pode ser obtida como o limite de soluções para a família de equações

$$u_t^\varepsilon + [F(u^\varepsilon)]_x = \varepsilon u_{xx}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A equação na forma

$$u_t + [F(u)]_x = \mu u_{xx}$$

é exatamente a lei de conservação para um fluido quando não se desprezam os efeitos dissipativos devidos à viscosidade do fluido (a constante  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade do fluido). Além do modelo ser mais realístico, outra vantagem das soluções de viscosidade é que soluções de choque obtidas através deste método satisfazem a condição de entropia. A definição precisa do limite das soluções neste caso é o limite fraco-estrela em  $L^\infty$  (mas fora da região do choque, se a solução  $u$  é de classe  $C^1$  por partes, é possível provar que a convergência é uniforme), e um estudo das soluções de viscosidade está além do nível deste curso. Apesar disso vamos examinar alguns casos simples.

Estamos interessados em obter soluções de choque que conectam dois estados constantes  $u_L$  e  $u_R$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u^- &= u_L, \\ u^+ &= u_R. \end{aligned}$$

Vamos tentar obter uma solução para a equação viscosa

$$u_t + [F(u)]_x = \varepsilon u_{xx}$$

do tipo onda viajante

$$u(x, t) = f(x - vt),$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= u_L, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= u_R, \end{aligned}$$

ou seja, uma onda de choque movendo-se com uma velocidade desconhecida  $v$ . Introduzindo a coordenada

$$\xi = x - vt,$$

segue que

$$\begin{aligned} u_t &= -vf'(\xi), \\ u_x &= f'(\xi), \\ u_{xx} &= f''(\xi). \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial parcial reescrita na forma

$$u_t + F'(u)u_x = \varepsilon u_{xx}$$

obtemos a equação diferencial ordinária

$$-vf'(\xi) + F'(f)f'(\xi) = \varepsilon f''(\xi).$$

Integrando uma vez, obtemos

$$F(f) - vf(\xi) + A = \varepsilon f'(\xi).$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária. É razoável assumir que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0;$$

(ou seja,  $f$  tende aos valores constantes  $u_L$  e  $u_R$  sem oscilações). Daí, obtemos o sistema

$$\begin{cases} F(u_L) - vu_L + A = 0 \\ F(u_R) - vu_R + A = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Subtraindo a primeira equação da segunda obtemos a velocidade  $v$  do choque:

$$v = \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{[F(u)]}{[u]}, \quad (3.12)$$

satisfazendo a condição de Rankine-Hugoniot. Substituindo este valor em qualquer equação do sistema obtemos o valor da constante  $A$ :

$$A = \frac{u_R F(u_L) - u_L F(u_R)}{u_R - u_L}. \quad (3.13)$$

Portanto, se existir uma solução de onda viajante conectando os dois estados constantes  $u_R$  e  $u_L$ , ela tem que satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot. Mas isso não é suficiente para determinar a existência desta solução. Isso dependerá da forma de  $F$ .

**3.16 Exemplo.** Vamos obter uma solução de viscosidade para o problema de valor inicial para a equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Aqui os estados constantes são  $u_L = 1$  e  $u_R = 0$ . Para isso, precisamos primeiro resolver a equação de Burgers viscosa

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Temos  $F(u) = u^2/2$ , donde  $v = 1/2$  e  $A = 0$ . A equação diferencial ordinária associada é então

$$2f^2 - f = 2\varepsilon f',$$

cujas solução pode ser obtida por uma integração simples

$$f(\xi) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\xi}{2\varepsilon}}}.$$

Portanto, a solução da equação viscosa em onda viajante é

$$u^\varepsilon(x, t) = f\left(x - \frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{1 + e^{\frac{2x-t}{4\varepsilon}}}.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos a solução de viscosidade

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t/2, \\ 0 & \text{se } x > t/2. \end{cases}$$

□

### 3.4.4 Exercícios

**Exercício 3.2.** Encontre uma solução fraca para os seguintes problemas de valor inicial:

$$(a) \begin{cases} u_t + (e^u)_x = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u_t + 2u u_x = 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

**Exercício 3.3.** Verifique se as soluções que você encontrou nos Exercícios 3.1 e 3.2 satisfazem a condição de entropia.

**Exercício 3.4.** O experimento do “tubo de choque” é um dos experimentos clássicos da dinâmica dos gases. Ele pode ser descrito da seguinte forma: Toma-se um tubo cilíndrico longo e fino, separado em dois por uma membrana fina posicionada em uma seção transversal. Um gás é colocado em cada lado, geralmente em repouso, mas com densidades diferentes. No instante  $t = 0$  a membrana é retirada de maneira súbita, e a evolução dos gases é observada. O problema matemático associado foi estudado inicialmente por Riemann e por isso o problema é chamado “problema de Riemann”. Ele consiste em resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_e & \text{se } x < 0, \\ u_d & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \end{cases}$$

onde  $u_e$  é a densidade na metade esquerda do cilindro e  $u_d$  é a densidade na metade direita. Vários dos exemplos que consideramos neste capítulo são problemas de Riemann, que é o ambiente mais simples para analisar fenômenos ondulatórios que incluem choques. Nos itens a seguir, assumamos que  $F'' > 0$ .

(a) Suponha que  $u_e > u_d$  (em outras palavras, a descontinuidade salta para baixo). Determine o valor de  $s$  para que

$$u(x, t) = \begin{cases} u_e & \text{se } x < st, \\ u_d & \text{se } x \geq st, \end{cases}$$

seja a solução que satisfaça a condição de Rankine-Hugoniot e a condição de entropia.

(b) Suponha agora que  $u_e < u_d$  (a descontinuidade salta para cima). Verifique que

$$u(x, t) = \begin{cases} u_e & \text{se } x < F'(u_e)t \\ (F')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } F'(u_e)t \leq x \leq F'(u_d)t, \\ u_d & \text{se } x \geq F'(u_d)t, \end{cases}$$

é uma solução contínua para o problema de Riemann (chamada uma solução de rarefação). Ela satisfaz a condição de entropia?

(c) No mundo real, a designação de esquerda-direita no problema de Riemann é puramente arbitrária, já que não existe nenhuma direção privilegiada no tubo. Em vista disso, qual das duas soluções acima esperamos ocorrer, ao realizarmos o experimento?

## Capítulo 4

# Resolução de Equações Diferenciais Parciais através de Séries de Potências

### 4.1 O Problema de Cauchy para Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem

Neste capítulo, analizaremos a possibilidade de resolver equações diferenciais parciais de qualquer ordem através do método de séries de potência, cujo êxito na resolução de equações diferenciais ordinárias o leitor já deve conhecer. Em outras palavras, nosso objetivo é encontrar soluções analíticas para equações diferenciais parciais de ordem arbitrária.

#### 4.1.1 Problema de Cauchy e Curvas Características

Em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , considere a equação quasilinear de segunda ordem

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = D, \quad (4.1)$$

onde  $A, B, C, D = A, B, C, D(x, y, u, u_x, u_y)$  são funções de classe  $C^2$ . A equação é de segunda ordem se pelo menos um dos coeficientes  $A, B, C$  é não nulo (eles nunca se anulam simultaneamente).

Seja  $\Gamma \subset \Omega$  uma curva de classe  $C^2$  parametrizada por  $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ ,  $s \in I$ . Em  $\Gamma$  nós prescrevemos os *dados de Cauchy*:

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma} &= f_0, \\ u_x|_{\Gamma} &= g_1, \\ u_y|_{\Gamma} &= g_2, \end{aligned}$$

onde  $f_0, g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  são também funções de classe  $C^2$ . Observe que, como em  $\Gamma$

$$f'_0(s) = \frac{d}{ds}u(\alpha(s), \beta(s)) = u_x\alpha'(s) + u_y\beta'(s) = g_1(s)\alpha'(s) + g_2(s)\beta'(s),$$

apenas uma entre as funções  $g_1, g_2$  pode ser atribuída independentemente. Poderíamos, ao invés, prescrever o valor de  $u$  e de sua derivada normal  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  sobre  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = (u_x, u_y) \cdot \frac{(-\beta', \alpha')}{\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}} = \frac{-u_x\beta' + u_y\alpha'}{\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}} = \frac{-g_1\beta' + g_2\alpha'}{\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}} = f_1,$$

de modo a produzir o problema de Cauchy na forma

$$\begin{cases} Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = D, & \text{em } \Omega, \\ u = f_0, & \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1, & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

onde  $f_0, f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de classe  $C^2$  escolhidas de forma independente uma da outra.

Agora, suponha que exista uma solução  $u$  de classe  $C^\infty$  para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = D, & \text{em } \Omega, \\ u = f_0, & \\ u_x = g_1, & \\ u_y = g_2, & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

em uma vizinhança de  $\Gamma$ , pelo menos. Como estamos procurando soluções analíticas, em particular elas devem ser de classe  $C^\infty$ . Se  $u$  fosse analítica em uma vizinhança de  $\Gamma$ , isto é, se fosse possível escrever  $u$  como uma série de potências nas variáveis  $x, y$ , uma maneira de fazer isso seria tomar um ponto  $(x_0, y_0) \in \Gamma$ , calcular as derivadas da função  $u$  em  $(x_0, y_0)$  e usar a expansão em série de potências dada pela fórmula de Taylor para escrever  $u$  como uma série de potências de  $x - x_0, y - y_0$ . Precisamos, então, ver se é possível calcular as derivadas de todas as ordens em pontos da curva  $\Gamma$ . Para ver se isso é possível, vamos primeiro calcular as derivadas segundas de  $u$  em  $\Gamma$ ; as derivadas de ordem 0 e 1 (isto é,  $u, u_x$  e  $u_y$ ) já estão dadas pelos dados de Cauchy. Derivando os dados de Cauchy e acrescentando a equação diferencial parcial, obtemos o sistema

$$\begin{cases} Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = D \\ u_{xx}\alpha'(s) + u_{xy}\beta'(s) = g'_1 \\ u_{yx}\alpha'(s) + u_{yy}\beta'(s) = g'_2 \end{cases},$$

logo  $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  podem ser calculados em  $\Gamma$  desde que

$$\det \begin{pmatrix} A & 2B & C \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' \end{pmatrix} = A(\beta')^2 - 2B\alpha'\beta' + C(\alpha')^2 \neq 0,$$

pois  $A, B, C, D$  envolvem apenas  $u, u_x$  e  $u_y$  e estes são dados explicitamente em  $\Gamma$  através dos dados de Cauchy. Dizemos que  $\Gamma$  é uma **curva característica** para a equação quasilinear de segunda ordem dada se  $A(\beta')^2 - 2B\alpha'\beta' + C(\alpha')^2 = 0$ , caso contrário dizemos que  $\Gamma$  é uma **curva não-característica**.

Vemos que só é possível calcular as derivadas de segunda ordem em  $\Gamma$  se ela for não-característica. Se isso ocorrer, as derivadas de terceira ordem em  $\Gamma$  também podem ser calculadas, derivando a equação diferencial parcial e os dados de Cauchy e usando os resultados obtidos anteriormente. Com efeito, derivando a equação diferencial parcial, em relação a  $x$  e em relação a  $y$ , e os dados anteriormente derivados de Cauchy novamente em relação a  $s$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} Au_{xxx} + 2Bu_{xxy} + Cu_{xyy} = D_1 \\ Au_{xxy} + 2Bu_{xyy} + Cu_{yyy} = D_2 \\ (\alpha')^2 u_{xxx} + 2\alpha'\beta' u_{xxy} + (\beta')^2 u_{xyy} = h_1 \\ (\alpha')^2 u_{xxy} + 2\alpha'\beta' u_{xyy} + (\beta')^2 u_{yyy} = h_2 \end{cases},$$

onde

$$\begin{aligned} D_1 &= \partial_x[D] - \partial_x[A]u_{xx} - 2\partial_x[B]u_{xy} - \partial_x[C]u_{yy}, \\ D_2 &= \partial_y[D] - \partial_y[A]u_{xx} - 2\partial_y[B]u_{xy} - \partial_y[C]u_{yy}, \\ h_1 &= g''_1 - u_{xx}\alpha''(s) - u_{xy}\beta''(s), \\ h_2 &= g''_2 - u_{yx}\alpha''(s) - u_{yy}\beta''(s), \end{aligned}$$

envolvem no máximo derivadas segundas de  $u$  em  $\Gamma$ , que já são conhecidas pelo passo anterior; a matriz de coeficientes deste sistema tem determinante

$$\det \begin{pmatrix} A & 2B & C & 0 \\ 0 & A & 2B & C \\ (\alpha')^2 & 2\alpha'\beta' & (\beta')^2 & 0 \\ 0 & (\alpha')^2 & 2\alpha'\beta' & (\beta')^2 \end{pmatrix} = [A(\beta')^2 - 2B\alpha'\beta' + C(\alpha')^2]^2 \neq 0,$$

logo ele possui uma solução única.

Repetindo este procedimento, as derivadas parciais de todas as ordens de  $u$  podem ser calculadas. Nós levaremos a cabo este procedimento formalmente quando demonstrarmos o Teorema de Cauchy-Kowalevski na próxima seção.

### 4.1.2 Classificação das Equações Quasilineares de Segunda Ordem

Como os dados de Cauchy em uma curva característica em geral não determinam os valores das derivadas segundas de  $u$  em  $\Gamma$  de maneira única, o problema de Cauchy para dados de Cauchy prescritos em curvas características geralmente não tem solução. As curvas características da equação quasilinear de segunda ordem estudada são determinadas pelos coeficientes  $A, B, C$ . Se os coeficientes  $A, B, C$  não dependem de  $u$  (em outras palavras, se a equação é linear), então as curvas características são determinadas exclusivamente por esses coeficientes; caso contrário, como a solução  $u$  depende dos dados iniciais, as características também dependem destes. Localmente, uma curva no plano pode ser representada por  $y = y(x)$  ou por  $x = x(y)$ . Se tivermos uma curva característica e ela for representada localmente por  $y = y(x)$  (se ela for representada por  $x = x(y)$  também obteremos a mesma conclusão a seguir), segue que sua derivada  $y'$  deve satisfazer a equação diferencial ordinária

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0,$$

ou seja,  $y(x)$  é solução da equação diferencial ordinária

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

No caso linear, isso permite uma classificação para as equações de segunda ordem, independentemente dos dados iniciais. Definindo a matriz

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

concluimos que

Se  $\Delta > 0$ , não existem características; a equação é chamada **elíptica**.

Se  $\Delta = 0$ , existe uma família de características; a equação é chamada **parabólica**.

Se  $\Delta < 0$ , existem duas famílias de características; a equação é chamada **hiperbólica**.

Esta terminologia é sugerida pela classificação das curvas quadráticas, soluções da equação algébrica  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D$ .

**Exemplo 4.1.** A equação de Laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

é elíptica ( $A = C = 1, B = 0$ ), a equação do calor unidimensional

$$u_t - u_{xx} = 0$$

é parabólica ( $A = -1, B = C = 0$ ), com retas características  $t = \text{constante}$ , e a equação da onda bidimensional

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

é hiperbólica ( $A = -c^2, B = 0, C = 1$ ), com retas características  $x \pm ct = \text{constante}$ .  $\square$



**Exemplo 4.2.** Como, em uma equação diferencial parcial linear  $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = D$ , em geral os coeficientes  $A, B, C$  não são constantes mas sim funções de  $(x, y)$ , o tipo de uma equação pode variar dependendo da região do plano considerada. Por exemplo, na equação de Tricomi

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0$$

temos

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -y,$$

logo ela é elíptica no semiplano inferior, parabólica no eixo  $x$  e hiperbólica no semiplano superior.  $\square$

**Exemplo 4.3.** A equação para um gás compressível em regime permanente (isto é, o escoamento não varia com o tempo) no plano é dada por

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (c^2 - u_y^2)u_{yy} = 0$$

onde  $u$  é a sua densidade,  $\nabla u$  a sua velocidade e  $c > 0$  é a velocidade do som. Temos

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} c^2 - u_x^2 & u_xu_y \\ u_xu_y & c^2 - u_y^2 \end{pmatrix} = c^2(c^2 - |\nabla u|^2).$$

Portanto, a equação é elíptica se o escoamento é subsônico ( $|\nabla u| < c$ ), parabólica se o escoamento for sônico ( $|\nabla u| = c$ ) e hiperbólica se o escoamento for supersônico ( $|\nabla u| > c$ ).  $\square$

Para dimensões maiores  $n \geq 3$ , considere a equação diferencial parcial de segunda ordem

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u)u_{x_ix_j} = F(x, u, \nabla u). \quad (4.2)$$

Se buscamos soluções de classe  $C^2$ , então o hessiano de  $u$  é uma matriz simétrica (isto é,  $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$ ), e portanto podemos sempre assumir que a matriz  $(a_{ij})$  dos coeficientes de segunda ordem desta equação também é simétrica (caso contrário, basta redefinir os coeficientes, tomando  $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = (a_{ij} + a_{ji})/2$ ). Assim, a matriz simétrica  $(a_{ij})$  possui apenas autovalores reais e podemos classificar as equações de segunda ordem da seguinte maneira:

Se  $(a_{ij})$  é não-singular e possui todos os autovalores com o mesmo sinal, a equação é chamada **elíptica**.

Se  $(a_{ij})$  é singular (logo possui um autovalor nulo), a equação é chamada **parabólica**.

Se  $(a_{ij})$  é não-singular e possui todos os autovalores com o mesmo sinal exceto um com sinal oposto, a equação é chamada **hiperbólica**.

Se  $(a_{ij})$  é não-singular e possui mais de um autovalor com cada sinal, a equação é chamada **ultrahiperbólica**.

Em outras palavras, podemos dizer que uma equação diferencial parcial de segunda ordem é elíptica se a matriz  $(a_{ij})$  de seus coeficientes é positiva definida (a menos de uma multiplicação da equação por  $-1$ , que podemos assumir que já foi realizada). Neste sentido, temos que a equação diferencial parcial

$$u_t = Lu + F(x, t, u, \nabla u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, u, \nabla u)u_{x_ix_j} + F(x, t, u, \nabla u) \quad (4.3)$$

é parabólica se o operador  $L$  é elíptico e a equação diferencial parcial

$$u_{tt} = Lu + F(x, t, u, \nabla u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, u, u_t, \nabla u)u_{x_ix_j} + F(x, t, u, u_t, \nabla u) \quad (4.4)$$

é hiperbólica se o operador  $L$  é elíptico; em geral, é nestas formas que as equações parabólicas e hiperbólicas são estudadas.

## 4.2 O Problema de Cauchy para Equações Diferenciais Parciais de Ordem Superior

### 4.2.1 Notação

Um **multi-índice** é um vetor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , isto é, suas componentes são números inteiros não-negativos:  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ . Assim, se  $A$  é um coeficiente que depende dos inteiros  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , denotaremos isso por

$$A_\alpha \text{ ou } A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}.$$

Definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

e

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Definimos também uma ordem parcial em  $\mathbb{N}^n$  por

$$\alpha \geq \beta \quad \text{se } \alpha_i \geq \beta_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Lembre-se que uma ordenação ser parcial significa que nem todos os multi-índices podem ser comparados (na verdade, a maioria não pode). A introdução desta ordem parcial tem como único objetivo simplificar a notação.

Para um vetor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos monômios de suas coordenadas por

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Segue que um polinômio real de grau  $m$  nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$  é denotado por

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha.$$

Usando o símbolo de diferenciação de Cauchy  $D_i$ , definido por

$$D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

denotamos o vetor gradiente por

$$D = (D_1, \dots, D_n).$$

Os operadores de diferenciação parcial de ordem  $m$  são então denotados por

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = m.$$

Usamos também o símbolo  $D^m$  para denotar um vetor que possui todas as derivadas parciais de ordem  $m$  como suas componentes (a ordem não importa). Assim, por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$  temos

$$D^2 = (D_1^2 D_2^0, D_1^0 D_2^2, D_1^1 D_2^1) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right).$$

**Exemplo 4.4.** Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , e  $\alpha, \beta$  multi-índices. Então, o teorema binomial se escreve como

$$(x + y)^\alpha = (x_1 + y_1)^{\alpha_1} \dots (x_n + y_n)^{\alpha_n} = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} x^\beta y^{\alpha - \beta},$$

e o teorema multinomial como

$$(x_1 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha.$$

A regra de Leibniz para a  $\alpha$ -ésima derivada de um produto de funções reais  $f$  e  $g$  é

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta f D^{\alpha - \beta} g.$$

□

Na notação multi-índice, a equação diferencial parcial linear de ordem  $m$  para uma função  $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ , toma a forma

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u = 0 \quad (4.5)$$

Dizemos que uma equação diferencial parcial é **quasilinear** de ordem  $m$  se ela é linear nas derivadas de ordem  $m$ , isto é, ela tem a forma

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u). \quad (4.6)$$

Se os coeficientes das derivadas de ordem  $m$  na equação diferencial parcial quasilinear dependem apenas de  $x$ , isto é, se ela tem a forma

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u),$$

dizemos que ela é **semilinear**.

## 4.2.2 Exercícios

**Exercício 4.1.** Prove as afirmações do Exemplo 4.4 explicitamente nos casos  $|\alpha| = 1, 2, 3$ . Prove o caso geral por indução.

## 4.2.3 O Problema de Cauchy e Superfícies Características

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $\Gamma \subset \Omega$  uma superfície  $(n - 1)$ -dimensional, com vetor unitário normal  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ . Definiremos a  $i$ -ésima derivada normal ao longo de  $\Gamma$  por

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = \sum_{|\alpha|=i} D^\alpha u \nu^\alpha = \sum_{|\alpha_1 + \dots + \alpha_n|=i} \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \nu_1^{\alpha_1} \dots \nu_n^{\alpha_n}. \quad (4.7)$$

Assim, por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \nu_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \nu_n = Du \cdot \nu$$

e, em dimensão 2,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \nu_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \nu_1 \nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \nu_2^2.$$

Sejam

$$f_0, f_1, \dots, f_{m-1} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$m$  funções dadas, definidas na superfície  $\Omega$ . Consideraremos o **problema de Cauchy** quasilinear

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) & \text{em } \Omega, \\ u = f_0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} = f_{m-1} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde todos os coeficientes  $A_\alpha$ ,  $F$  e os dados iniciais  $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$  são de classe  $C^\infty$ , escolhidos independentemente.

Se queremos ser capazes de obter uma fórmula de representação para uma solução  $u$  de classe  $C^\infty$  do problema de Cauchy quasilinear (admitindo que ela existe), precisamos em primeiro lugar ser capazes de calcular todas as derivadas parciais de  $u$  ao longo da curva  $\Gamma$ , pois a solução analítica será construída através da expansão em série de Taylor ao redor de pontos da superfície  $\Gamma$  (como vimos no caso de equações de segunda ordem bidimensionais). Vamos investigar que condições devemos impor sobre os dados iniciais  $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$  para que isso seja possível. Para isso, examinaremos um caso especial em que o vetor normal assume uma forma simples (mais adiante, veremos que o caso geral pode ser reduzido a este caso particular).

**Exemplo 4.5.** Sejam  $\Omega = \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma = \{x_n = 0\}$ . Neste caso,  $\nu = x_n$  e o problema de Cauchy se escreve na forma

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u = f_0, \frac{\partial u}{\partial x_n} = f_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}} = f_{m-1} & \text{se } x_n = 0. \end{cases}$$

Que derivadas parciais de  $u$  podemos calcular ao longo do hiperplano  $x_n = 0$ ? Primeiro, notando que  $u = f_0$  ao longo de todo o hiperplano  $\Gamma$ , podemos derivar tangencialmente, isto é, ao longo de qualquer uma das direções  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1,$$

e já sabemos, pela condições iniciais, que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = f_1,$$

portanto podemos calcular todo o gradiente  $Du$  de  $u$  em  $\Gamma$ . Analogamente, podemos continuar derivando tangencialmente para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

e usar o terceiro dado inicial para calcular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f_2;$$

logo, podemos calcular  $D^2u$  em  $\Gamma$ . Procedendo desta maneira, vemos que podemos calcular as derivadas  $D^3u, \dots, D^{m-1}u$  em  $\Gamma$ . A primeira dificuldade surge em calcular  $D^m u$ , mais particularmente, em calcular

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m},$$

pois as outras derivadas parciais podem ser obtidas derivando-se tangencialmente ao longo de  $\Gamma$ , usando o procedimento descrito anteriormente. Para calcular esta derivada parcial, recorremos à equação diferencial parcial: se  $A_{(0,\dots,0,m)} \neq 0$ , então podemos resolver a equação quasilinear para

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} = -\frac{1}{A_{(0,\dots,0,m)}} \left[ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha \neq (0,\dots,0,m)}} A_\alpha D^\alpha u + F \right];$$

observe que as funções  $A_{(0,\dots,0,m)}$ ,  $A_\alpha$  e  $F$  que aparecem no lado direito são calculadas no ponto  $(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u)$ , que é conhecido em  $\Gamma$ . Concluímos que podemos calcular  $D^m u$  em  $\Gamma$  desde que  $A_{(0,\dots,0,m)} \neq 0$ .

A partir daí podemos calcular as derivadas de qualquer ordem de  $u$ : por exemplo, para calcular  $D^{m+1}u$ , derivamos tangencialmente as derivadas de ordem  $m-1$  encontradas anteriormente e, quando formos calcular a derivada

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_n^{m+1}},$$

derivamos a equação diferencial parcial com respeito a  $x_n$ , obtendo

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x_n^{m+1}} = -\frac{1}{A_{(0,\dots,0,m)}} (\text{expressão envolvendo } x, u, Du, \dots, D^m u).$$

A única condição necessária é que  $A_{(0,\dots,0,m)} \neq 0$  em  $\Gamma$ .  $\square$

**Definição.** Dizemos que a hipersuperfície  $\Gamma$  é **não-característica** para a equação quasilinear

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u)$$

se

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) \nu^\alpha \neq 0 \quad \text{em } \Gamma$$

para todos os valores de  $x, u, Du, \dots, D^{m-1}u$ . Caso contrário, dizemos que  $\Gamma$  é uma **superfície característica** para a equação quasilinear.

A justificativa para esta definição é dada na demonstração da proposição a seguir:

**Proposição 4.6.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $\Gamma \subset \Omega$  uma hipersuperfície não-característica de classe  $C^\infty$  para a equação quasilinear*

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u).$$

$A_\alpha, F$  são de classe  $C^\infty$ . Então, se  $u$  é uma solução de classe  $C^\infty$  para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) & \text{em } \Omega, \\ u = f_0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} = f_{m-1} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

onde  $f_0, f_1, \dots, f_{m-1} \in C^\infty(\Gamma)$ , podemos calcular todas as derivadas parciais de  $u$  ao longo de  $\Gamma$  em termos de  $\Gamma$ , as funções  $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$  e os coeficientes  $A_\alpha$  e  $F$ .

**Prova.** Reduziremos a situação àquela mais simples descrita no Exemplo 4.5. Escolha algum ponto  $x_0 \in \Gamma$ . Localmente, podemos escrever a superfície  $\Gamma$  em uma vizinhança do ponto  $x_0$ , digamos  $B_\varepsilon(x_0)$ , como o gráfico em  $\mathbb{R}^n$  de uma função de classe  $C^\infty$   $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$  definida em uma vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Definindo

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

pelo teorema da função inversa  $\Phi$  é um difeomorfismo tal que  $\Phi(\Gamma \cap B_\varepsilon(x_0)) \subset \{x_n = 0\}$  para algum  $\varepsilon > 0$  e  $\Phi(x_0) = 0$ . Observe que como a  $n$ -ésima componente de  $\Phi$  é dada por

$$\Phi^n(x_1, \dots, x_n) = x_n - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

temos que

$$D\Phi^n(x) = \left( -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \dots, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(x), 1 \right)$$

é um vetor normal à superfície  $\Gamma$  em cada ponto  $x \in \Gamma \cap B_\varepsilon(x_0)$ , logo é paralelo ao vetor normal unitário  $\nu(x)$ . Denote por  $\Psi = \Phi^{-1}$  a inversa de  $\Phi$  e defina

$$v(x) = u(\Psi(x))$$

de modo que

$$u(x) = v(\Phi(x)).$$

Segue que  $v$  satisfaz uma equação diferencial parcial quasilinear na forma

$$\sum_{|\alpha|=m} B_\alpha(x, v, Dv, \dots, D^{m-1}v) D^\alpha v = G(x, v, Dv, \dots, D^{m-1}v).$$

Afirmamos que

$$B_{(0, \dots, 0, m)} \neq 0 \quad \text{em } \{x_n = 0\}.$$

De fato, pela regra da cadeia, se  $|\alpha| = m$ , temos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^m v}{\partial x_n^m} (D\Phi^n)^\alpha + \text{termos que não envolvem } \frac{\partial^m v}{\partial x_n^m}. \quad (4.9)$$

Note que o gradiente de  $\Phi^n$  é

$$D\Phi^n = \left( \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_n} \right)$$

e portanto  $(D\Phi^n)^\alpha$  é um monômio envolvendo as derivadas primeiras de  $\Phi^n$  de acordo com o multi-índice  $\alpha$ :

$$(D\Phi^n)^\alpha = \left( \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left( \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

[Por exemplo, no caso  $m = 1$  temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} (\Phi) \frac{\partial\Phi^k}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_n} (\Phi) \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_i} + \text{termos que não envolvem } \frac{\partial v}{\partial x_n},$$

e no caso  $m = 2$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} (\Phi) \frac{\partial\Phi^l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial\Phi^k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} (\Phi) \frac{\partial^2\Phi^k}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} (\Phi) \frac{\partial\Phi^k}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi^l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} (\Phi) \frac{\partial^2\Phi^k}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} (\Phi) \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi^n}{\partial x_j} + \text{termos que não envolvem } \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}, \end{aligned}$$

e assim por diante.]

Daí,

$$0 = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u - F = \left( \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (D\Phi^n)^\alpha \right) \frac{\partial^m v}{\partial x_n^m} + \text{termos que não envolvem } \frac{\partial^m v}{\partial x_n^m},$$

logo

$$B_{(0,\dots,0,m)} = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (D\Phi^n)^\alpha. \quad (4.10)$$

Mas, já que o vetor  $D\Phi^n$  é paralelo a  $\nu$  em  $\Gamma$ , como observamos acima, concluímos que  $B_{(0,\dots,0,m)}$  é um múltiplo não-nulo do termo

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \nu^\alpha,$$

que é não-nulo porque  $\Gamma$  é não-característica, logo

$$B_{(0,\dots,0,m)} \neq 0. \quad (4.11)$$

Agora, definindo as funções  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g_0 = v, g_1 = \frac{\partial v}{\partial x_n}, \dots, g_{m-1} = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial x_n^{m-1}},$$

segue que  $v$  satisfaz o problema de Cauchy quasilinear

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} B_\alpha(x, v, Dv, \dots, D^{m-1}v) D^\alpha v = G(x, v, Dv, \dots, D^{m-1}v) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ v = g_0, \frac{\partial v}{\partial x_n} = g_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial x_n^{m-1}} = g_{m-1} & \text{se } x_n = 0. \end{cases}$$

Como  $B_{(0,\dots,0,m)} \neq 0$ , segue do argumento usado no Exemplo 4.5 que podemos calcular as derivadas parciais de todas as ordens de  $v$  na vizinhança de 0. Usando o difeomorfismo  $\Phi$ , concluímos que podemos calcular as derivadas parciais de todas as ordens de  $u$  na vizinhança de  $x_0$ . ■

## 4.3 O Teorema de Cauchy-Kowalevski

O teorema de Cauchy-Kowalevski afirma a existência de soluções analíticas locais para o problema de Cauchy definido em uma hipersuperfície analítica  $\Gamma$  não-característica, desde que os coeficientes da equação e os dados iniciais sejam todos analíticos. Esta restrição de analiticidade dos coeficientes, curva e dados iniciais, mais o fato de que ele não distingue entre problemas bem-postos e os mal-postos, faz com que este teorema tenha muito pouca importância prática. No entanto, do ponto de vista histórico, ele foi o primeiro teorema de existência para uma classe ampla de equações diferenciais parciais e ele permanece sendo um dos poucos que pode ser provado sem o uso de ferramentas de análise funcional.

### 4.3.1 Funções Analíticas Reais

Antes de demonstrar o Teorema de Cauchy-Kowalevski, revisaremos alguns fatos básicos sobre funções analíticas reais.

**Definição.** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é **analítica** em torno da origem se existem  $r > 0$  e constantes  $c_\alpha \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha x^\alpha$$

para todo  $|x| < r$ .

O valor máximo de  $r$  para o qual a série converge é chamado o **raio de convergência** para a série. Observe que se  $f$  é analítica em torno da origem, então  $f$  é de classe  $C^\infty$  em uma vizinhança da origem. Segue do teorema de Taylor que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

**Exemplo 4.7.** Dado  $\varepsilon > 0$ , defina

$$f(x) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - (x_1 + \dots + x_n)}.$$

Temos que  $f$  é analítica em torno da origem e seu raio de convergência é  $r = \varepsilon/\sqrt{n}$ . De fato, como  $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n}|x| < \varepsilon$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{\varepsilon}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{\varepsilon} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\varepsilon^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha. \end{aligned}$$

□

Uma ferramenta importante para provar que uma série de potências converge é mostrar que ela é *majorada* por outra série que sabemos convergir:

**Definição.** Sejam

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} f_\alpha x^\alpha, \quad g(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} g_\alpha x^\alpha$$

duas séries de potências. Dizemos que  $g$  **majora**  $f$  se

$$g_\alpha \geq |f_\alpha| \quad \text{para todo multi-índice } \alpha,$$

e denotamos isso por

$$g \gg f$$

**Proposição 4.8.** Se  $g \gg f$  e  $g$  converge para  $|x| < r$ , então  $f$  também converge para  $|x| < r$ .

**Prova.** Pois

$$\left| \sum_{|\alpha| \geq 0} f_\alpha x^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \geq 0} |f_\alpha| |x|^\alpha \leq \sum_{|\alpha| \geq 0} g_\alpha |x|^\alpha < \infty.$$

□

O resultado a seguir será usado na demonstração do Teorema de Cauchy-Kowalevski.

**Proposição 4.9.** Se  $f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} f_\alpha x^\alpha$  converge para  $|x| < r$  e  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno para que

$0 < \varepsilon\sqrt{n} < r$ , então existe uma constante  $C > 0$  suficientemente grande tal que

$$g(x) = \frac{C\varepsilon}{\varepsilon - (x_1 + \dots + x_n)}$$

majora  $f$  para  $|x| \leq \varepsilon\sqrt{n}$ .



**Prova.** Seja  $y = \varepsilon(1, \dots, 1)$ . Então  $|y| = \varepsilon\sqrt{n} < r$  e portanto

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} f_\alpha y^\alpha$$

converge. Em particular, isso implica que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f_\alpha y^\alpha| \leq C \quad \text{para todo multi-índice } \alpha.$$

Logo,

$$|f_\alpha| \leq \frac{C}{|y^\alpha|} = \frac{C}{|y_1^{\alpha_1}| \dots |y_n^{\alpha_n}|} = \frac{C}{|\varepsilon^{\alpha_1}| \dots |\varepsilon^{\alpha_n}|} = \frac{C}{\varepsilon^{|\alpha_1 + \dots + \alpha_n|}} = \frac{C}{\varepsilon^{|\alpha|}} \leq C \frac{|\alpha|!}{\varepsilon^{|\alpha| \alpha!}},$$

donde concluímos (usando o Exemplo 4.7) que  $g$  majora  $f$ .  $\square$

### 4.3.2 Exercícios

**Exercício 4.2.** Prove que

$$\alpha! \leq |\alpha|!$$

para todo multi-índice  $\alpha$ .

### 4.3.3 O Teorema de Cauchy-Kowalevski

Queremos provar a existência de uma única solução analítica para o problema de Cauchy quasilinear de ordem  $m$

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) & \text{em } \Omega, \\ u = f_0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} = f_{m-1} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

em uma vizinhança de  $\Gamma$ , assumindo que  $\Gamma \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície analítica não-característica e que  $A_\alpha, F, f_i$  são todas funções analíticas. Para isso, reduziremos o problema a um problema de Cauchy mais simples.

Em primeiro lugar, reduzimos a superfície inicial  $\Gamma$  a um hiperplano, como fizemos no início da demonstração da Proposição 4.6, exceto que aqui tomaremos cuidado em mostrar que os difeomorfismos usados são analíticos. Uma superfície  $\Gamma$  é geralmente descrita através de uma entre três maneiras: como uma superfície de nível de uma função  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  (assumindo que  $\nabla f \neq 0$ ); como o gráfico de uma função  $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ; ou como a imagem de uma parametrização  $x = \varphi(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  (assumindo que  $(\partial \varphi_i / \partial y_j)$  tem posto máximo). Dizemos que  $\Gamma$  é analítica se as funções  $f, g, \varphi$  são analíticas. O teorema da função implícita garante que todas as três definições são localmente equivalentes. Podemos então assumir, após uma reenumeração das coordenadas, que a superfície  $\Gamma$  no problema de Cauchy acima é dada, em uma vizinhança de um ponto  $p \in \Gamma$ , na forma  $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  para alguma função analítica  $g$ . Daí, fazendo a mudança de coordenadas

$$y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = x_n - g(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

segue que no novo sistema de coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$  a superfície  $\Gamma$  é o hiperplano  $y_n = 0$ . Observe que esta mudança de coordenadas, assim como a sua inversa, é uma função analítica. Também não há perda de generalidade em supor que  $p = 0$ , através do uso de translações convenientes. Além disso, como vimos na demonstração da Proposição 4.6, o novo problema de Cauchy é um problema da forma

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) D^\alpha u = F(x, u, Du, \dots, D^{m-1}u) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u = f_0, \frac{\partial u}{\partial x_n} = f_1, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}} = f_{m-1} & \text{se } x_n = 0, \end{cases}$$

onde conservamos a notação anterior, ao invés de introduzir nova notação para a solução, os coeficientes da equação e as funções dadas, por simplicidade. Lembre-se que para este problema o hiperplano  $x_n = 0$  é não-característico.

Em seguida, reduzimos a equação diferencial parcial a um sistema de equações diferenciais parciais quasilineares de primeira ordem. Este tipo de procedimento poderia ter sido tão facilmente aplicado desde o início a um problema de Cauchy envolvendo um sistema de equações diferenciais parciais quasilineares de ordem  $m$ , reduzindo-o a um sistema de equações quasilineares de primeira ordem. Além disso, sistemas não-lineares mais gerais podem ser reduzidos a sistemas quasilineares através da derivação das equações. Não faremos isso aqui para manter a notação simples, enfatizando as idéias envolvidas na demonstração, como em [Evans]. Detalhes sobre problemas de Cauchy para sistemas, bem como a demonstração do Teorema de Cauchy-Kowalevski e do Teorema de Holmgren (a ser visto na próxima seção) para tais sistemas, podem ser encontrados em qualquer uma das referências [DiBenedetto], [John] ou [Renardy-Rogers]. Antes de ver o procedimento aplicado ao caso que estamos considerando, vamos ver o caso especial de equações não-lineares de segunda ordem, para facilitar a compreensão do algoritmo.

**Exemplo 4.7.** Considere o problema de Cauchy para a equação diferencial parcial não-linear geral de segunda ordem em  $\mathbb{R}^2$ , com dados de Cauchy sobre o hiperplano não-característico  $y = 0$ :

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 & \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = g(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dizer que o hiperplano é não-característico para a equação não-linear quer dizer que a equação não-linear algébrica

$$F(x, 0, f(x), f'(x), g(x), f''(x), g'(x), z) = 0 \quad (4.12)$$

possui uma solução  $z = z(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  e que

$$\partial_8 F(x, 0, f(x), f'(x), g(x), f''(x), g'(x), z(x)) \neq 0 \quad (4.13)$$

onde  $\partial_i$  denota a derivada em relação ao  $i$ -ésimo argumento.

Primeiro transformamos a equação não-linear em uma equação quasilinear de terceira ordem derivando-a em relação a  $y$ :

$$\begin{aligned} & \partial_2 F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \\ & + \partial_3 F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) u_y \\ & + \partial_4 F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) u_{xy} + \partial_5 F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) u_{yy} \\ & + \partial_6 F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) u_{xxy} + \partial_7 F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) u_{xyy} \\ & + \partial_8 F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) u_{yyy} \\ & = 0. \end{aligned}$$

As condições iniciais para esta equação diferencial quasilinear sobre o hiperplano  $y = 0$  são

$$u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = g(x), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, 0) = z(x). \quad (4.14)$$

Portanto, agora temos um problema de Cauchy quasilinear de terceira ordem, com o hiperplano  $y = 0$  não-característico (pela condição (4.13)).

Em seguida, transformaremos a equação quasilinear em um sistema de equações quasilineares de

primeira ordem. Além da variável  $u$ , definimos as novas variáveis

$$\begin{aligned} p &= u_x, \\ q &= u_y, \\ r &= u_{xx}, \\ s &= u_{xy}, \\ t &= u_{yy}, \end{aligned}$$

obtendo o sistema

$$\begin{cases} u_y = q, \\ p_y = s, \\ q_y = t, \\ r_y = s_x, \\ s_y = t_x, \\ t_y = -\frac{1}{\partial_8 F} [\partial_2 F + \partial_3 F q + \partial_4 F s + \partial_5 F t + \partial_6 F s_x + \partial_7 F t_x], \end{cases}$$

onde os coeficientes  $\partial_2 F, \partial_3 F, \partial_4 F, \partial_5 F, \partial_6 F, \partial_7 F, \partial_8 F$  são funções das variáveis  $u, p, q, r, s, t$ . As condições iniciais são

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ p(x, 0) &= f'(x), \\ q(x, 0) &= g(x), \\ r(x, 0) &= f''(x), \\ s(x, 0) &= g'(x), \\ t(x, 0) &= z(x). \end{aligned}$$

□

Agora, vamos aplicar o procedimento descrito no exemplo ao nosso problema. Lembre-se que, pelo fato do hiperplano  $x_n = 0$  não ser característico, podemos escrever a equação quasilinear na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} &= -\frac{1}{A_{(0, \dots, 0, m)}} \left[ \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha \neq (0, \dots, 0, m)}} A_\alpha D^\alpha u + F \right] \\ &= -\frac{1}{A_{(0, \dots, 0, m)}} \left[ \sum_{|\beta|=m} A_{(\beta, 0)} D^\beta u + \sum_{\substack{|\beta|+k=m \\ 0 \leq k < m}} A_{(\beta, k)} \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} D^\beta u + F \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Definimos todas as derivadas de  $u$  de ordem menor que  $m$  como novas variáveis:

$$v_\alpha = D^\alpha u \quad \text{se } 0 \leq |\alpha| \leq m-1. \quad (4.16)$$

Equações diferenciais parciais de primeira ordem para estas variáveis surgem da seguinte forma. Se  $\alpha = (\beta, k)$ , com  $k \leq m-2$ , então

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_n} = \frac{\partial v_{\tilde{\alpha}}}{\partial x_i} \quad (4.17)$$

para algum multi-índice  $\tilde{\alpha}$  e para algum índice  $i = 1, \dots, n-1$ ; se  $\alpha = (0, \dots, 0, m-1)$ , então

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_n} = \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \quad (4.18)$$

e  $\partial^m u / \partial x_n^m$  é dada acima. Assim, denotando o vetor  $\mathbf{v} = (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m-1} = (u, Du, \dots, D^{m-1}u)$  como sendo o vetor cujas componentes são estas novas variáveis, transformamos a equação quasilinear em um sistema na forma

$$\left\{ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha} B_\alpha(x, \mathbf{v}) \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} + G(x, \mathbf{v}), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m-1. \right. \quad (4.19)$$

Os dados iniciais de  $\mathbf{v}$  no hiperplano são dados pelas derivadas apropriadas dos dados iniciais de  $u$ . Podemos ainda assumir que a condição inicial para  $u$  é 0, introduzindo a variável  $v(x) = u(x) - f_0(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Como já dissemos acima, para manter a notação simples provaremos o Teorema de Cauchy-Kowalevski apenas para uma equação quasilinear de primeira ordem:

**Teorema 4.8.** (Teorema de Cauchy-Kowalevski) *Considere o problema de Cauchy de primeira ordem com condição de fronteira homogênea*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i(x, u) u_{x_i} + c(x, u) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{array} \right.$$

onde  $b_1, \dots, b_{n-1}, c$  são funções analíticas reais. Então existe uma única solução analítica real  $u$  para este problema em uma vizinhança da origem.

**Prova.** A demonstração deste teorema dar-se-á da seguinte forma. Em primeiro lugar, calculamos todas as derivadas na origem de uma possível solução, mostrando que elas são determinadas a priori pelo problema (ou seja, elas são dadas em termos dos coeficientes  $b_i, c$  da equação diferencial parcial aplicados no ponto  $(0, 0)$ ). Em seguida, usamos os valores obtidos para construir a série de Taylor formal da solução esperada:

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Se provarmos que esta série converge em uma vizinhança da origem, então esta expressão define uma função analítica em torno da origem. Segue imediatamente que esta é a única solução analítica em uma vizinhança da origem. De fato, substituindo esta expressão nos lados esquerdo e direito da equação, obteremos necessariamente duas funções analíticas reais cujas derivadas de qualquer ordem coincidem em 0 (por construção, já que as derivadas de  $u$  na origem foram calculadas através da equação), logo as funções devem coincidir em uma vizinhança da origem. A unicidade de solução analítica segue pelo mesmo argumento.

**Primeiro Passo: Cálculo das derivadas na origem.** Note que do fato que  $u = 0$  em  $\{x_n = 0\}$  segue imediatamente que

$$D^\alpha u(0) = 0 \quad \text{para todos os multi-índices } \alpha \text{ tais que } \alpha_n = 0, \quad (4.20)$$

pois estas correspondem às derivadas tangenciais ao longo do hiperplano  $\{x_n = 0\}$ .

As demais derivadas na origem são dadas em termos dos coeficientes  $b_i(0, 0), c(0, 0)$  da equação. Em primeiro lugar, vamos calcular  $D^\alpha u(0)$  para multi-índices em que  $\alpha_n = 1$ , isto é, multi-índices da forma  $(\alpha', 1)$ . Fixe  $1 \leq j \leq n-1$  e derive a equação diferencial parcial com relação à  $x_j$ :

$$u_{x_n x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ b_i u_{x_i x_j} + b_z^i u_{x_j} u_{x_i} + b_{x_j}^i u_{x_i} \right] + c_z u_{x_j} + c_{x_j}.$$

Segue de (4.20) que

$$u_{x_n x_j}(0) = c_{x_j}(0). \quad (4.21)$$

Mais geralmente, se  $\alpha = (\alpha', 1)$ , temos por indução que

$$D^\alpha u(0) = D^{\alpha'} c(0). \quad (4.22)$$

Em seguida, suponha que seja  $\alpha$  um multi-índice da forma  $(\alpha', 2)$ . Então,

$$D^\alpha u(0) = D^{\alpha'} \partial_{x_n} (u_{x_n}) = D^{\alpha'} \partial_{x_n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + c \right) = D^{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{n-1} [b_i u_{x_i x_n} + b_z^i u_{x_n} u_{x_i} + b_{x_n}^i u_{x_i}] + c_z u_{x_n} + c_{x_n} \right),$$

donde

$$D^\alpha u(0) = D^{\alpha'} \left( \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i x_n} + c_z u_{x_n} + c_{x_n} \right) \Big|_{x=u=0}.$$

A expressão que aparece no lado direito é um polinômio com coeficientes não-negativos envolvendo somente derivadas de  $b_i$  e  $c$ , calculadas em  $(0, 0)$ , e derivadas  $D^\beta u(0)$  com  $\beta_n \leq 1$ . Em geral, para qualquer multi-índice  $\alpha$ , podemos calcular  $D^\alpha u(0)$  como sendo um polinômio com coeficientes não-negativos envolvendo somente derivadas de  $b_i$  e  $c$  em  $(0, 0)$  e derivadas  $D^\beta u(0)$  com  $\beta_n \leq \alpha_n - 1$ .

**Segundo Passo: Convergência da Série de Taylor.** Agora vamos estabelecer a convergência da série de Taylor formal

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha u(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Usaremos o chamado método dos majorantes, como em [John] e [Evans], que consiste em majorar a série definida acima por outra série cuja convergência é mais facilmente estabelecida. Este procedimento indireto foi o seguido originalmente por A. Cauchy (em 1840, para sistemas lineares), S. Kowalevski e G. Darboux (ambos em 1875, generalizando para sistemas não-lineares). A convergência da série também pode ser estabelecida diretamente, através de estimativas de todas as derivadas de  $u$ ; esta abordagem foi introduzida por P. Lax (em 1953) e é a seguida em [DiBenedetto].

Como  $b_i, c$  são analíticos, podemos escrever

$$b_i(x, z) = \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma, \delta}^i x^\gamma z^\delta, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$c(x, z) = \sum_{\gamma, \delta} c_{\gamma, \delta} x^\gamma z^\delta,$$

com estas séries convergindo para  $|x| + |z| < \varepsilon$ , para algum  $\varepsilon_0 > 0$ , e os coeficientes  $b_{\gamma, \delta}^i, c_{\gamma, \delta}$  sendo conseqüentemente dados pela expansão em série de Taylor destas funções em torno da origem, isto é,

$$b_{\gamma, \delta}^i = \frac{D_x^\gamma D_z^\delta b(0, 0)}{(\gamma + \delta)!},$$

$$c_{\gamma, \delta} = \frac{D_x^\gamma D_z^\delta c(0, 0)}{(\gamma + \delta)!}.$$

Suponha que existam funções analíticas

$$b_i^*(x, z) = \sum_{\gamma, \delta} b_{\gamma, \delta}^{i*} x^\gamma z^\delta, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$c^*(x, z) = \sum_{\gamma, \delta} c_{\gamma, \delta}^* x^\gamma z^\delta,$$

tais que

$$b_i^* \gg b_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$c^* \gg c,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |b_{\gamma,\delta}^i| \leq b_{\gamma,\delta}^{i*}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 0 &\leq |c_{\gamma,\delta}| \leq c_{\gamma,\delta}^*. \end{aligned}$$

Considere o problema de Cauchy associado

$$\begin{cases} u_{x_n}^* = \sum_{i=1}^{n-1} b_i^*(x, u^*) u_{x_i}^* + c^*(x, u^*) & \text{em } \mathbb{R}_+^n, \\ u^* = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$0 \leq |D^\alpha u(0)| \leq D^\alpha u^*(0).$$

A demonstração deste fato é por indução. Como vimos acima, para qualquer multi-índice  $\alpha$ ,  $D^\alpha u(0)$  é um polinômio com coeficientes não-negativos envolvendo somente derivadas de  $b_i$  e  $c$ , e derivadas  $D^\beta u(0)$  com  $\beta_n \leq \alpha_n - 1$ . Denotaremos isso por

$$D^\alpha u(0) = p_\alpha(b_{\gamma,\delta}^i, c_{\gamma,\delta}, D^\beta u).$$

Temos

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(0)| &= |p_\alpha(b_{\gamma,\delta}^i, c_{\gamma,\delta}, D^\beta u(0))| \\ &\leq p_\alpha(|b_{\gamma,\delta}^i|, |c_{\gamma,\delta}|, |D^\beta u(0)|) \quad (\text{pois os coeficientes de são não-negativos}) \\ &\leq p_\alpha(b_{\gamma,\delta}^{i*}, c_{\gamma,\delta}^*, D^\beta u(0)) \quad (\text{por hipótese de majoração e por hipótese de indução}) \\ &= D^\alpha u^*(0). \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.9, podemos tomar

$$b_1^* = \dots = b_{n-1}^* = c^* = \frac{C\varepsilon}{\varepsilon - (x_1 + \dots + x_n + z)},$$

onde  $C$  é uma constante suficientemente grande,  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno e  $|x| + |z| < \varepsilon/\sqrt{n}$ . O problema de Cauchy associado é

$$\begin{cases} u_{x_n}^* = \frac{C\varepsilon}{\varepsilon - (x_1 + \dots + x_n + u^*)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i}^* + 1 \right) & \text{em } \mathbb{R}_+^n, \\ u^* = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

que tem como solução a função

$$u^*(x) = \frac{1}{n} \left[ \varepsilon - (x_1 + \dots + x_n) - \sqrt{[\varepsilon - (x_1 + \dots + x_n)]^2 - 2nC\varepsilon x_n} \right],$$

a qual é analítica para  $|x| < r$ , se  $r$  é suficientemente pequeno. Como  $u$  é majorada por  $u^*$ , segue que a série de potências que define  $u$  também converge para  $|x| < r$ . ■

Observe que o Teorema de Cauchy-Kowalevski é de natureza estritamente local: a solução pode deixar de existir ou, pelo menos, deixar de ser analítica em algum valor finito de  $x_n$ . O teorema garante a existência de uma solução analítica em uma vizinhança de cada ponto da curva  $\Gamma$ ; tomando a união de todas essas vizinhanças, obtemos uma solução analítica em uma vizinhança de  $\Gamma$ . Já vimos vários exemplos no capítulo anterior em que a solução deixa de existir depois de um tempo finito, no caso  $m = 1$ . Além disso, o teorema não exclui a existência de outras soluções, não analíticas, mesmo em uma vizinhança de  $\Gamma$ ; a unicidade é garantida apenas na classe de soluções analíticas. Veremos na próxima seção que a unicidade é garantida para funções de classe  $C^1$  quando a equação diferencial parcial é linear.

### 4.3.4 Exercícios

**Exercício 4.3.** *Sejam  $C, \varepsilon > 0$ . Use o método das características para mostrar que a solução para o problema de valor inicial quasilinear*

$$\begin{cases} u_t = \frac{C\varepsilon}{\varepsilon - (x+t+u)}(u_x + 1) & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

é

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon - (x+t) - \sqrt{[\varepsilon - (x+t)]^2 - 4C\varepsilon t} \right].$$

**Exercício 4.4.** *Sejam  $C, \varepsilon > 0$ . Use o método das características para mostrar que a solução para o problema de valor inicial quasilinear*

$$\begin{cases} u_t = \frac{C\varepsilon}{\varepsilon - (x_1 + \dots + x_n + t + u)} \left( \sum_{i=1}^n u_{x_i} + 1 \right) & \text{se } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é

$$u(x) = \frac{1}{n+1} \left[ \varepsilon - (x_1 + \dots + x_n + t) - \sqrt{[\varepsilon - (x_1 + \dots + x_n + t)]^2 - 2(n+1)C\varepsilon t} \right].$$

**Exercício 4.5.** *Mostre que qualquer sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de ordem  $m$  pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais parciais quasilineares de ordem  $m+1$ .*

**Exercício 4.6.** *Prove o Teorema de Cauchy-Kowalevski para um sistema de equações quasilineares de primeira ordem. Consulte uma das referências citadas no texto desta seção, se desejar.*

## 4.4 O Teorema de Unicidade de Holmgren

O Teorema de Cauchy-Kowalevski garante a unicidade de soluções apenas na classe de funções analíticas e em uma vizinhança da superfície inicial. O Teorema da Unicidade de Holmgren estabelece a unicidade de soluções clássicas se a equação for linear. Novamente, embora o resultado seja válido para sistemas de equações lineares, para simplificar a notação consideraremos apenas o caso de uma única equação.

A idéia da demonstração do Teorema de Holmgren é como segue. Considere um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$  que é uma interseção de uma vizinhança convexa da origem e o semiespaço  $\mathbb{R}_+^n$ . Denote por  $Z = \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n$  a fronteira “reta” de  $\Omega$  e por  $S = \overline{\partial\Omega} \setminus Z$  a fronteira “curva” de  $\Omega$ . Suponha que  $S$  seja não-característica e analítica para a equação

$$\sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = 0 \quad (4.23)$$

com coeficientes analíticos, e que  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  é uma solução para esta equação tal que  $u = 0$  em  $Z$ . Certamente, a solução identicamente nula é uma solução para este problema em  $\Omega$  e queremos provar que ela é a única solução. Suponha que existisse uma solução  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  da equação “adjunta”

$$-\sum_{i=1}^n [b_i(x) v]_{x_i} + c(x) v = 0 \quad (4.24)$$

com condição inicial

$$v = f \quad \text{em } S,$$

onde  $f$  é uma função contínua arbitrária. Multiplicando a primeira equação por  $v$  e integrando por partes em  $\Omega$  segue então que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} v + \int_{\Omega} c(x) uv = \left( \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n b_i(x) uv \nu_i ds - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n [b_i(x)v]_{x_i} u \right) + \int_{\Omega} c(x) uv \\ &= \int_S \sum_{i=1}^n b_i(x) uv \nu_i ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \int_S b_i(x) f(x) u \nu_i ds = 0. \quad (4.25)$$

Se isso valesse para qualquer função contínua  $f$ , concluiríamos que  $\sum_{i=1}^n b_i(x) u \nu_i = 0$  em  $S$ . Como  $S$  é

não-característica, temos que  $\sum_{i=1}^n b_i(x) \nu_i \neq 0$  em  $S$ , logo seguiria que  $u = 0$  em  $S$ . Como podemos reduzir sucessivamente o aberto  $\Omega$ , fazendo  $S$  tender para  $Z$ , concluiríamos finalmente que  $u = 0$  em  $\Omega$ .

A dificuldade é que o Teorema de Cauchy-Kowalewski assegura a existência de  $v$  apenas em uma vizinhança de  $S$  para  $f$  analítica (é claro que se  $S$  é não-característica para a equação (4.23), então  $S$  também é não-característica para (4.24), pois as duas diferem na sua parte de primeira ordem apenas por sinal). O fato de  $f$  ser analítica não é um problema, pois se a identidade integral (4.25) vale para funções analíticas arbitrárias, então o Teorema de Aproximação de Weierstrass (toda função contínua pode ser aproximada uniformemente por funções polinomiais em subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ ) garante que (4.25) vale para funções contínuas arbitrárias. O problema é que o Teorema de Cauchy-Kowalewski não pode garantir que  $v$  esteja definida em todo o aberto  $\Omega$ . Por este motivo, na demonstração do Teorema de Holmgren, substituiremos a superfície  $S$  por uma família a um parâmetro de superfícies  $S_\lambda$  e prosseguiremos através de pequenos incrementos em  $\lambda$ .

#### 4.4.1 Caracterização de Funções Analíticas

Para demonstrar o Teorema de Unicidade de Holmgren, precisaremos de mais alguns fatos sobre funções analíticas. Suponha que  $f$  é uma função analítica em torno da origem tal que  $f$  converge absolutamente em um ponto  $y = (y_1, \dots, y_n)$  cujas componentes  $y_i$  são todas não-nulas. Então ela converge absolutamente no domínio retangular aberto  $R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < |y_i| \text{ para } i = 1, \dots, n\}$  e uniformemente em qualquer subconjunto compacto  $K \subset R$ . Queremos obter uma estimativa para as derivadas  $D^\alpha f$ . Seja  $x$  tal que  $|x_i| \leq q |y_i|$  para  $i = 1, \dots, n$  para algum  $0 \leq q < 1$ . Escreva

$$f(x) = \sum_{|\beta| \geq 0} c_\beta x^\beta.$$

Derivando termo a termo, segue que

$$D^\alpha f(x) = \sum_{\beta \geq \alpha} c_\beta D^\alpha x^\beta = \sum_{\beta \geq \alpha} c_\beta \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha},$$

logo

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x)| &\leq \sum_{\beta \geq \alpha} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} |c_\beta| |x|^{\beta - \alpha} \leq \sum_{\beta \geq \alpha} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} |c_\beta| q^{|\beta - \alpha|} |y|^{\beta - \alpha} \\ &\leq \frac{1}{|y^\alpha|} \sup_{\beta} (|c_\beta| |y^\beta|) \sum_{\beta \geq \alpha} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} q^{|\beta - \alpha|}. \end{aligned}$$



Temos (veja o Exercício 4.7)

$$\sum_{\beta \geq \alpha} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} q^{|\beta - \alpha|} = \frac{\alpha!}{(1 - q)^{n + |\alpha|}}. \quad (4.26)$$

Tomando

$$M = \frac{\sup_{\beta} (|c_{\beta}| |y^{\beta}|)}{(1 - q)^n} \text{ e } r = (1 - q) \min_{i=1, \dots, n} |y_i|,$$

obtemos

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq \frac{M |\alpha!}{r^{|\alpha|}} \text{ para todo } \alpha.$$

Portanto, se  $f$  é analítica em uma vizinhança de um ponto  $x$ , então as derivadas de  $f$  satisfazem uma estimativa do tipo acima em alguma vizinhança de  $x$ . Esta propriedade caracteriza as funções analíticas reais, como o próximo resultado mostra.

**Definição.** Seja  $f$  uma função definida na vizinhança de um ponto  $x$ . Para números positivos dados  $M$  e  $r$ , dizemos que  $f \in C_{M,r}(x)$  se  $r$  é de classe  $C^{\infty}$  em uma vizinhança de  $x$  e

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq \frac{M |\alpha!}{r^{|\alpha|}} \text{ para todo } \alpha. \quad (4.27)$$

**Proposição 4.9.** (Caracterização das Funções Analíticas) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f \in C^{\infty}(\Omega)$ . Então  $f$  é analítica em  $\Omega$  se e somente se para todo compacto  $K \subset \Omega$  existem números positivos  $M, r$  tais que  $f \in C_{M,r}(x)$  para todo  $x \in K$ .*

**Prova.** Suponha que  $f$  é analítica. Dado um compacto  $K \subset \Omega$ , para cada  $x \in K$  encontramos, como na discussão no início desta subseção, uma vizinhança  $V(x)$  e números  $M(x)$  e  $r(x)$  tais que (4.27) vale em  $V(x)$ . Tome um número finito de tais vizinhanças  $V(x_1), \dots, V(x_n)$  para cobrir  $K$  e escolha  $M = \max_{x \in K} M(x)$  e  $r = \min_{x \in K} r(x)$ .

Para a recíproca, escolha  $x_0 \in \Omega$  e seja  $K \subset \Omega$  uma bola fechada centrada em  $x_0$  de raio  $s$ . Sejam  $M, r$  números positivos para os quais  $f \in C_{M,r}(x)$  para todo  $x \in K$ . Escolhendo a norma  $|x - x_0| = \sum_{i=1}^n |x_i - (x_0)_i|$ , provaremos que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^{\alpha} f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^{\alpha}$$

sempre que  $|x - x_0| < \min(r, s)$ . De fato, para cada tal  $x$ , defina a função escalar

$$\phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)).$$

Para cada inteiro  $j$  e para cada  $0 \leq t \leq 1$ , temos pela regra da cadeia (veja Exercício 4.8) e pelo teorema multinomial que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{j!} \frac{d^j \phi}{dt^j} \right| &= \left| \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(x_0 + t(x - x_0)) (x - x_0)^{\alpha} \right| \leq \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} |D^{\alpha} f(x_0 + t(x - x_0))| |(x - x_0)^{\alpha}| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=j} \frac{M |\alpha!}{r^{|\alpha|} \alpha!} |(x - x_0)^{\alpha}| = \frac{M}{r^j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha!}{\alpha!} |(x - x_0)^{\alpha}| = \frac{M}{r^j} |x - x_0|^j. \end{aligned}$$

Do teorema de Taylor, segue que

$$f(x) = \phi(1) = \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \frac{d^k \phi}{dt^k}(0) + \frac{1}{j!} \frac{d^j \phi}{dt^j}(\tau_j)$$

para algum  $0 \leq \tau_j \leq 1$ . Como a série é limitada pela série convergente  $\sum_{k=0}^{\infty} M\varepsilon^k$ , onde  $\varepsilon = \frac{|x - x_0|}{r} < 1$ , temos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k \phi}{dt^k}(0) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

converge. ■

#### 4.4.2 O Teorema de Unicidade de Holmgren

**Teorema 4.10.** (Teorema de Unicidade de Holmgren) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Considere a equação diferencial parcial de primeira ordem linear*

$$\sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x)u = 0$$

*cujos coeficientes  $b_1, \dots, b_n, c$  são funções analíticas reais em  $\Omega$ .*

*Seja  $Z = \Omega \cap \{x_n = 0\}$  e assumamos que  $Z$  é não-característico. Seja  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função analítica tal que  $\nabla \Phi \neq 0$  e considere as interseções das superfícies de nível de  $\Phi$  com o semiespaço superior  $S_\lambda = \Phi^{-1}(\lambda) \cap \mathbb{R}_+^n$ . Assumimos que existem números reais  $a < b$  tais que:*

- (i) *o conjunto  $\bigcup_{a \leq \lambda \leq b} S_\lambda$  é compacto;*
- (ii)  *$S_a$  consiste de um único ponto localizado em  $Z$ .*
- (iii) *Para  $a < \lambda \leq b$ ,  $S_\lambda$  é uma superfície regular, interceptando  $Z$  transversalmente, e não-característica.*

*Se  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  é uma solução para esta equação tal que  $u = 0$  em  $\partial\Omega \cap Z$  então  $u = 0$  em  $\overline{\Omega}$ .*

**Prova.** Seja  $\Lambda = \{\lambda \in [a, b] : u = 0 \text{ em } S_\lambda\}$ . Sabemos que  $\Lambda \neq \emptyset$ , pois  $a \in \Lambda$ , e que por continuidade  $\Lambda$  é fechado. Basta então mostrar que  $\Lambda$  é aberto para provar que  $\Lambda = [a, b]$ , o que demonstrará o resultado.

Observe que  $\overline{\Omega}$  é compacto, logo existem constantes  $M, r$  independentes de  $x \in \overline{\Omega}$  tais que  $b_1, \dots, b_n, c, \Phi \in C_{M,r}(x)$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ . Conseqüentemente, se dados de Cauchy de classe  $C_{M,r}$  são prescritos em  $S_\mu$ , então uma solução para o problema de Cauchy correspondente existe em uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $S_\mu$ , com  $\varepsilon$  independente de  $\mu \in (a, b]$ . Mas qualquer polinômio está em algum conjunto  $C_{M,r}$ , onde podemos escolher  $r$  tão grande quanto necessário, às custas de aumentar  $M$ . Como a equação diferencial parcial é linear, o domínio em que a solução existe não muda se os dados de Cauchy são multiplicados por um fator constante. Logo, a classe de dados de Cauchy para os quais soluções do problema de Cauchy existem em uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $S_\mu$  incluem todos os polinômios e podemos usar o teorema de aproximação de Weierstrass.

Afirmamos que para cada  $\lambda \in [a, b]$  e para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe um  $\delta > 0$  tal que  $S_\lambda$  está contida na  $\varepsilon$ -vizinhança de  $S_\mu$  sempre que  $\mu \in [a, b]$  e  $|\mu - \lambda| < \delta$ .

Para ver isso, note primeiro que em uma vizinhança de qualquer ponto  $x \in S_\lambda$ , a equação  $\Phi(x) = \mu$  pode ser resolvida para uma das coordenadas  $x_i = x_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, \mu)$ . Se  $x \in Z$  e  $\lambda \neq a$  podemos escolher  $i \neq n$ ; se  $\lambda = a$ , precisamos escolher  $i = n$  e  $x_n$  é uma função crescente de  $\mu$ . Em todos os casos, uma conseqüência imediata é que se  $\delta(x)$  é escolhido suficientemente pequeno, então para todo  $\mu \in [a, b]$  com  $|\mu - \lambda| < \delta(x)$  existe um ponto  $y \in S_\mu$  com  $|y - x| < \varepsilon/2$ . Como  $S_\lambda$  é compacta, existe um número finito de pontos  $x^1, \dots, x^N$  tais que  $S_\lambda$  pode ser coberta pelas bolas centradas nestes pontos com raio  $\varepsilon/2$ . Concluímos a afirmação tomando  $\delta = \min_{k=1, \dots, N} \delta(x^k)$ .

Suponha agora que  $\lambda \in \Lambda$  e seja  $\mu \in (a, b]$  tal que  $|\mu - \lambda| < \delta$ , onde  $\delta$  é como dado acima. Podemos então aplicar o argumento descrito no início desta seção ao domínio limitado por  $Z, S_\lambda$  e  $S_\mu$ . Concluímos que  $u = 0$  em  $S_\mu$  e portanto  $\mu \in \Lambda$ . ■

### 4.4.3 Exercícios

**Exercício 4.7.** Se  $|x_i| < 1$  para  $i = 1, \dots, n$ , mostre que

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} x^\alpha = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}.$$

Para obter (4.26), aplique  $D^\alpha$  a ambos os lados, compare, e tome  $x = (q, q, \dots, q)$ .

**Exercício 4.8.** Prove que

$$\frac{d^j}{dt^j} f(x_0 + t(x - x_0)) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha.$$

# Capítulo 5

## Equação de Laplace

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $u \in C^2(\Omega)$ . O **laplaciano** de  $u$  é definido por

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (5.1)$$

A equação homogênea

$$\Delta u = 0 \quad (5.2)$$

é chamada a **equação de Laplace**. A equação de Laplace aparece em uma variedade enorme de situações físicas. Usualmente,  $u$  denota a densidade de alguma quantidade (por exemplo, densidade de energia térmica (temperatura), concentração química, etc.) em equilíbrio ou estado estacionário em alguma região do espaço. Assim, se  $\mathbf{F}$  é o fluxo de  $u$  em uma região  $\Omega$ , então o fluxo total de  $u$  através da fronteira  $\partial V$  de qualquer aberto  $V \subset\subset \Omega$  é nulo, ou seja,

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu = 0.$$

Segue do Teorema da Divergência que

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

para todo  $V \subset\subset \Omega$ , donde concluímos que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \text{ em } \Omega.$$

Em várias situações, é razoável assumir que o fluxo  $\mathbf{F}$  é proporcional ao negativo do gradiente  $\nabla u$  (em processos de difusão, a direção do fluxo é das regiões de maior concentração para as regiões de menor concentração, e quanto maior a diferença de concentração, maior é o fluxo). Substituindo esta expressão para o fluxo, obtemos a equação de Laplace:

$$\operatorname{div} \nabla u = \Delta u = 0 \text{ em } \Omega.$$

**5.1 Exemplo.** O fluxo de calor em um material é dado por  $\phi = -k\nabla u$  (Lei da Condução de Calor de Fourier), onde  $u$  é a temperatura em cada ponto e  $k$  é a *condutividade térmica* do material que constitui o material. Portanto, se o fluxo de calor em um material atingiu um estado de equilíbrio, então a sua temperatura satisfaz a equação de Laplace  $\Delta u = 0$ . Na ausência de cargas se movendo, a segunda equação de Maxwell para o campo elétrico  $\mathbf{E}$  torna-se  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ ; em uma região simplesmente conexa do espaço segue que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  para alguma função  $\phi$ , chamado o *potencial elétrico*. Em uma região do espaço em que não há a presença de cargas elétricas, a primeira equação de Maxwell torna-se  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , logo o potencial elétrico satisfaz a equação de Laplace  $\Delta\phi = 0$  nesta região. Veja o capítulo 12 do volume 2 de [Feynman] para uma série de exemplos adicionais em elasticidade, difusão de nêutrons e dinâmica dos fluidos (escoamento irrotacional de um fluido).  $\square$

O **problema de Dirichlet** para a equação de Laplace é, dada uma função  $f \in C^0(\partial\Omega)$ , encontrar uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  que satisfaça

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{D})$$

O **problema de Neumann** para a equação de Laplace é, dada uma função  $g \in C(\partial\Omega)$ , encontrar uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  que satisfaça

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{N})$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário apontando para fora. Enquanto o problema de Dirichlet tem solução única, como veremos, o problema de Neumann pode não possuir solução, porque a função  $g$  não pode ser prescrita arbitrariamente. Por exemplo, se a fronteira  $\partial\Omega$  é de classe  $C^1$ , uma consequência do Teorema da Divergência para campos vetoriais  $\mathbf{F} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu \quad (5.3)$$

é a *fórmula de Green*

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad (\text{Fórmula de Green})$$

(basta tomar  $\mathbf{F} = \nabla u$ ). Logo, se existe uma solução para o problema de Neumann (N), então  $g$  deve satisfazer

$$\int_{\partial\Omega} g = 0. \quad (5.4)$$

No entanto, esta condição adicional é suficiente para a existência de soluções para o problema de Neumann, como veremos.

A equação de Laplace não-homogênea é chamada **equação de Poisson**:

$$\Delta u = f, \quad (5.5)$$

onde  $f \in C^0(\Omega)$ . Definimos o problema de Dirichlet para a equação de Poisson de maneira análoga: dadas funções  $f \in C^0(\Omega)$ ,  $g \in C^0(\partial\Omega)$ , encontrar uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  que satisfaça

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{DP})$$

e o problema de Neumann, ou seja, encontrar uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  que satisfaça

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{NP})$$

Para que exista uma solução para o problema de Neumann para a equação de Poisson, uma condição necessária pela fórmula de Green é que  $f$  e  $g$  satisfaçam

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g.$$

De agora em diante, assumiremos que a fronteira  $\partial\Omega$  é sempre de classe  $C^1$ . As seguintes *identidades de Green* serão freqüentemente usadas neste capítulo. Assuma que  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ .

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_{\Omega} u \Delta v \quad (\text{Primeira Identidade de Green})$$

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \quad (\text{Segunda Identidade de Green})$$

A primeira identidade segue diretamente do Teorema da Divergência escolhendo  $\mathbf{F} = u\nabla v$  e a segunda é obtida da primeira permutando  $u$  e  $v$  e subtraindo as duas identidades.

**5.2 Proposição.** *Se (DP) possui uma solução de classe  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , então a solução é única. Se (NP) possui uma solução de classe  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , então a solução é única a menos de uma constante.*

**Prova.** Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  são duas soluções para (DP) ou (NP). Então  $w = u_1 - u_2$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Em qualquer um dos dois casos, tomando  $u = v = w$  na primeira identidade de Green, segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0,$$

e portanto  $\nabla w = 0$  em  $\Omega$ , logo  $w$  é constante em  $\overline{\Omega}$ . No caso do problema de Dirichlet, como  $w = 0$  na fronteira  $\partial\Omega$ , segue que esta constante é nula e portanto  $u_1 = u_2$ . No caso do problema de Neumann, concluímos que  $u_1$  e  $u_2$  são iguais a menos de uma constante; além disso, se  $u$  é uma solução para (NP) e  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante, então  $u + C$  também é uma solução para (NP). ■

Uma consequência deste resultado é que o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f, \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em geral não possui solução, porque  $f$  e  $g$  não podem ser prescritas independentemente: se  $f$  é prescrita, então necessariamente  $g = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}$ , e se  $g$  é prescrita, então  $f = u|_{\partial\Omega}$ . Por outro lado, se  $\Gamma$  é uma superfície analítica  $(n-1)$ -dimensional contida em  $\Omega$  e  $f, g$  são funções analíticas definidas em  $\Gamma$ , já vimos no capítulo anterior que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f, \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

possui uma solução analítica em uma vizinhança de  $\Gamma$ .

Observe que para provar a Proposição 5.2 exigimos que a solução  $u$  fosse de classe  $C^1(\overline{\Omega})$  (em outras palavras, de classe  $C^1$  até a fronteira). Esta exigência foi necessária para que pudéssemos usar a identidade de Green. No entanto, para o problema de Dirichlet, provaremos mais tarde usando o *princípio do máximo* que vale a unicidade mesmo se  $u$  for apenas de classe  $C^0(\overline{\Omega})$  (isto é, apenas contínua até a fronteira).

## 5.1 Funções Harmônicas e as Propriedades do Valor Médio

Uma função  $u \in C^2(\Omega)$  que satisfaz a equação de Laplace  $\Delta u = 0$  é chamada uma **função harmônica** em  $\Omega$ . Portanto, soluções para o problema de Laplace são funções harmônicas que satisfazem a condição de

fronteira (Dirichlet ou Neumann) dada. Segue da Primeira Identidade de Green que se  $u$  é harmônica em  $\Omega$ , então

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad (5.6)$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} (u^2). \quad (5.7)$$

Duas outras classes importantes de funções  $u \in C^2(\Omega)$  que consideraremos são as funções **sub-harmônicas**, que satisfazem  $\Delta u \geq 0$ , e as funções **super-harmônicas**, que satisfazem  $\Delta u \leq 0$ . A razão para esta terminologia é fácil de ser vista na situação  $n = 1$ , isto é, quando as funções estão definidas na reta. No caso  $n = 1$ , as funções harmônicas são lineares, logo seus gráficos são retas. Considere uma função  $u : \Omega = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz a condição de fronteira  $u(a) = f_a, u(b) = f_b$ . Se  $u$  é harmônica, então o seu gráfico é o segmento de reta que une os pontos  $(a, f_a)$  e  $(b, f_b)$ ; se  $u$  satisfaz  $\Delta u = u'' > 0$ , o seu gráfico tem concavidade para baixo em  $(a, b)$  e estará todo abaixo deste segmento de reta, enquanto que se  $u$  satisfaz  $\Delta u = u'' < 0$ , o seu gráfico tem concavidade para cima e estará todo acima deste segmento de reta. Estas duas classes de funções serão usadas mais tarde para construir a solução para o problema de Dirichlet através do *método de Perron*.

Se  $u \in C^0(\Omega)$  é uma função qualquer e  $B_R = B_R(x) \subset\subset \Omega$ , pelo Teorema do Valor Médio para Integrais temos

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} u,$$

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u.$$

Se  $u$  é harmônica, o valor de  $u$  no centro da esfera ou bola é igual ao valor da média da integral em qualquer esfera ou bola e não apenas o limite das médias:

**5.3 Proposição.** (Teorema do Valor Médio para Funções Harmônicas) *Seja  $u$  harmônica em  $\Omega$ . Então, para qualquer bola  $B_R = B_R(x) \subset\subset \Omega$ , vale*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} u = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} u \quad (5.8)$$

e

$$u(x) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R} u. \quad (5.9)$$

Aqui,  $\omega_n = 2\pi^{n/2}/n\Gamma(n/2)$  denota o volume da bola unitária em  $\mathbb{R}^n$ .

**Prova.** Para provar a segunda desigualdade, seja  $x \in \Omega$  e  $B_R = B_R(x) \subset\subset \Omega$ . Defina para  $r \in (0, R]$  a função

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} u.$$

Para obter a derivada da função  $\phi$ , fazemos a mudança de variáveis

$$\omega = \frac{y - x}{r},$$

de modo que

$$\phi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} u(y) ds = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + r\omega) d\omega = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} u(x + r\omega) d\omega,$$

e daí

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+r\omega) \cdot \omega \, d\omega = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, ds \\ &= \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds,\end{aligned}$$

pois o vetor normal unitário à  $\partial B_r(x)$  apontando para fora é exatamente o vetor  $\frac{y-x}{r}$ . Mas, pela harmonicidade de  $u$ , temos que

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,$$

logo

$$\phi'(r) \equiv 0$$

e  $\phi(r)$  é uma função constante. Portanto,

$$\frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} u \equiv \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} u$$

para todo  $0 < r \leq R$ . Usando o Teorema do Valor Médio para Integrais

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} u = u(x),$$

obtemos a primeira identidade. Em particular, agora sabemos que vale a igualdade

$$n\omega_n r^{n-1} u(x) = \int_{\partial B_r} u$$

para todo  $r$ , e a segunda identidade pode então ser obtida integrando-se esta equação de  $r=0$  até  $r=R$ . ■

Seguindo os mesmos passos da Proposição 5.3, podemos provar que se  $u$  é sub-harmônica então

$$\begin{aligned}u(x) &\leq \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} u, \\ u(x) &\leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u,\end{aligned}$$

e se  $u$  é super-harmônica então

$$\begin{aligned}u(x) &\geq \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} u, \\ u(x) &\geq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u.\end{aligned}$$

Estes resultados, mais a Proposição 5.4 a seguir, justificam plenamente a terminologia sub, super-harmônicas.

**5.4 Proposição.** (Caracterização das Funções Harmônicas) *Suponha que  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaça qualquer uma das propriedades do valor médio enunciadas na proposição anterior. Então  $u$  é harmônica em  $\Omega$ .*

**Prova.** Suponha que exista um ponto  $x \in \Omega$  tal que  $\Delta u(x) > 0$ . Então, de acordo com a demonstração da proposição anterior, para todo  $r$  suficientemente pequeno temos

$$0 = |\partial B_r| \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} u \, ds \right] = \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{B_r} \Delta u > 0,$$

uma contradição. Analogamente, eliminamos a possibilidade de que  $\Delta u < 0$ . ■

Mais tarde, removeremos a hipótese de que  $u \in C^2(\Omega)$ .



## 5.2 Princípio do Máximo

Princípios do máximo para equações diferenciais parciais elípticas são ferramentas poderosas para provar unicidade de soluções, simetria de soluções e estimativas a priori.

**5.5 Teorema.** (Princípio do Máximo Forte) *Suponha que  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaça  $\Delta u = 0$ . Se  $\Omega$  é conexo e existe um ponto  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = \max_{\Omega} u$ , então  $u$  é constante. Em outras palavras, uma função harmônica não pode assumir um máximo no interior a menos que ela seja constante.*

**Prova.** Denote  $M = \max_{\Omega} u$  e considere o conjunto  $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ . Por hipótese,  $A$  é não-vazio e fechado em  $\Omega$ , pois  $u$  é contínua em  $\Omega$ . Como  $\Omega$  é conexo, para provar que  $A = \Omega$  e portanto que  $u$  é constante, basta provar que  $A$  é aberto. De fato, dado  $x \in A$  e uma bola  $B_R = B_R(x) \subset\subset \Omega$ , temos pela propriedade do valor médio para funções harmônicas que

$$M = u(x) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u \leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} M = M.$$

Se houvesse pelo menos um ponto em  $B_R(x)$  cujo valor é estritamente menor que  $M$ , então a desigualdade acima seria estrita, o que constituiria uma contradição. Concluímos que  $u \equiv M$  em  $B_R(x)$ , logo  $A$  é aberto. ■

Analogamente, pode-se provar que se uma função harmônica assume um mínimo no interior, então ela é constante. Também de maneira análoga podemos concluir que

- se  $u$  é uma função sub-harmônica ( $\Delta u \geq 0$ ) e  $u$  assume um máximo interior, então  $u$  é constante;
- se  $u$  é uma função super-harmônica ( $\Delta u \leq 0$ ) e  $u$  assume um mínimo interior, então  $u$  é constante.

Como consequência imediata do princípio do máximo, obtemos estimativas globais a priori para soluções da equação de Laplace:

**5.6 Teorema.** (Princípio do Máximo Fraco) *Suponha que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  satisfaça  $\Delta u = 0$ . Se  $\Omega$  é limitado, temos*

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} u &= \max_{\partial\Omega} u, \\ \min_{\bar{\Omega}} u &= \min_{\partial\Omega} u. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, segue que

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Em particular, se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  é solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

vale a estimativa a priori

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

Resultados semelhantes valem para funções sub e super-harmônicas:

- se  $u$  é uma função sub-harmônica ( $\Delta u \geq 0$ ), então  $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ ;
- se  $u$  é uma função super-harmônica ( $\Delta u \leq 0$ ), então  $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$ .

**5.7 Exemplo.** A hipótese de  $\Omega$  ser limitada não pode ser removida do Teorema 5.2. Com efeito, se  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}$ , então a função

$$u(x, y) = y^2 - x^2$$

é harmônica em  $\Omega$ ,  $u \equiv 0$  em  $\partial\Omega$  e  $\sup_{\Omega} u = +\infty$ .  $\square$

Usando o princípio do máximo, concluímos a unicidade de soluções contínuas até a fronteira para o problema de Dirichlet da equação de Poisson, melhorando o resultado obtido na Proposição 5.2:

**5.8 Corolário.** *Se (DP) possui uma solução de classe  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , então a solução é única.*

**Prova.** Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  são duas soluções para (DP). Então  $w = u_1 - u_2$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto,  $w$  é harmônica e satisfaz

$$\max_{\partial\Omega} w = \min_{\partial\Omega} w = 0.$$

Segue do princípio do máximo que  $w \equiv 0$  em  $\Omega$ .  $\blacksquare$

Além da unicidade de soluções para o problema de Dirichlet, o princípio do máximo também permite concluir que a solução para o problema de Dirichlet depende continuamente dos dados de fronteira:

**5.9 Corolário.** *Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  sejam as soluções de classe  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  para os problemas de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f & \text{em } \Omega, \\ u_1 = g_1 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \Delta u_2 = f & \text{em } \Omega, \\ u_2 = g_2 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente, com  $g_1, g_2 \in C^0(\partial\Omega)$ . Então

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

**Prova.** Temos que  $w = u_1 - u_2$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = g_1 - g_2 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e o resultado segue do Teorema 5.6.  $\blacksquare$

Portanto, uma pequena perturbação do dado de fronteira causa apenas uma pequena perturbação na solução.

## 5.3 Desigualdade de Harnack

Para funções harmônicas  $u$  não-negativas em um aberto  $\Omega$ , o máximo e o mínimo de  $u$  em qualquer subconjunto compacto de  $\Omega$  são comparáveis, e a constante de comparação independe da solução:

**5.10 Teorema.** (Desigualdade de Harnack) *Suponha que  $u$  é uma função harmônica não-negativa em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Então, para qualquer subconjunto limitado  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , existe uma constante  $C = C(n, \Omega', \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$  tal que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u.$$

Em particular,

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y) \quad \text{para todos } x, y \in \Omega'.$$

**Prova.** Seja

$$R = \frac{1}{4} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Então, para quaisquer pontos  $x, y \in \Omega'$  tais que  $|x - y| \leq R$ , vale a desigualdade

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n(2R)^n} \int_{B_{2R}(x)} u \geq \frac{1}{\omega_n(2R)^n} \int_{B_R(y)} u = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Segue que

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 2^n \inf_{B_R(y)} u.$$

Como  $\overline{\Omega'}$  é compacto, podemos cobrir  $\overline{\Omega'}$  por um número finito de bolas abertas  $B_1, \dots, B_N$  de raio  $R$  tais que  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$  para  $i = 1, \dots, N-1$ . Daí,

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y)$$

para todos  $x, y \in \Omega'$ . ■

Note que este resultado afirma que os valores de uma função harmônica não-negativa  $u$  em  $\Omega'$  são todos comparáveis:  $u$  não pode ser muito pequena (ou muito grande) em um ponto de  $\Omega'$ , a menos que  $u$  seja muito pequena (ou muito grande) em todos os pontos de  $\Omega'$ . Em outras palavras, funções harmônicas não-negativas não podem oscilar violentamente em abertos limitados.

## 5.4 Solução da Equação de Laplace através de Funções de Green

### 5.4.1 Solução Fundamental da Equação de Laplace

O operador laplaciano é invariante sob rotações e reflexões. Lembre-se que uma rotação do espaço  $\mathbb{R}^n$  é uma transformação linear ortogonal  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com determinante positivo (+1), enquanto que uma reflexão é uma transformação linear ortogonal com determinante negativo (-1).

**5.11 Teorema.** (Invariância do Laplaciano sob Rotações) *Seja  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto u(x)$  uma função de classe  $C^2$ . Considere uma mudança de coordenadas*

$$y = \mathbf{P}x,$$

onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz ortogonal. Seja  $V = \mathbf{P}U$  e defina  $v : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto v(y)$  por

$$v(y) = u(\mathbf{P}^{-1}(y)).$$

Então, para todo  $y = \mathbf{P}x$ , vale

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) = \Delta v(y).$$

**Prova.** Denote  $\mathbf{P} = (p_{ij})$ . Então

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = p_{ij}.$$

Como  $u(x) = v(\mathbf{P}x)$ , pela regra da cadeia segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{P}x) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{P}x) p_{ji}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial v}{\partial y_j}(\mathbf{P}x) \right] p_{ji} = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}(\mathbf{P}x) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right] p_{ji} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}(y) p_{ji} p_{ki}.$$

Por definição de matriz ortogonal ( $\mathbf{P}\mathbf{P}^t = \mathbf{I}$ ), temos

$$\sum_{i=1}^n p_{ji} p_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}(y) p_{ji} p_{ki} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}(y) \sum_{i=1}^n p_{ji} p_{ki} \\ &= \sum_{j,k=1}^n \delta_{jk} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y). \end{aligned}$$

■

Esta invariância do laplaciano com respeito a rotações torna plausível a existência de *soluções radiais* para a equação de Laplace. Veremos que a equação de Laplace de fato possui uma solução radial *fundamental*, a partir da qual soluções mais complexas podem ser construídas.

Seja  $u(x) = u(|x|) = u(r)$  uma função radial. Para uma função radial, o laplaciano é dado por

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr}.$$

De fato, como

$$r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2},$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}} = \frac{x_i}{r}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{du}{dr} \frac{x_i}{r}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r} + \frac{du}{dr} \left( \frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2} \right) = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

donde

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \left( \frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr}.$$

Logo, se  $u = u(r)$  é uma função radial harmônica, ela satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) = 0.$$

Esta equação pode ser facilmente resolvida substituindo-se  $w(r) = u'(r)$ . Então  $w(r)$  satisfaz

$$w'(r) + \frac{n-1}{r} w(r) = 0,$$

ou

$$\frac{w'(r)}{w(r)} = -\frac{n-1}{r};$$

esta equação pode ser integrada para obtermos, a menos de constantes multiplicativas e aditivas,

$$\log w(r) = -(n-1) \log r = \log r^{-(n-1)},$$

donde

$$w(r) = \frac{1}{r^{n-1}}.$$

Integrando esta equação, obtemos, a menos de constantes multiplicativas e aditivas,

$$u(r) = \begin{cases} \log r & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{r^{n-2}} & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Observe que esta função possui uma singularidade na origem. Escolhendo constantes convenientes, chegamos à seguinte definição:

**5.12 Definição.** A função  $\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (5.10)$$

é chamada a **solução fundamental para a equação de Laplace**.

O motivo para se usar as constantes multiplicativas acima na definição da solução fundamental é para que as mesmas não apareçam na fórmula de representação de Green (veja a próxima subseção). Observe que a função  $\Gamma$  é harmônica e de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Para muitos resultados subsequentes deste capítulo será utilizado o seguinte fato que lembramos: se  $f(x) = f(|x|)$  é uma função radial, então

$$\int_{B_R(0)} f = n\omega_n \int_0^R f(r)r^{n-1} dr. \quad (5.11)$$

A função  $\Gamma$  é integrável em qualquer vizinhança limitada da singularidade na origem, mas não é integrável em todo o  $\mathbb{R}^n$ , pois

$$\int_{B_R(0)} \Gamma(x) dx = n\omega_n \int_0^R \Gamma(r)r^{n-1} dr = \begin{cases} -\int_0^R r \log r dr & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{n-2} \int_0^R r dr & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

As derivadas parciais de primeira e segunda ordem de  $\Gamma$  são dadas por

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x_i}{|x|^n},$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \left( \frac{\delta_{ij}}{|x|^n} - \frac{nx_i x_j}{|x|^{n+2}} \right).$$

Note que as derivadas parciais de segunda ordem de  $\Gamma$  não são integráveis em uma vizinhança da singularidade. As seguintes estimativas serão úteis mais tarde:

$$|\nabla\Gamma| \leq \frac{1}{n\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-1}},$$

$$|D^2\Gamma| \leq \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{1}{|x|^n} \right).$$

### 5.4.2 Função de Green

Dada uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , pretendemos obter uma fórmula de representação integral para  $u(y)$  em termos da solução fundamental  $\Gamma(x-y)$ , onde  $y \in \Omega$  é um ponto arbitrário. Para isso, gostaríamos de usar a Segunda Identidade de Green, colocando diretamente  $\Gamma(x-y)$  no lugar de  $v$ , mas isso não pode ser feito porque  $\Gamma(x-y)$  possui uma singularidade em  $y$ . Uma maneira de superar esta dificuldade é aplicar a Segunda Identidade de Green na região  $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$  e fazer  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Fazendo isso, chegamos ao seguinte resultado:

**5.13 Teorema.** (Fórmula de Representação de Green) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ . Então, para todo  $y \in \Omega$ ,*

$$u(y) = - \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) \right) - \int_{\Omega} \Delta u \Gamma(x-y) \quad (5.12)$$

**Prova.** Seja  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno para que tenhamos  $\overline{B}_\varepsilon(y) \subset \Omega$ . Então  $\Gamma(x-y)$  é de classe  $C^1$  (na verdade, de classe  $C^\infty$ ) em  $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$  e podemos aplicar a Segunda Identidade de Green a esta região para obter

$$\int_{\partial[\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)]} \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) - u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) \right) = \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)} (\Delta u \Gamma(x-y) - u \Delta \Gamma(x-y)) = \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u \Gamma(x-y).$$

Como  $\partial[\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)] = \partial\Omega \cup \partial\overline{B}_\varepsilon(y)$ , segue que

$$\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) - u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) \right) + \int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) - u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) \right) = \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u \Gamma(x-y).$$

(observe que na segunda integral do lado direito, o vetor normal unitário  $\nu$  aponta para dentro da bola  $\partial B_\varepsilon(y)$ ). Mas, se  $C = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u|$ , temos

$$\left| \int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) \right| \leq C \int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y) = C\Gamma(\varepsilon)n\omega_n\varepsilon^{n-1} = \begin{cases} C\varepsilon \log \varepsilon & \text{se } n = 2, \\ \frac{C}{n-2}\varepsilon & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

logo

$$\int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0;$$

por outro lado,

$$\int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) = -\Gamma'(\varepsilon) \int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} u = \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} u = \frac{1}{|\partial\overline{B}_\varepsilon(y)|} \int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} u,$$

donde

$$-\int_{\partial\overline{B}_\varepsilon(y)} u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) \rightarrow -u(y) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Além disso, como a função  $\Gamma$  é integrável em uma vizinhança da singularidade, temos que

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u \Gamma(x-y) \rightarrow \int_{\Omega} \Delta u \Gamma(x-y) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos o resultado desejado. ■

A partir da fórmula de representação de Green obtemos imediatamente uma fórmula de representação para funções harmônicas, a qual permite concluir o alto grau de regularidade destas:

**5.14 Corolário.** (Fórmula de Representação para Funções Harmônicas) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  uma função harmônica. Então, para todo  $y \in \Omega$ ,*

$$u(y) = - \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) \right). \quad (5.13)$$

*Conseqüentemente, toda função harmônica é de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$ . Além disso, qualquer derivada parcial  $D^\alpha u$  de  $u$  também é uma função harmônica.*

**Prova.** De fato, como  $y \notin \partial\Omega$ , o integrando nesta fórmula de representação é infinitamente diferenciável com respeito a  $y$ . Além disso, mudando a ordem de derivação, temos

$$\Delta [D^\alpha u](y) = D^\alpha [\Delta u](y) = 0.$$

■

Agora, para cada  $y \in \Omega$ , suponha que  $h_y \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  satisfaz o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h_y = 0 & \text{em } \Omega, \\ h_y(x) = \Gamma(x-y) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, novamente pela Segunda Identidade de Green temos

$$\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} h_y - u \frac{\partial h_y}{\partial\nu} \right) = \int_{\Omega} h_y \Delta u$$

ou

$$\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) - u \frac{\partial h_y}{\partial\nu} \right) = \int_{\Omega} h_y \Delta u.$$

Subtraindo esta identidade da Fórmula de Representação de Green, obtemos

$$\begin{aligned} u(y) &= - \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) \right) - \int_{\Omega} \Delta u \Gamma(x-y) - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} \Gamma(x-y) - u \frac{\partial h_y}{\partial\nu} \right) + \int_{\Omega} h_y \Delta u \\ &= - \int_{\partial\Omega} u \left[ \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial h_y}{\partial\nu}(x) \right] - \int_{\Omega} \Delta u [\Gamma(x-y) - h_y(x)]. \end{aligned}$$

**5.15 Definição.** A função  $G : \Omega \times \Omega \setminus \{x=y\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$G(x, y) = \Gamma(x-y) - h_y(x)$$

é chamada a **função de Green** para o laplaciano na região  $\Omega$ .

Portanto,

$$u(y) = - \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial\nu}(x, y) - \int_{\Omega} \Delta u(x) G(x, y). \quad (5.14)$$

**5.16 Proposição.** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado. Então toda solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*satisfaz*

$$u(y) = - \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) + \int_{\Omega} f(x) G(x, y). \quad (5.15)$$

Assim, temos uma fórmula para construir a solução de qualquer problema de Dirichlet para o laplaciano em um aberto limitado  $\Omega$ , desde que conheçamos a função de Green para  $\Omega$ . A dificuldade é obter a função de Green para um dado domínio  $\Omega$ .

### 5.4.3 Solução da Equação de Poisson em $\mathbb{R}^n$

Embora  $\mathbb{R}^n$  não seja limitado, os fatos que  $\Gamma(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  (se  $n \geq 3$ ) e que a solução de classe  $C^2$  do problema

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0 \end{cases}$$

é a solução identicamente nula (pelo Teorema de Liouville; veja Exercício 5.5) parecem sugerir que a função de Green para  $\mathbb{R}^n$  seria a própria solução fundamental  $\Gamma$ . Se isso for verdade, então a solução para o problema

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

deve ser, de acordo com a Proposição 5.16, a função

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y) f(x) dx$$

(já que  $\partial\Gamma/\partial\nu \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ ) desde que esta integral faça sentido. Como  $\Gamma$  é localmente integrável, ela fará sentido se, por exemplo,  $f$  for uma função contínua com suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$ . Vamos provar que de fato a representação integral acima é a solução para o problema em  $\mathbb{R}^n$ . Para simplificar a demonstração, assumiremos que  $f$  é de classe  $C^2$ .

**5.17 Teorema.** *Seja  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  com suporte compacto. Defina*

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y) f(x) dx$$

*Então,  $u$  é de classe  $C^2$  e é uma solução para a equação de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

**Prova.** Temos

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y - x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) f(y - x) dx.$$

Como o lado direito é contínuo na variável  $y$ , segue em particular que  $u$  é contínua. Além disso, denotando por  $\{e_1, \dots, e_n\}$  os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{u(y + he_i) - u(y)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \frac{f(y + he_i - x) - f(y - x)}{h} dx.$$



Porque

$$\frac{f(y + he_i - x) - f(y - x)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(y - x) \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}^n,$$

segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y - x) dx. \quad (5.16)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y - x) dx. \quad (5.17)$$

Como as expressões no lado direito são contínuas na variável  $y$ , concluímos que  $u$  é de classe  $C^2$ . Além disso, como  $f$  é de suporte compacto e  $\Gamma$  é localmente integrável, segue que  $u, Du, D^2u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Fixe  $\varepsilon > 0$ . Então

$$\Delta u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \Delta f(y - x) dx = \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \Delta f(x - y) dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \Delta f(y - x) dx. \quad (5.18)$$

Vamos estimar essas integrais. Em primeiro lugar, se  $C_2 = \sup_{\mathbb{R}^n} |D^2 f|$ , temos

$$\left| \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \Delta f(y - x) dx \right| \leq C_2 \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) dx.$$

Se  $n = 2$ ,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{B_\varepsilon(0)} \log|x| dx = \frac{1}{2\pi} 2\pi \int_0^\varepsilon \log r r dr = \varepsilon^2 |\log \varepsilon|,$$

e se  $n \geq 3$ ,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) dx = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|x|^{n-2}} dx = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} n\omega_n \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{n-2}} r^{n-1} dr = \frac{\varepsilon^2}{2(n-2)}.$$

Logo,

$$\left| \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \Delta f(y - x) dx \right| \leq \begin{cases} C_2 \varepsilon^2 |\log \varepsilon| & \text{se } n = 2, \\ \frac{C_2}{2(n-2)} \varepsilon^2 & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

onde concluímos que

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \Delta f(y - x) dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.19)$$

Para estimar a segunda integral, usamos a Primeira Identidade de Green, obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \Delta f(y - x) dx = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y - x) ds(x) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Gamma(x) \cdot \nabla f(y - x) dx \quad (5.20)$$

onde desta vez  $\nu$  denota o vetor unitário normal apontando para dentro da bola  $B_\varepsilon(0)$ , pela convenção usual de orientação da fronteira de  $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$ . Se  $C_1 = \sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|$ , temos

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y - x) ds(x) \right| \leq C_1 \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) dx = \begin{cases} C \varepsilon \log \varepsilon & \text{se } n = 2, \\ \frac{C}{n-2} \varepsilon & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

logo

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Gamma(x) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y - x) ds(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.21)$$

Por outro lado, usando novamente a Primeira Identidade de Green, temos que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Gamma(x) \cdot \nabla f(x-y) dx &= - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x) f(y-x) ds(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \Gamma(x) f(x-y) dx \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x) f(x-y) ds(x), \end{aligned}$$

pela harmonicidade de  $\Gamma$ . Como

$$\nabla \Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{|x|^n} \quad \text{e} \quad \nu = -\frac{x}{\varepsilon},$$

segue que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x) = \nabla \Gamma(x) \cdot \nu = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{n\omega_n} \frac{|x|^2}{|x|^n} = \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}}$$

em  $\partial B_\varepsilon(0)$ , donde

$$- \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x) f(y-x) ds(x) = - \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(y-x) ds(x) = - \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} f(x) ds(x).$$

Segue pelo Teorema do Valor Médio para Integrais que

$$- \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Gamma(x) \cdot \nabla f(x-y) dx \rightarrow -f(y) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

Concluimos de (5.18), (5.19), (5.20), (5.21) e (5.22) que

$$-\Delta u(y) = f(y).$$

■

#### 5.4.4 Propriedades da Função de Green

Antes de buscarmos funções de Green para outros domínios, vamos examinar algumas das propriedades gerais da função de Green.

**5.18 Proposição.** *A função de Green é simétrica, isto é,*

$$G(x, y) = G(y, x). \quad (5.23)$$

**Prova.** Seja  $G$  a função de Green para um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Fixe  $x, y \in \Omega$ ,  $x \neq y$ . Defina

$$\begin{aligned} v(z) &= G(z, x), \\ w(z) &= G(z, y). \end{aligned}$$

Mostraremos que  $v(y) = w(x)$ . Observe que, por construção, a função de Green  $G(x, y) = \Gamma(x-y) - h_y(x)$  é harmônica na primeira variável em  $x \neq y$ . Segue que

$$\begin{aligned} \Delta v(z) &= 0 \quad \text{para } z \neq x, \\ \Delta w(z) &= 0 \quad \text{para } z \neq y, \end{aligned}$$

e  $v = w = 0$  em  $\partial\Omega$ . Logo, podemos aplicar a segunda identidade de Green em  $\Omega \setminus [B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)]$ , para todo  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  para algum  $\varepsilon_0$  suficientemente pequeno, para obter

$$\int_{\partial(\Omega \setminus [B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)])} \left( v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) = \int_{\Omega \setminus [B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)]} (v \Delta w - w \Delta v) = 0,$$

ou

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left( v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) = \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left( w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \quad (5.24)$$

onde  $\nu$  denota o vetor normal unitário apontando para dentro das bolas  $B_\varepsilon(x)$  e  $B_\varepsilon(y)$ . Tomando o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , como  $w$  é suave na vizinhança de  $x$ , segue como na demonstração do Teorema 5.13 e do fato que  $h_x$  é contínua que

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Gamma(z-x) \frac{\partial w}{\partial \nu} + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} h_x \frac{\partial w}{\partial \nu} \rightarrow 0;$$

analogamente, como  $v$  é suave na vizinhança de  $y$  e  $h_y$  é contínua temos também

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} = \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(z-y) \frac{\partial v}{\partial \nu} + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} h_y \frac{\partial v}{\partial \nu} \rightarrow 0.$$

Da mesma forma, como na demonstração daquele teorema, podemos provar que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} w \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(z-x) + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} w \frac{\partial h_x}{\partial \nu}(z) \rightarrow w(x), \\ \int_{\partial B_\varepsilon(y)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} &= \int_{\partial B_\varepsilon(y)} v \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(z-y) + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} v \frac{\partial h_y}{\partial \nu}(z) \rightarrow v(y), \end{aligned}$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . O resultado segue. ■

**5.19 Corolário.** *As funções*

$$G \text{ e } \frac{\partial G}{\partial \nu}$$

*são harmônicas nas duas variáveis em  $x \neq y$ .*

### 5.4.5 Solução da Equação de Laplace em Bolas – Fórmula Integral de Poisson

Considere a transformação  $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $T : x \mapsto \bar{x} = T(x)$  definida por

$$\bar{x} = R^2 \frac{x}{|x|^2}.$$

Esta transformação é chamada a *inversão* através da esfera  $\partial B_R(0)$  de raio  $R$ . A inversão é um difeomorfismo que transforma o interior da bola  $B_R(0)$  em seu exterior  $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ , mantendo fixada a esfera  $\partial B_R(0)$ ; a sua inversa é ela própria. Usaremos a inversão para calcular a função de Green para a bola  $B_R(0)$ .

Para encontrar a função de Green para a bola  $B_R(0)$ , fixado  $y \in B_R(0)$  precisamos encontrar uma função harmônica  $h_y \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\bar{B}_R(0))$  solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h_y = 0 & \text{em } B_R(0), \\ h_y(x) = \Gamma(x-y) & \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases} \quad (5.25)$$

Se  $y = 0$ , basta tomar  $h_y$  como sendo a função constante  $h_y(x) \equiv \Gamma(R)$ . Se  $y \neq 0$ , a situação é mais complicada. Em princípio, poderíamos tomar a própria função  $\Gamma$ , exceto pelo fato que  $\Gamma$  possui uma singularidade em  $y$ . Mas isso pode ser corrigido através da inversão. De fato, a função

$$h_y(x) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} \Gamma \left( x - \frac{R^2 y}{|y|^2} \right). \quad (5.26)$$

é harmônica em  $B_R(0)$ , porque o laplaciano é um operador linear invariante por translações. Esta função deixa de ser harmônica apenas em  $\bar{y} = \frac{R^2 y}{|y|^2}$  que é a imagem do ponto  $y$  pela inversão através da esfera  $\partial B_R(0)$ , logo é um ponto fora da bola  $B_R(0)$ . Note que podemos escrever

$$h_y(x) = \Gamma\left(\frac{|y|}{R}\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right)\right), \quad (5.27)$$

pois

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{|y|}{R}\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right)\right) &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{\frac{|y|^{n-2}}{R^{n-2}} \left|x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right|^{n-2}} = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{\left|x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right|^{n-2}} \\ &= \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} \Gamma\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right). \end{aligned}$$

Além disso, para  $x \in \partial B_R(0)$ , temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{|y|}{R}\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right)\right| &= \left(\frac{|y|^2}{R^2} \left|x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{|y|^2}{R^2} \left(|x|^2 - 2R^2 \frac{x \cdot y}{|y|^2} + \frac{R^4}{|y|^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(|y|^2 - 2x \cdot y + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |x - y|, \end{aligned} \quad (5.28)$$

logo

$$h_y(x) = \Gamma(x - y) \quad \text{em } \partial B_R(0).$$

Justificamos apenas para  $n \geq 3$ , mas as conclusões são válidas também para  $n = 2$ , como o leitor pode prontamente verificar. Portanto, a função  $h_y$  definida acima é a solução procurada para o problema de Dirichlet (5.25) no caso  $y \neq 0$ . Concluimos que a função de Green para a bola  $B_R(0)$  é a função  $G(x, y) = \Gamma(x - y) - h_y(x)$  dada por

$$G(x, y) = \begin{cases} \Gamma(x - y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right)\right) & \text{se } y \neq 0, \\ \Gamma(x) - \Gamma(R) & \text{se } y = 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

Segue da Proposição 5.4 que se  $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\bar{B}_R(0))$  é harmônica, então

$$u(y) = - \int_{\partial B_R(0)} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) ds(x).$$

A derivada normal  $\frac{\partial G}{\partial \nu}$  em  $\partial B_R(0)$  pode ser calculada da seguinte maneira. Como o vetor normal unitário apontando para fora é  $\frac{x}{R}$ , segue que

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \nabla_x G(x, y) \cdot \frac{x}{R} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, y) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n x_i \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x - y) - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \bar{y})\right) \right].$$

Temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x - y) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma \left( \frac{|y|}{R} (x - \bar{y}) \right) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{\frac{|y|}{R} (x_i - \bar{y}_i) |y|}{\left| \frac{|y|}{R} (x - \bar{y}) \right|^n} \frac{|y|}{R} = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{|y|^2}{R^2} \frac{x_i - \frac{R^2 y_i}{|y|^2}}{\left| \frac{|y|}{R} \left( x - \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) \right|^n} = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{|y|^2}{R^2} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}$$

onde usamos (5.28). Para  $x \in \partial B_R(0)$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) &= -\frac{1}{n\omega_n R |x - y|^n} \sum_{i=1}^n x_i \left[ x_i - y_i - \left( \frac{|y|^2}{R^2} x_i - y_i \right) \right] = -\frac{1}{n\omega_n R |x - y|^n} \sum_{i=1}^n \left[ x_i^2 - \frac{|y|^2}{R^2} x_i^2 \right] \\ &= -\frac{1}{n\omega_n R} \frac{R^2 - |y|^2}{|x - y|^n}. \end{aligned}$$

Assim, trocando as variáveis, obtemos a fórmula de representação

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} ds(y). \quad (5.30)$$

Esta fórmula é chamada a **fórmula integral de Poisson**. A função

$$K(x, y) = \frac{1}{n\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n}, \quad x \in B_R(0), y \in \partial B_R(0), \quad (5.31)$$

é chamada o **núcleo de Poisson** para a bola  $B_R(0)$ . Usaremos agora a fórmula integral de Poisson para provar que o problema de Dirichlet para a equação de Laplace na bola possui solução:

**5.20 Lema.** *Para todo  $x \in B_R(0)$ , vale*

$$\int_{\partial B_R(0)} K(x, y) ds(y) = 1. \quad (5.32)$$

**Prova.** Basta tomar  $u \equiv 1$  na fórmula integral de Poisson. ■

**5.21 Teorema.** *Seja  $g \in C^0(\partial B_R(0))$ . Defina*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} ds(y). \quad (5.33)$$

*Então  $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$  e  $u$  é a solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_R(0), \\ u = g & \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

**Prova.** Como vimos no Corolário 5.19, a função  $\frac{\partial G}{\partial \nu}(y, x)$  também é harmônica com relação à segunda variável  $x$  e  $x \in B_R(0)$ , logo podemos derivar

$$u(x) = - \int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(y, x) ds(y)$$

dentro do sinal de integração para obter  $\Delta u(x) = 0$  se  $x \in B_R(0)$ . Resta estabelecer a continuidade até a fronteira, isto é, que para todo  $x_0 \in \partial \Omega$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0).$$

Como  $g$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $\delta_0 > 0$  tal que  $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$  se  $|y - x_0| < \delta_0$  e seja  $M = \max_{\partial B_R(0)} g$ . Pelo Lema 5.20, temos

$$g(x_0) = \int_{\partial B_R(0)} g(x_0) K(x, y) ds(y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) (g(y) - g(x_0)) ds(y) \right| \leq \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| ds(y) \\ &= \int_{|y-x_0| \leq \delta_0} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| ds(y) + \int_{|y-x_0| > \delta_0} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| ds(y) \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) ds(y) + 2M \int_{|y-x_0| > \delta_0} K(x, y) ds(y) \\ &= \varepsilon + 2M \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{|y-x_0| > \delta_0} \frac{1}{|x-y|^n} ds(y) \\ &\leq \varepsilon + 2M \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \left(\frac{2}{\delta_0}\right)^n |\partial B_R(0)| \\ &= \varepsilon + 2^{n+1} M R^{n-2} \frac{R^2 - |x|^2}{\delta_0^n}. \end{aligned}$$

Como  $R^2 - |x|^2 \rightarrow 0$  se  $x \rightarrow x_0 \in \partial B_R(0)$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - x_0| < \delta$  podemos garantir que  $|u(x) - g(x_0)| \leq 2\varepsilon$ . ■

#### 5.4.6 Mais Propriedades das Funções Harmônicas

Uma conseqüência da fórmula integral de Poisson é a caracterização das funções harmônicas em termos das propriedades do valor médio:

**5.22 Proposição.** (Caracterização das Funções Harmônicas) *Uma função  $u \in C^0(\Omega)$  é harmônica em  $\Omega$  se e somente se ela satisfaz a propriedade do valor médio*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u$$

para toda bola  $B_R(x) \subset\subset \Omega$ .

**Prova.** Suponha que  $u \in C(\Omega)$  satisfaz a propriedade do valor médio para toda bola  $B = B_R(x) \subset\subset \Omega$ . Pelo Teorema 5.21, existe uma função harmônica  $h \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$  solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B, \\ h = u & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Conseqüentemente a diferença  $w = h - u$  também satisfaz a propriedade do valor médio em  $B$ . Mas então o princípio do máximo vale para  $w$ , pois a propriedade do valor médio foi a única hipótese usada na demonstração deste resultado. Como  $\max_{\overline{B}} w = \min_{\overline{B}} w = 0$ , segue que  $w = 0$  e portanto que  $u = h$ , logo  $u$  é de classe  $C^2$  e harmônica em  $B$ . ■

Este resultado continua válido mesmo se assumirmos que  $u$  é apenas localmente integrável em  $\Omega$ , isto é, uma função  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  que satisfaz a propriedade do valor médio é harmônica (para detalhes, veja [ABR]).

Uma conseqüência imediata do resultado anterior é a seguinte:

**5.23 Proposição.** *O limite de uma seqüência uniformemente convergente de funções harmônicas é uma função harmônica.*

**Prova.** Seja  $\{u_N\}$  uma seqüência uniformemente convergente de funções harmônicas em  $\Omega$  convergindo para  $u$ . Então cada  $u_N$  satisfaz a propriedade do valor médio em toda bola  $B_R(x) \subset\subset \Omega$ , isto é,

$$u_N(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u_N.$$

Como a convergência é uniforme, temos que  $u$  é contínua e que

$$u(x) = \lim u_N(x) = \lim \left( \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u_N \right) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} \lim u_N = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u,$$

logo  $u$  também satisfaz a propriedade do valor médio em toda bola  $B_R(x) \subset\subset \Omega$ . Segue do resultado anterior que  $u$  é harmônica. ■

Vamos agora obter estimativas interiores para as derivadas de uma função harmônica em termos da própria função. Estas estimativas permitirão obter conclusões importantes sobre funções harmônicas, uma das quais será utilizada na próxima seção para resolver o problema de Dirichlet em domínios arbitrários (desde que a fronteira satisfaça uma condição de regularidade). Para provar as estimativas, precisaremos da seguinte forma vetorial do Teorema da Divergência: se  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla u = \int_{\partial\Omega} u \nu. \quad (5.34)$$

Ele segue do Teorema da Divergência usual

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu$$

tomando  $\mathbf{F} = ue_i$ , onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ; para cada  $i$  obtemos  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  e  $\mathbf{F} \cdot \nu = u\nu_i$ , de modo que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} u\nu_i. \quad (5.35)$$

**5.24 Proposição.** *Seja  $u$  uma função harmônica em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Então, para todos  $x \in \Omega$  e  $B_R(x) \subset\subset \Omega$ , e para todo multi-índice  $\alpha$ , vale a estimativa*

$$|D^\alpha u(x)| \leq \left(\frac{ne}{R}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} \sup_{\Omega} |u|. \quad (5.36)$$

*Em particular, se  $u$  é limitada em  $\Omega$ , para qualquer subconjunto  $\Omega' \subset\subset \Omega$  temos*

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{ne}{\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)}\right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} \sup_{\Omega} |u| \quad (5.37)$$

*ou, em outras palavras, existe uma constante positiva  $C = C(n, \alpha, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$  tal que*

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (5.38)$$

**Prova.** Como vimos no Corolário 5.14,  $D^\alpha u$  é harmônica para todo multi-índice  $\alpha$ , logo satisfaz a propriedade do valor médio. Segue disso e do Teorema da Divergência que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x)} u \frac{y_i - x_i}{|y - x|} ds(y)$$

pois  $\nu = \frac{y-x}{|y-x|}$ . Logo,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \sup_{\partial B_R(x)} |u| |\partial B_R(x)| = \frac{n}{R} \sup_{\Omega} |u|.$$

Portanto, a estimativa do enunciado vale para multi-índices de tamanho 1. Vamos proceder por indução, supondo que ela vale para multi-índices de tamanho  $|\alpha|$  e mostrar que isso implica que ela continua valendo para multi-índices  $\beta$  de tamanho  $|\alpha| + 1$ . Para qualquer tal multi-índice  $\beta$  podemos escrever

$$D^\beta u = \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u.$$

Como  $D^\beta u$  é harmônica, podemos aplicar a propriedade do valor médio. Fixe  $t \in [0, 1]$  e aplique-a à bola  $B_{tR}(x)$ , obtendo

$$D^\beta u(x) = \frac{1}{|B_{tR}(x)|} \int_{B_{tR}(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u = \frac{1}{\omega_n t^n R^n} \int_{\partial B_{tR}(x)} D^\alpha u \frac{y_i - x_i}{|y - x|} ds(y).$$

Pela hipótese de indução, aplicada em bolas centradas em  $y \in \partial B_{tR}(x)$  e de raio  $(1-t)R$ , temos

$$|D^\alpha u(y)| \leq \left( \frac{ne}{(1-t)R} \right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} \sup_{\Omega} |u|.$$

Logo,

$$|D^\beta u(x)| \leq \left( \frac{ne}{R} \right)^{|\alpha|+1} \frac{|\alpha|!}{e^2} \frac{1}{t(1-t)^{|\alpha|}} \sup_{\Omega} |u|.$$

Para terminar a demonstração, escolha

$$t = \frac{1}{|\beta|},$$

de modo que

$$\frac{1}{(1-t)^{|\alpha|}} \leq \frac{1}{(1-t)^{|\alpha|+1}} = \left( 1 - \frac{1}{|\beta|} \right)^{-|\beta|} \leq e$$

■

**5.25 Corolário .** *Qualquer seqüência limitada de funções harmônicas em um aberto  $\Omega$  possui uma subseqüência convergindo uniformemente em subconjuntos compactos de  $\Omega$  para uma função harmônica.*

**Prova.** Pela proposição anterior, uma seqüência limitada  $\{u_N\}$  de funções harmônicas é equicontínua em qualquer subconjunto compacto  $\Omega' \subset \Omega$ , pois

$$|Du_N(x)| \leq \frac{n}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |u_N| \leq \frac{nM}{\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)},$$

onde  $M = \sup(\sup_{\Omega} |u_N|)$ , e pelo teorema do valor médio temos

$$|u_N(x) - u_N(y)| \leq \frac{nM}{\text{dist}(K, \partial\Omega)} |x - y| \quad \text{para todos } x, y \in \Omega'.$$

O resultado segue então do Teorema de Arzelà-Ascoli. ■

**5.26 Lema.** *Se  $\alpha$  é um multi-índice de dimensão  $n$ , então*

$$|\alpha|! \leq e^{n|\alpha|} \alpha!. \quad (5.39)$$



**Prova.** Primeiro provaremos que

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!. \quad (5.40)$$

Esta segue do teorema multinomial

$$(x_1 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=k} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha$$

tomando  $x_1 = \dots = x_n = 1$  e  $m = |\alpha|$ , de modo que

$$n^{|\alpha|} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

O resultado segue agora da desigualdade

$$n^x \leq e^{nx} \quad (5.41)$$

para todo  $x \geq 0$ ; a veracidade desta última pode ser verificada tomando-se o logaritmo de ambos os lados. ■

**5.27 Proposição.** *Seja  $u$  uma função harmônica limitada em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $u$  é localmente analítica em  $\Omega$ .*

**Prova.** Fixe  $x_0 \in \Omega$  e seja  $R > 0$  tal que

$$(ne^{2n+1} + 1)R < \min(1, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)).$$

A expressão de Taylor de  $u$  em  $B_R(x_0)$  em torno de  $x_0$  é

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\beta|=N+1} \frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!} (\xi - x_0)^\beta$$

para algum  $\xi \in B_R(x_0)$ . Usando a Proposição 5.24 aplicada à bola centrada em  $\xi$  com raio  $ne^{2n+1}R$  e o lema anterior, segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!} (\xi - x_0)^\beta \right| &= \left| \frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!} \right| |(\xi - x_0)^\beta| \leq \frac{1}{\beta!} \left[ \left( \frac{ne}{ne^{2n+1}R} \right)^{|\beta|} \frac{|\beta|!}{e} \sup_{\Omega} |u| \right] R^{|\beta|} \\ &= e^{-n|\beta|-1} \sup_{\Omega} |u|. \end{aligned}$$

Portanto, o resto da série de Taylor pode ser estimado por

$$\left| \sum_{|\beta|=N+1} \frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!} (\xi - x_0)^\beta \right| \leq \frac{\sup_{\Omega} |u|}{e} \sum_{|\beta|=N+1} e^{-n|\beta|} \leq \frac{\sup_{\Omega} |u|}{e} (N+1)^n e^{-n(N+1)} \rightarrow 0$$

quando  $N \rightarrow \infty$ . ■

## 5.5 Existência de Solução para o Problema de Dirichlet

Vamos agora estabelecer a existência de solução para o problema de Dirichlet da equação de Laplace. Usaremos o chamado *método de Perron* (introduzido em 1923 pelo mesmo), que depende fortemente do princípio do máximo e da solução do problema de Dirichlet para bolas. Este método apresenta várias vantagens: é elementar, separa o problema de existência interior do comportamento da solução na fronteira e pode ser facilmente estendido para operadores de segunda ordem mais gerais. A existência de soluções para o problema de Dirichlet em um aberto limitado depende da regularidade da fronteira. Esta condição de regularidade é expressa pelo *postulado da barreira*:

**5.28 Definição.** Dado um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $\partial\Omega$  satisfaz o **postulado da barreira** se para todo ponto  $y \in \partial\Omega$  existe uma função  $w \in C^0(\Omega)$  tal que  $w$  é super-harmônica em  $\Omega$ ,  $w(y) = 0$  e  $w > 0$  em  $\overline{\Omega} \setminus \{y\}$ .

A função  $w$  é chamada uma **função barreira**. Um exemplo de um domínio cuja fronteira satisfaz o postulado da barreira é um domínio cuja fronteira satisfaz a *condição da esfera exterior*, que é uma condição puramente geométrica:

**5.29 Definição.** Dado um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $\partial\Omega$  satisfaz a **condição da esfera exterior** se para todo ponto  $y \in \partial\Omega$  existe uma bola exterior  $B_R = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  tal que  $\partial B_R(x_0) \cap \partial\Omega = \{y\}$ .

Em outras palavras, a fronteira da bola  $\partial B_R(x_0)$  toca a fronteira  $\partial\Omega$  do aberto apenas no ponto  $y$ . Esta propriedade é satisfeita, por exemplo, para domínios cujas fronteiras são de classe  $C^1$ . Para ver que um domínio  $\Omega$  cuja fronteira satisfaz a condição da esfera exterior também satisfaz o postulado da barreira, dado  $y \in \partial\Omega$  seja  $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  uma bola exterior que intercepta  $\partial\Omega$  apenas em  $y$  e defina a função  $w$  por

$$w(x) = \begin{cases} \log \frac{|x - x_0|}{R} & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

A função  $w$  é claramente uma função barreira; na verdade  $w$  é harmônica.

Por outro lado, pode-se provar que se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio cuja fronteira  $\partial\Omega$  é uma união finita de curvas de classe  $C^1$ , então  $\Omega$  satisfaz o postulado da barreira mesmo que  $\Omega$  não satisfaça a condição da esfera exterior, por exemplo se  $\partial\Omega$  possui uma cúspide apontando para dentro de  $\Omega$ . Já em  $\mathbb{R}^3$ , existe um contra-exemplo devido a Lebesgue de um problema de Dirichlet em um domínio possuindo uma cúspide na fronteira apontando para dentro da região que não possui nenhuma solução (veja [DiBenedetto], pág. 77, para detalhes), logo este domínio não pode satisfazer o postulado da barreira, de acordo com o Teorema 5.33 a seguir.

Antes de provar o teorema de existência de solução para o problema de Dirichlet, precisaremos estender o conceito de função sub-harmônica e super-harmônica e provar alguns resultados auxiliares:

**5.30 Definição.** Dizemos que uma função  $u \in C^0(\Omega)$  é **sub-harmônica** [**super-harmônica**] em  $\Omega$ , se para toda bola  $B \subset \subset \Omega$  e toda função harmônica  $h$  em  $B$  satisfazendo  $u \leq h$  [ $u \geq h$ ] em  $\partial B$  temos também  $u \leq h$  [ $u \geq h$ ] em  $B$ .

Isto é equivalente à definição usual quando  $u \in C^2(\Omega)$  (Exercício 5.14). Observe que, pelo Princípio do Máximo, toda função harmônica é sub e super-harmônica.

**5.31 Lema.** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado. Sejam  $u$  sub-harmônica e  $v$  super-harmônica em  $\Omega$ . Se  $u \leq v$  em  $\partial\Omega$ , então ou  $u < v$  em  $\Omega$ , ou  $u \equiv v$ .*

**Prova.** Considere a função sub-harmônica  $u - v$ . Suponha por absurdo que  $u - v$  não é constante mas existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $v(x_0) \leq u(x_0)$ ; podemos escolher  $x_0$  como sendo um ponto em  $\Omega$  onde  $u - v$  assume o seu máximo (já que  $u - v$  é não-positiva na fronteira  $\partial\Omega$ ):

$$M := \max_{\Omega} (u - v) = (u - v)(x_0) \geq 0.$$

Além disso, como  $u - v$  não é constante em  $\Omega$ , podemos supor que  $x_0$  foi escolhido de tal forma que existe uma bola  $B \subset \Omega$  centrada em  $x_0$  tal que  $u - v$  não é constante igual a  $M$  em  $\partial B$ . Sejam  $h_u$  e  $h_v$  funções harmônicas, soluções dos problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h_u = 0 & \text{em } B, \\ h_u = u & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta h_v = 0 & \text{em } B, \\ h_v = v & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

respectivamente. Então, pelo Princípio do Máximo Fraco e por definição de função sub-harmônica,

$$M \geq \max_{\partial B} (h_u - h_v) \geq (h_u - h_v)(x_0) \geq (u - v)(x_0) = M.$$

Concluimos que

$$\max_{\partial B} (h_u - h_v) = (h_u - h_v)(x_0) = M,$$

o que implica, pelo Princípio do Máximo Forte, que  $h_u - h_v \equiv M$  em  $B$ , e daí  $u - v \equiv M$  em  $\partial B$ , uma contradição. ■

Dada uma função  $u$  sub-harmônica em  $\Omega$  e uma bola aberta  $B \subset\subset \Omega$ , seja  $h$  a função harmônica solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B, \\ h = u & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Definimos o **levantamento harmônico** de  $u$  em  $\Omega$  com respeito à bola  $B$  por

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} h & \text{em } B, \\ u & \text{em } \Omega \setminus B. \end{cases} \quad (5.42)$$

**5.32 Lema.** *O levantamento harmônico de uma função sub-harmônica é uma função sub-harmônica.*

**Prova.** Seja  $\tilde{u}$  o levantamento harmônico da função sub-harmônica  $u$  em  $\Omega$  com respeito à bola  $B$ . Dada uma bola arbitrária  $B' \subset\subset \Omega$ , seja  $h$  uma função harmônica tal que  $h \geq \tilde{u}$  em  $\partial B'$ . Como  $\tilde{u} \geq u$  em  $B'$ , segue que  $h \geq u$  em  $\partial B'$  e portanto, pela sub-harmonicidade de  $u$ ,  $h \geq u$  em  $B'$ . Como  $\tilde{u} = u$  em  $B' \setminus B$ , concluimos que  $h \geq \tilde{u}$  em  $B' \setminus B$ . Por outro lado, isso também implica que  $h \geq \tilde{u}$  em  $\partial(B' \cap B) = (\partial B' \cap B) \cup (\partial B \cap B')$ . Como  $\tilde{u}$  é harmônica em  $B' \cap B$  segue do princípio do máximo que  $h \geq \tilde{u}$  em  $B' \cap B$ . ■

**5.33 Teorema.** (Existência de Solução para o Problema de Dirichlet) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado cuja fronteira satisfaz o postulado da barreira. Então para toda  $g \in C^0(\partial\Omega)$  existe uma única solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Prova.** Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \sigma &= \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v \text{ é sub-harmônica em } \Omega \text{ e } v|_{\partial\Omega} \leq g\}, \\ \Sigma &= \{w \in C^0(\bar{\Omega}) : w \text{ é super-harmônica em } \Omega \text{ e } w|_{\partial\Omega} \geq g\}. \end{aligned}$$

Estes conjuntos são não-vazios, porque qualquer função constante  $v \equiv k$  tal que  $k \leq \min_{\partial\Omega} g$  pertence a  $\sigma$ , e qualquer função constante  $w \equiv K$  tal que  $K \geq \max_{\partial\Omega} g$  pertence a  $\Sigma$ . Pelo Lema 5.31, se uma solução  $u$  para o problema de Dirichlet dado existir, ela deve satisfazer

$$v \leq u \leq w$$

para todo  $v \in \sigma$  e para todo  $w \in \Sigma$ . Isso sugere definir  $u$  como

$$u(x) = \sup_{v \in \sigma} v(x) = \inf_{w \in \Sigma} w(x).$$

A demonstração do teorema se dará em dois passos. No primeiro passo provaremos que a função  $u$  assim definida é harmônica no interior de  $\Omega$ , enquanto que no segundo passo mostraremos que  $u$  satisfaz a condição de fronteira.

**Primeiro Passo.** *A função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$u(x) = \sup_{v \in \sigma} v(x) \quad (5.43)$$

é harmônica.

Fixe  $y \in \Omega$  e escolha uma seqüência limitada  $\{v_N\} \subset \sigma$  satisfazendo  $v_N(y) \rightarrow u(y)$ . Podemos escolher uma seqüência  $\{v_N\}$  limitada porque, caso contrário, dada uma seqüência  $\{v_N\} \subset \sigma$  satisfazendo  $v_N(y) \rightarrow u(y)$  poderíamos definir para cada  $N \in \mathbb{N}$

$$V_N = \max\{v_N, \min_{\partial\Omega} g\};$$

seguiria trivialmente da definição que a seqüência  $\{V_N\} \subset \sigma$ , ainda teríamos  $V_N(y) \rightarrow u(y)$  ( $\min_{\partial\Omega} g \leq u(y)$  pois  $\min_{\partial\Omega} g \in \sigma$ ) e a seqüência  $\{V_N\}$  seria limitada, já que  $\min_{\partial\Omega} g \leq V_N \leq \max_{\partial\Omega} g$ .

Agora, escolha  $R > 0$  tal que a bola  $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$  e seja  $\tilde{v}_N$  o levantamento harmônico de  $v_N$  em  $B$ . Então  $\{\tilde{v}_N\} \subset \sigma$ ,  $\tilde{v}_N(y) \rightarrow u(y)$  (pois  $\tilde{v}_N \geq v_N$ ) e  $\{\tilde{v}_N\}$  é limitada. Pelo Corolário 5.25, a seqüência  $\{\tilde{v}_N\}$  possui uma subseqüência uniformemente convergente  $\{\tilde{v}_{N_k}\}$  em qualquer bola  $B_r(y)$  com  $r < R$  para uma função  $v$  que é harmônica em  $B$ . Como  $v$  é o limite da seqüência  $\{\tilde{v}_N\} \subset \sigma$ , segue que  $v \leq u$  em  $B$  e  $v(y) = u(y)$ . Afirmamos que  $v = u$  em  $B$ , o que provará que  $u$  é harmônica em  $B$ .

De fato, suponha por absurdo que  $v(z) < u(z)$  para algum  $z \in B$ . Então existe uma função  $\bar{v} \in \sigma$  tal que  $v(z) < \bar{v}(z)$ . Definindo  $w_k = \max(\bar{v}, \tilde{v}_{N_k})$  e o levantamento harmônico  $\tilde{w}_k$  de  $w_k$  em  $B$ , obtemos como antes uma subseqüência de  $\{\tilde{w}_k\}$  uniformemente convergente para uma função harmônica  $w$  satisfazendo  $v \leq w \leq u$  em  $B$  e  $v(y) = w(y) = u(y)$ . Mas, pelo Princípio do Máximo Forte (ou também pelo Lema 5.31), devemos ter  $v = w$  em  $B$ . Como  $\bar{v} \leq w$ , isso contradiz a definição de  $\bar{v}$ .

**Segundo Passo.** A função definida no primeiro passo satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0) \quad (5.44)$$

para todo  $x_0 \in \partial\Omega$ .

Seja  $M = \max_{\partial\Omega} g$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , considere uma função barreira  $w$  em  $x_0$ . Pela continuidade de  $g$  e  $w$  em  $x_0$ , dada uma constante  $k > 0$  suficientemente grande, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{se } |x - x_0| < \delta$$

e

$$w(x) \geq \frac{2M}{k} \quad \text{se } |x - x_0| \geq \delta.$$

Defina as funções

$$\begin{aligned} S(x) &= g(x_0) + \varepsilon + kw(x), \\ s(x) &= g(x_0) - \varepsilon - kw(x). \end{aligned}$$

Então  $s \in \sigma$  e  $S \in \Sigma$ . Da definição de  $u$  segue que

$$g(x_0) + \varepsilon + kw(x) \leq u(x) \leq g(x_0) - \varepsilon - kw(x),$$

ou seja,

$$|u(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Como  $w(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ , concluímos que  $u(x) \rightarrow g(x_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . ■

Segue do Teorema 5.33 e dos Corolários 5.8 e 5.9 que o problema de Dirichlet para a equação de Laplace é bem-posto:

**5.34 Definição.** Dizemos que um problema é **bem-posto** no sentido de Hadamard, se existe uma solução, ela é única e depende continuamente dos dados iniciais e de fronteira.

A condição de um problema ser bem-posto é essencial em aplicações, onde esperamos que cada problema tenha uma única solução na realidade e em que os dados iniciais e de fronteira são em geral obtidos através de medições e estão sujeitos a imprecisões numéricas: para obtermos uma solução significativa, esperamos que pequenas variações nos dados causem apenas pequenas mudanças nas soluções. O Teorema de Cauchy-Kowalevski, por exemplo, falha em reconhecer soluções bem-postas, porque exige dados iniciais analíticos e funções analíticas podem convergir uniformemente para uma função contínua não analítica, sobre a qual o teorema não permite sequer concluir que existe solução. Já vimos antes, também, que o problema de Cauchy para a equação de Laplace não é bem-posto.

## 5.6 Singularidades de Funções Harmônicas

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $x_0 \in \Omega$ . Se uma função  $u : \Omega \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida em todo o aberto  $\Omega$  exceto no ponto  $x_0$ , dizemos que  $x_0$  é uma **singularidade isolada** de  $u$ . Quando  $u$  é harmônica em  $\Omega \setminus \{x_0\}$ , dizemos que a singularidade isolada  $x_0$  é **removível** se  $u$  puder ser continuamente estendida em  $x_0$  de modo que a função resultante é harmônica em todo o aberto  $\Omega$ .

A solução fundamental  $\Gamma(x - x_0)$  com polo em  $x_0$  possui uma singularidade não removível em  $x_0$ . Isso sugere que para uma singularidade  $x_0$  de uma função harmônica  $u$  ser removível, o comportamento de  $u$  próximo a  $x_0$  deve ser melhor que o comportamento da solução fundamental perto de seu polo.

**5.35 Teorema.** (Teorema da Singularidade Removível) *Suponha que  $u$  é harmônica em  $\Omega \setminus \{x_0\}$  e satisfaz*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{\log|x|} = 0 \quad \text{se } n = 2, \quad (5.45)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x|^{n-2} u(x) = 0 \quad \text{se } n \geq 3. \quad (5.46)$$

Então  $x_0$  é uma singularidade removível.

**Prova.** Seja  $R > 0$  tal que  $B_R(x_0) \subset \Omega$  e seja  $v$  a única solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_R(x_0), \\ v = u & \text{sobre } \partial B_R(x_0). \end{cases}$$

Mostraremos que  $u = v$ , de modo que a singularidade de  $u$  em  $x_0$  será removível (isto é, definimos  $u(x_0) = v(x_0)$ ). Consideraremos apenas o caso  $n \geq 3$ , já que o caso  $n = 2$  é análogo. Para  $0 < \varepsilon < R$  arbitrário, defina

$$M_\varepsilon = \sup_{\partial B_\varepsilon(x_0)} |u - v|.$$

Por hipótese, para todo  $0 < \delta < 1$ , existe  $0 < \varepsilon_0 < R$  tal que se  $|x| < \varepsilon_0$  então

$$|u(x)| < \frac{\delta}{2|x|^{n-2}}.$$

Por continuidade da função  $v$  em  $x_0$ , podemos assumir a mesma desigualdade válida para  $v$ . Em particular, se  $x \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , segue que

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{\delta}{\varepsilon^{n-2}}$$

donde

$$M_\varepsilon \leq \frac{\delta}{\varepsilon^{n-2}}.$$

Agora, defina as funções

$$\begin{aligned} w^+ &= M_\varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{|x - x_0|} \right)^{n-2} + (u - v), \\ w^- &= M_\varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{|x - x_0|} \right)^{n-2} - (u - v). \end{aligned}$$

Estas funções são harmônicas no anel  $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < R\}$ . Além disso, elas são positivas na fronteira exterior  $\partial B_R(x_0)$  do anel, já que aí  $u = v$ ; na fronteira interior do anel temos  $w^\pm = M_\varepsilon \pm (u - v) \geq 0$  por definição de  $M_\varepsilon$ . Segue do Princípio do Máximo que  $w^\pm \geq 0$  no anel  $A_\varepsilon$ . Portanto, para todo  $x \in A_\varepsilon$  temos

$$-M_\varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{|x - x_0|} \right)^{n-2} \leq u(x) - v(x) \leq M_\varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{|x - x_0|} \right)^{n-2}.$$

Logo, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  e para todo  $\varepsilon < |x - x_0| < R$ , vale

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{M_\varepsilon \varepsilon^{n-2}}{|x - x_0|^{n-2}} \leq \frac{\delta}{|x - x_0|^{n-2}}.$$

Portanto, esta desigualdade vale para todo  $x \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$  e para todo  $0 < \delta < 1$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , concluímos que  $u = v$  em  $B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ . ■

Em seguida, provaremos o Teorema de Bôcher, que caracteriza o comportamento de funções harmônicas positivas na vizinhança de uma singularidade isolada: uma função harmônica positiva comporta-se como a solução fundamental perto de uma singularidade isolada. Para provar o Teorema de Bôcher, precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Dada uma função contínua  $u$  em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ , defina a média esférica de  $u$  sobre a esfera de raio  $|x|$  por

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{|\partial B_{|x|}(0)|} \int_{\partial B_{|x|}(0)} u = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(|x|\omega) d\omega, \quad (5.47)$$

onde  $d\omega$  denota o elemento de área na esfera unitária (veja a demonstração da Proposição 5.3). Note que  $\hat{u}$  é uma função radial.

**5.36 Lema.** *Seja  $u$  uma função harmônica em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ . Então existem constantes  $a, b$  tais que*

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} -a \log |x| + b & \text{se } n = 2, \\ \frac{a}{|x|^{n-2}} + b & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (5.48)$$

*Em particular,  $\hat{u}$  é harmônica em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ .*

**Prova.** Defina  $\phi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} u = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(r\omega) d\omega,$$

de modo que  $\hat{u}(x) = \phi(|x|)$ . Como vimos na demonstração da Proposição 5.3, temos

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} \nabla u(y) \cdot \frac{y}{r} ds(y) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Desta vez não podemos usar o Teorema da Divergência para concluir que  $\phi'(r) = 0$ , porque  $u$  é harmônica apenas em  $B_r(0) \setminus \{0\}$  e pode nem estar definida na origem. Ao invés de aplicar o Teorema da Divergência à bola  $B_r(0)$ , vamos aplicá-lo ao anel  $A_{r_1, r_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\}$ . Assim, obtemos

$$\int_{\partial B_{r_1}(0)} \nabla u(y) \cdot \frac{y}{r_1} ds(y) - \int_{\partial B_{r_2}(0)} \nabla u(y) \cdot \frac{y}{r_2} ds(y) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{A_{r_1, r_2}} \Delta u = 0,$$

donde

$$\int_{\partial B_{r_1}(0)} \nabla u(y) \cdot \frac{y}{r_1} ds(y) = \int_{\partial B_{r_2}(0)} \nabla u(y) \cdot \frac{y}{r_2} ds(y).$$

Em particular, concluímos que

$$\phi'(r)r^{n-1} \equiv \text{constante} =: c.$$

Integrando  $\frac{c}{r^{n-1}}$  obtemos constantes  $a, b$  tais que

$$\phi(r) = \begin{cases} -a \log r + b & \text{se } n = 2, \\ \frac{a}{r^{n-2}} + b & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

■

Uma conseqüência imediata do Lema 5.35 é que toda função radial harmônica em  $B_1(0) \setminus \{0\}$  tem a forma dada no seu enunciado, pois se  $u$  é qualquer função radial então  $\hat{u}(x) = u(x)$  por definição. Este resultado também pode ser obtido diretamente através dos cálculos que fizemos anteriormente para obter a solução fundamental para o laplaciano.

O próximo resultado é uma versão da desigualdade de Harnack que permite  $x, y$  estarem em um conjunto não compacto desde que  $|x| = |y|$ .

**5.37 Lema.** *Existe uma constante  $c > 0$  tal que para toda função  $u$  harmônica positiva em  $B_1(0) \setminus \{0\}$  vale*

$$cu(y) \leq u(x)$$

$$\text{para todos } 0 < |x| = |y| \leq \frac{1}{2}.$$

**Prova.** Aplicando a desigualdade de Harnack do Teorema 5.10 ao aberto  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  e ao compacto  $\Omega' = \partial B_{1/2}(0)$ , obtemos que existe uma constante positiva  $c$  para toda função harmônica positiva  $u$  em  $B_1(0) \setminus \{0\}$  tal que nós temos  $cu(y) \leq u(x)$  sempre que  $|x| = |y| = \frac{1}{2}$ . Em particular, fixado  $0 < r < 1$  e definindo  $v(x) = u(rx)$ , temos que  $v$  é uma função harmônica positiva em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ , logo satisfaz  $cv(y) \leq v(x)$  sempre que  $|x| = |y| = \frac{1}{2}$ ; daí, concluímos que  $cu(ry) \leq u(rx)$  sempre que  $|x| = |y| = \frac{1}{2}$ , ou seja,  $cu(z) \leq u(w)$  sempre que  $|z| = |w| = \frac{r}{2}$ . Fazendo  $r$  variar entre 0 e 1, obtemos o resultado desejado. ■

O último lema caracteriza as soluções positivas para o problema de Dirichlet singular

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1(0) \setminus \{0\}, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (5.49)$$

e constitui a principal parte da demonstração do Teorema de Bôcher.

**5.38 Lema.** *Seja  $u$  uma função harmônica positiva em  $B_1(0) \setminus \{0\}$  tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} u(x) = 0.$$

*Então existe uma constante  $a > 0$  tal que*

$$u(x) = \begin{cases} -a \log |x| & \text{se } n = 2, \\ a \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} - 1 \right) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

**Prova.** Pelo Lema 5.36, basta mostrar que  $\hat{u} = u$  em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ .

Afirmamos que basta mostrar que  $u \geq \hat{u}$  em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ . De fato, se existisse um ponto  $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$  tal que  $u(x) > \hat{u}(x)$ , então teríamos

$$\hat{u}(x) > \hat{\hat{u}}(x) = \hat{u}(x)$$

(porque  $\hat{u}$  é radial), uma contradição. Portanto, basta mostrar que  $u \geq \hat{u}$  em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ .

Para isso, seja  $c$  a constante do lema anterior. Pelo Lema 5.36, a função  $u - c\hat{u}$  é harmônica em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ . Pelo Lema 5.37,

$$u(x) - c\hat{u}(x) > 0$$

se  $0 < |x| \leq 1/2$ . Como  $u(x) - c\hat{u}(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow 1$ , concluímos do Princípio do Máximo que

$$u - c\hat{u} > 0 \quad \text{em } B_1(0) \setminus \{0\}. \quad (5.50)$$

Queremos iterar este resultado. Para este propósito, defina  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(t) = c + t(1 - c).$$

Suponha que

$$w_0 = u - t\hat{u} > 0 \quad \text{em } B_1(0) \setminus \{0\} \quad (5.51)$$

seja válido para algum  $t \in [0, 1]$ . Como  $\lim_{|x| \rightarrow 1} w_0(x) = 0$ , o argumento anterior pode ser aplicado a  $w$  produzindo

$$w_0 - c\hat{w}_0 = u - t\hat{u} - c(\hat{u} - t\hat{u}) = u - g(t)\hat{u} > 0 \quad \text{em } B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Aplicamos este processo sucessivamente. Isto é, na  $k$ -ésima etapa, tendo provado que

$$w_k = u - g^{(k)}(t)\hat{u} > 0 \quad \text{em } B_1(0) \setminus \{0\},$$

onde  $g^{(k)}(t)$  denota o  $k$ -ésimo iterado de  $g$ , na  $(k + 1)$ -ésima etapa aplicamos o argumento a  $w_k$  para obter  $u - g^{(k+1)}(t)\hat{u} > 0$  em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ . Desta forma, concluímos que

$$u - g^{(k)}(t)\hat{u} > 0 \quad \text{em } B_1(0) \setminus \{0\} \quad (5.52)$$

para todo  $k$ .

Agora, por indução, pode-se verificar que

$$g^{(k)}(t) = c \sum_{j=0}^{k-1} (1-c)^j + t(1-c)^k.$$

Observe que podemos tomar a constante  $c$  menor que 1 no Lema 5.37 (se a desigualdade daquele lema vale com uma certa constante  $c$ , então ela continua valendo para qualquer constante com valor menor que  $c$ ). Segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g^{(k)}(t) = c \sum_{j=0}^{\infty} (1-c)^j = c \frac{1}{1-(1-c)} = 1$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . Portanto, tomando o limite quando  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$u - \hat{u} > 0 \quad \text{em } B_1(0) \setminus \{0\},$$

como desejado. Este argumento depende apenas de que (5.51) seja válida para algum  $t \in [0, 1]$ ; e, de fato, (5.51) vale obviamente para  $t = 0$ . ■

**5.39 Teorema.** (Teorema de Bôcher) *Seja  $u$  uma função harmônica positiva em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ . Então existe uma função harmônica  $h$  em  $B_1(0)$  e uma constante  $a \geq 0$  tal que*

$$u(x) = \begin{cases} -a \log |x| + h(x) & \text{se } n = 2, \\ \frac{a}{|x|^{n-2}} + h(x) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

**Prova.** Provaremos apenas o caso  $n \geq 3$ , já que o caso  $n = 2$  é análogo. Suponha primeiro que  $u \in C^0(\overline{B_1(0)} \setminus \{0\})$ , isto é,  $u$  é contínua até a fronteira da bola. Seja  $v$  a única solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_1(0), \\ v = u & \text{sobre } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Defina a seguinte função harmônica em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ :

$$w(x) = u(x) - v(x) + \frac{1}{|x|^{n-2}} - 1.$$



Temos  $w = 0$  em  $\partial B_1(0)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = +\infty$  porque  $u$  é positiva e  $v$  é limitada, logo concluímos pelo Princípio do Máximo que  $w$  é positiva em  $B_1(0) \setminus \{0\}$ . Segue do Lema 5.38 que

$$u(x) - v(x) + \frac{1}{|x|^{n-2}} - 1 = c \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} - 1 \right)$$

para alguma constante positiva  $c$ , logo

$$u(x) = (c-1) \frac{1}{|x|^{n-2}} + v(x) + (1-c).$$

Para o caso geral, aplicamos o resultado que acabamos de obter para a função  $u(x/2)$ , de modo que

$$u\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{a}{|x|^{n-2}} + v(x)$$

em  $B_1(0) \setminus \{0\}$  para alguma constante  $a \geq 0$  e para alguma função harmônica  $v$  em  $B_1(0)$ . Logo,

$$u(x) = \frac{a}{2^{n-2}|x|^{n-2}} + v(2x)$$

em  $B_{1/2}(0) \setminus \{0\}$ . Isso mostra que  $u(x) - \frac{a}{2^{n-2}|x|^{n-2}}$  se estende harmonicamente a  $B_{1/2}(0)$ , e portanto estende-se harmonicamente até  $B_1(0)$ . ■

## 5.7 Transformada de Kelvin

Já resolvemos o problema da Dirichlet no interior da esfera. Nesta seção resolveremos o problema de Dirichlet no seu exterior, que é um domínio ilimitado. Para tratar deste problema, poderíamos pensar em usar a inversão, que transforma o exterior da esfera em seu interior, conservando a fronteira do domínio, e usar a fórmula integral de Poisson. No entanto, se  $n \geq 3$ , a inversão não preserva harmonicidade. No entanto, existe uma transformação envolvendo a inversão que de fato preserva harmonicidade para todo  $n$ . Dada uma função  $u$  de classe  $C^2$ , considere a função  $v$  de classe  $C^2$  definida por

$$v(y) = \frac{1}{|y|^{n-2}} u\left(R^2 \frac{y}{|y|^2}\right). \quad (5.53)$$

A aplicação que transforma a função  $u$  na função  $v$  é chamada a **transformada de Kelvin** (descoberta pelo mesmo em 1847).

**5.40 Proposição.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $T$  uma inversão e  $V = T(U)$ . Se  $u \in C^2(U)$  é uma função harmônica, então a transformada de Kelvin  $v \in C^2(V)$  de  $u$  também é harmônica.*

**Prova.** De fato, seja

$$v(y) = \frac{1}{|y|^{n-2}} u\left(\frac{R^2 y}{|y|^2}\right) = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1-\frac{n}{2}} u\left(\frac{R^2 y}{y_1^2 + \dots + y_n^2}\right).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y_i}(y) &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) \frac{2y_i}{|y|^n} u\left(\frac{R^2 y}{|y|^2}\right) + \frac{1}{|y|^{n-2}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j}\left(\frac{R^2 y}{|y|^2}\right) R^2 \left(\frac{\delta_{ij} |y|^2 - 2y_i y_j}{|y|^4}\right) \\ &= -\frac{1}{|y|^n} \left[ (n-2)y_i u\left(\frac{R^2 y}{|y|^2}\right) - R^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j}\left(\frac{R^2 y}{|y|^2}\right) \left(\delta_{ij} - \frac{2y_i y_j}{|y|^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) \\ &= \frac{ny_i}{|y|^{n+2}} \left[ (n-2)y_i u \left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) - R^2 \frac{\partial u}{\partial y_i} \left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) + \frac{2R^2 y_i}{|y|^2} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) \right] \\ & - \frac{1}{|y|^n} \left\{ (n-2)u \left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) + (n-2)y_i \left[ R^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} \left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) \left( \frac{\delta_{ij}}{|y|^2} - \frac{2y_i y_j}{|y|^4} \right) \right] \right. \\ & \left. - R^2 \sum_{j=1}^n \left[ \frac{R^2}{|y|^2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) \left( \delta_{ik} - 2 \frac{y_i y_k}{|y|^2} \right) \left( \delta_{ij} - 2 \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y_j} \left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right) \left( \frac{-(2+2\delta_{ij})y_j |y|^2 + 4y_i^2 y_j}{|y|^4} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Expandindo os termos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) &= \frac{n(n-2)y_i^2}{|y|^{n+2}} u - \frac{nR^2 y_i}{|y|^{n+2}} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{2nR^2 y_i^2}{|y|^{n+4}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \\ & - \frac{n-2}{|y|^n} u - \frac{(n-2)R^2 y_i}{|y|^{n+2}} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{2(n-2)R^2 y_i^2}{|y|^{n+4}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \\ & + \frac{R^4}{|y|^{n+2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \frac{2R^4 y_i}{|y|^{n+4}} \sum_{j,k=1}^n (\delta_{ij} y_k + \delta_{ik} y_j) \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} + \frac{4R^4 y_i^2}{|y|^{n+6}} \sum_{j,k=1}^n y_j y_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \\ & - \frac{2R^2}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{2R^2 y_i}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{4R^2 y_i^2}{|y|^{n+4}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Agrupando termos semelhantes, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) &= \frac{n(n-2)y_i^2}{|y|^{n+2}} u - \frac{n-2}{|y|^n} u \\ & - \frac{nR^2 y_i}{|y|^{n+2}} \frac{\partial u}{\partial y_i} - \frac{(n-2)R^2 y_i}{|y|^{n+2}} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{2nR^2 y_i^2}{|y|^{n+4}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{2(n-2)R^2 y_i^2}{|y|^{n+4}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \\ & - \frac{2R^2}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{2R^2 y_i}{|y|^{n+2}} \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{4R^2 y_i^2}{|y|^{n+4}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \\ & + \frac{R^4}{|y|^{n+2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \frac{4R^4 y_i}{|y|^{n+4}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{4R^4 y_i^2}{|y|^{n+6}} \sum_{j,k=1}^n y_j y_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta v(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(y) \\
&= \frac{n(n-2)}{|y|^{n-2}}u - \frac{n(n-2)}{|y|^{n-2}}u \\
&\quad - \frac{nR^2}{|y|^{n+2}} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} - \frac{(n-2)R^2}{|y|^{n+2}} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{2nR^2}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{2(n-2)R^2}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \\
&\quad - \frac{2nR^2}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} - \frac{2R^2}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \frac{4R^2}{|y|^{n+2}} \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} \\
&\quad + \frac{R^4}{|y|^{n+2}} \Delta u - \frac{4R^4}{|y|^{n+4}} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{4R^4}{|y|^{n+4}} \sum_{j,k=1}^n y_j y_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Observe que a transformada de Kelvin é a sua própria inversa.

Resolveremos agora o problema de Dirichlet para o exterior da bola. É importante observar que este problema em geral não tem solução única, pois o Princípio do Máximo falha em domínios ilimitados.

**5.41 Exemplo.** Se  $c \in \mathbb{R}$ , então

$$u(x) = c \left[ 1 - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \right]$$

é solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_R(0), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

□

Para obter unicidade no problema de Dirichlet para o exterior da bola precisamos impor condições adicionais. Uma condição natural (como será visto na demonstração do teorema a seguir) é exigir que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = a$  para algum número  $a \in \mathbb{R}$ .

**5.42 Teorema.** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $g \in C^0(\partial B_R(0))$ . Defina

$$u(x) = a \left[ 1 - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \right] - \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} ds(y). \quad (5.54)$$

Então  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)})$  e  $u$  é a única solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_R(0), \\ u = g & \text{sobre } \partial B_R(0), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = a. \end{cases} \quad (5.55)$$

**Prova.** Seja  $v$  a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_R(0), \\ v = R^{n-2}g & \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Então

$$v(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^{n-2} g(y)}{|x-y|^n} ds(y).$$

Aplicando a transformada de Kelvin a  $v$ , definimos

$$w(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} v \left( R^2 \frac{x}{|x|^2} \right).$$

Pela proposição anterior, temos que  $\Delta w = 0$  em  $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ . Além disso,  $w$  satisfaz a condição de fronteira, pois se  $x \in \partial B_R(0)$ , temos

$$w(x) = \frac{1}{R^{n-2}} v \left( R^2 \frac{x}{R^2} \right) = \frac{1}{R^{n-2}} v(x) = \frac{1}{R^{n-2}} R^{n-2} g(x) = g(x).$$

Para obter a condição no infinito, como  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 0$ , basta adicionar o múltiplo escalar adequado da função radial harmônica do Teorema 5.39 que se anula na fronteira da bola. Assim,

$$u(x) = a \left[ 1 - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \right] + w(x).$$

Por fim, usando a identidade (5.28)

$$|x-y| = \left| \frac{|x|}{R} \left( y - \frac{R^2 x}{|x|^2} \right) \right|$$

válida para todo  $y \in \partial B_R(0)$ , segue que

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{R^2 - \left| \frac{R^2 x}{|x|^2} \right|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^{n-2} g(y)}{\left| \frac{R^2 x}{|x|^2} - y \right|^n} ds(y) = \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \frac{R^2 (|x|^2 - R^2)}{|x|^2 n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{\frac{R^n}{|x|^n} |x-y|^n} ds(y) \\ &= \frac{|x|^2 - R^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} ds(y). \end{aligned}$$

Para verificar a unicidade, suponha que  $u$  satisfaz o problema de Dirichlet (5.55). Então  $w = u - a$  satisfaz o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_R(0), \\ w = g - a & \text{sobre } \partial B_R(0), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 0. \end{cases}$$

Definindo

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} w \left( R^2 \frac{x}{|x|^2} \right),$$

segue que  $v$  satisfaz o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_R(0) \setminus \{0\}, \\ v = R^{n-2}(g - a) & \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Mas,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} w \left( R^2 \frac{x}{|x|^2} \right) = 0$$

logo, pelo Teorema 5.35, a singularidade na origem é removível e  $v$  é portanto a única solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } B_R(0), \\ v = R^{n-2}(g - a) & \text{sobre } \partial B_R(0). \end{cases}$$

■

## 5.8 Exercícios

**Exercício 5.1.** Modifique a demonstração das fórmulas do valor médio para provar que se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  satisfaz o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } B_R, \\ u = g & \text{sobre } \partial B_R, \end{cases}$$

onde  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$  é a bola de raio  $R$ , então (para  $n \geq 3$ )

$$u(0) = \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R} g + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_R} \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) f$$

**Exercício 5.2.** Deduza da fórmula integral de Poisson a seguinte versão para a desigualdade de Harnack:

Seja  $u$  uma função harmônica não-negativa em  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Então, para todo  $x \in B_R(0)$ , vale

$$\left( \frac{R}{R+|x|} \right)^{n-2} \frac{R-|x|}{R+|x|} u(0) \leq u(x) \leq \left( \frac{R}{R-|x|} \right)^{n-2} \frac{R+|x|}{R-|x|} u(0)$$

**Exercício 5.3.** Deduza o Teorema de Liouville a partir da versão para a desigualdade de Harnack provada no item anterior:

Se  $u$  é uma função harmônica não-negativa em  $\mathbb{R}^n$ , então  $u$  é constante.

**Exercício 5.4.** Seja  $u$  harmônica em um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Use o argumento utilizado na demonstração da Proposição 5.8 para deduzir a seguinte estimativa interior para o gradiente de  $u$ :

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \left( \sup_{\Omega} u - u(x) \right).$$

Se  $u$  é não-negativa, conclua que

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} u(x).$$

**Exercício 5.5.** Use o resultado do item anterior para provar o Teorema de Liouville na seguinte versão:

Se  $u$  é uma função harmônica limitada superiormente em  $\mathbb{R}^n$ , então  $u$  é constante.

**Exercício 5.6.** Se  $n = 2$ , prove que a versão do Teorema de Liouville do item anterior é válida para funções sub-harmônicas. Se  $n \geq 3$ , mostre que existe uma função sub-harmônica limitada definida em  $\mathbb{R}^n$  que não é constante.

**Exercício 5.7.** Mostre que o problema de Dirichlet não-linear

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado, possui como solução apenas a função identicamente nula.

**Exercício 5.8.** *Seja  $u$  uma solução para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{em } R, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial R, \end{cases}$$

onde  $R \subset \mathbb{R}^2$  é o retângulo  $R = \{(x, y) : |x| < 1 \text{ e } |y| < 1\}$ . Encontre uma estimativa inferior e uma estimativa superior para  $u(0, 0)$ . (Sugestão: considere a função  $v = u + (x^2 + y^2)/4$ .)

**Exercício 5.9.** *Determine a função de Green para o semiespaço  $\mathbb{R}_+^n$  e use-a para encontrar a solução para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

assumindo que  $g \in C(\partial\mathbb{R}_+^n)$  é uma função limitada. (Sugestão: veja [Evans].)

**Exercício 5.10.** *Encontre a função de Green para o anel  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < r < |x - x_0| < R\}$  e use-a para encontrar a solução para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } A, \\ u = \begin{cases} g_1 & \text{se } |x - x_0| = r, \\ g_2 & \text{se } |x - x_0| = R, \end{cases} \end{cases}$$

onde  $g_1, g_2$  são funções contínuas. (Sugestão: veja [ABR].)

**Exercício 5.11.** *Encontre a função de Green para a semibola  $\mathbb{R}_+^n \cap B_R(0)$ .*

**Exercício 5.12.** (Extensões Harmônicas) *Seja  $B_1 = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  e denote  $B_1^+ = B_1 \cap \{x_n > 0\}$ . Suponha que  $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$  é uma função harmônica tal que  $u = 0$  em  $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$ . Defina*

$$v(x) \begin{cases} u(x) & \text{se } x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x_n < 0. \end{cases}$$

Mostre que  $v$  é harmônica em  $B_1$ .

**Exercício 5.13.** (Estimativas a Priori) *Seja  $B_1 = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Prove que existe uma constante positiva  $C$  dependendo apenas de  $n$  tal que se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  é uma solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } B_1, \\ u = g & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases}$$

então

$$\max_{B_1} |u| \leq C \left( \max_{B_1} |f| + \max_{\partial B_1} |g| \right),$$

ou seja,

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C \left( \|f\|_{L^\infty(B_1)} + \|g\|_{L^\infty(\partial B_1)} \right).$$

**Exercício 5.14.** *Mostre que se  $u \in C^2(\Omega)$ , então a definição de função sub-harmônica [super-harmônica] dada na Seção 5.6 coincide com a definição dada na Seção 5.2.*

**Exercício 5.15.** *Prove que os zeros de uma função harmônicas nunca são isolados.*

**Exercício 5.16.** *Seja  $u$  harmônica em um aberto conexo  $\Omega$  e suponha que existe um subconjunto aberto de  $\Omega$  onde  $u \equiv 0$ . Prove que  $u \equiv 0$  em todo  $\Omega$ . Conseqüentemente, duas funções harmônicas que coincidem em um subconjunto aberto de um aberto conexo  $\Omega$  coincidem em  $\Omega$ .*

**Exercício 5.17.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo. Prove que se  $u \geq 0$  é harmônica em  $\Omega$ , então ou  $u \equiv 0$  ou  $u > 0$  em todo  $\Omega$ .*

**Exercício 5.18.** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  o disco unitário furado  $D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ . Prove que não existe solução para o problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } D, \\ u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 + y^2 = 1, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{cases}$$

*(Sugestão: Primeiro mostre que se existe uma solução, então existe também uma solução radial.)*

**Exercício 5.19.** *Mostre que se  $u$  e  $v$  são funções harmônicas, então seu produto  $uv$  é harmônico se e somente se  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ . Conclua que se  $u$  é uma função harmônica tal que  $u^2$  é harmônica, então  $u$  é constante.*

**Exercício 5.20.** *Suponha que  $u$  definida em  $\Omega \setminus \{x_0\}$  satisfaz*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{\log |x|} &= a \quad \text{se } n = 2, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |x|^{n-2} u(x) &= a \quad \text{se } n \geq 3, \end{aligned}$$

*para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ . Prove que existe uma função harmônica  $v$  em  $\Omega$  tal que*

$$u(x) = \begin{cases} -a \log |x| + v(x) & \text{se } n = 2, \\ \frac{a}{|x|^{n-2}} + v(x) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

**Exercício 5.21.** *Seja  $n \geq 3$  e suponha que  $u$  é uma função harmônica positiva em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Prove que existem constantes  $a, b \geq 0$  tais que*

$$u(x) = \frac{a}{|x|^{n-2}} + b.$$

## Capítulo 6

# Equações Diferenciais Parciais Elípticas de Segunda Ordem

Neste capítulo, generalizaremos o princípio do máximo para operadores lineares de segunda ordem da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad (6.1)$$

atuando em funções  $u \in C^2(\Omega)$ , onde  $\Omega$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Assumiremos que a matriz  $(a_{ij}(x))$  é simétrica para todo  $x \in \Omega$ . Esta hipótese não implica em nenhuma perda de generalidade quando se considera operadores lineares de segunda ordem atuando sobre funções de classe  $C^2$ . De fato, se

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

é um operador linear de segunda ordem arbitrário e  $u$  é de classe  $C^2$ , então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i},$$

e se definirmos

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2},$$

obtemos o operador (6.1) com a matriz  $(a_{ij}(x))$  simétrica.

Além desta hipótese, assumiremos que o operador  $L$  satisfaz as seguintes condições adicionais:

- $a_{ij}, b_i, c \in C^0(\overline{\Omega})$ ;
- $L$  é **elíptico**, isto é, a matriz  $(a_{ij}(x))$  é positiva definida para todo  $x \in \Omega$ , ou seja, se  $\lambda(x)$  e  $\Lambda(x)$  denotam o menor e o maior autovalor de  $(a_{ij}(x))$ , então

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) |\xi|^2$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Se existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\lambda(x) \geq \lambda_0$  para todo  $x \in \Omega$ , dizemos que o operador  $L$  é **estritamente elíptico**. Se  $\Lambda(x)/\lambda(x)$  é limitada em  $\Omega$ , então dizemos que  $L$  é **uniformemente elíptico**. Observe que, por continuidade, qualquer operador elíptico em  $\Omega$  é uniformemente elíptico em subconjuntos compactos de  $\Omega$ .



Sob uma transformação ortogonal de coordenadas, não apenas a elipticidade do operador é preservada, como também as funções  $\lambda(x)$  e  $\Lambda(x)$ . Assim, o fato do operador ser estritamente elíptico ou uniformemente elíptico continua verdadeiro após uma mudança de coordenadas ortogonal. Em geral, não existe uma transformação de coordenadas ortogonal definida em todo o domínio que transforme um operador elíptico no operador laplaciano.

## 6.1 Princípio do Máximo Fraco

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico em  $\Omega$  tal que  $c = 0$ . Se  $Lu > 0$ , é fácil ver que um princípio do máximo forte vale:  $u$  não pode atingir um ponto de máximo interior em  $\Omega$ . De fato, se  $x_0 \in \Omega$  fosse um ponto de máximo para  $u$  então  $\nabla u(x_0) = 0$  e a matriz hessiana  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1,\dots,n}$  seria negativa semidefinida. Mas a matriz  $(a_{ij}(x_0))$  é positiva definida, logo

$$Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \sum_{i=1}^n b_i(x_0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leq 0,$$

contradizendo  $Lu(x_0) > 0$ . Quando  $Lu \geq 0$ , podemos estabelecer o seguinte *princípio do máximo fraco*:

**Teorema 6.1.** (Princípio do Máximo Fraco) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c = 0$ .*

*Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

**Prova.** Suponha que  $Lu \geq 0$ . Para  $\varepsilon, \gamma > 0$ , considere a função

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_1}.$$

Temos

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon (a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma) e^{\gamma x_1}.$$

Escolha  $\gamma$  suficientemente grande para que

$$a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma > 0 \text{ em } \Omega.$$

Isso é possível porque  $a_{11}(x) > \lambda_0 > 0$  para todo  $x \in \Omega$ . Segue que  $Lu_\varepsilon > 0$  em  $\Omega$  e, portanto, de acordo com a observação feita acima antes do enunciado deste teorema, concluímos que

$$\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Tomando o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos o resultado. O caso  $Lu \leq 0$  segue do anterior quando se considera  $-u$ . ■

Este resultado continua válido se  $L$  é um operador apenas elíptico, desde que a condição

$$\frac{|b_i(x)|}{\lambda(x)} \leq b_0 \in \mathbb{R} \quad \text{para todo } x \in \Omega \tag{6.2}$$

seja válida.

Defina a *parte positiva* e a *parte negativa* de  $u$  respectivamente por

$$\begin{aligned} u^+ &= \max(u, 0), \\ u^- &= \min(u, 0). \end{aligned} \tag{6.3}$$

**Corolário 6.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c \leq 0$ .*

*Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

*Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-.$$

*Conseqüentemente, se  $Lu = 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

**Prova.** Suponha que  $Lu \geq 0$ . Se  $u \leq 0$  em  $\Omega$ , então o corolário vale trivialmente. Logo, podemos assumir que  $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \neq \emptyset$ . Considere

$$Mu = Lu - cu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Como  $-cu \leq 0$  em  $\Omega^+$ , temos que  $Mu \geq 0$  em  $\Omega^+$ . Além disso,  $M$  satisfaz as hipóteses do teorema anterior, logo podemos concluir que

$$\max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

Mas  $u = 0$  em  $\partial\Omega^+ \cap \Omega$ , logo o máximo deve ser atingido em  $\partial\Omega$ . O caso  $Lu \leq 0$  segue do primeiro quando se considera  $-u$ . ■

Observe que na demonstração do Corolário 6.2 fica claro que se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  é não-negativa em algum ponto, então vale a igualdade; a desigualdade ocorre apenas no caso em que  $u < 0$ . Uma observação semelhante vale para super-soluções.

**Exemplo 6.3.** A restrição  $c \leq 0$  é essencial. Considere o operador  $Lu = \Delta u + (2n - 4|x|^2)u$  em  $\mathbb{R}^n$ . A função  $u(x) = e^{-|x|^2}$  satisfaz  $Lu = 0$ , mas tem um máximo absoluto em 0. □

**Corolário 6.4.** (Princípio de Comparação) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c \leq 0$ . Se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  satisfazem*

$$\begin{cases} Lu = Lv & \text{em } \Omega, \\ u = v & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*então  $u = v$  em  $\Omega$ . Em particular, se o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*possuir solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , então a solução é única.*

*Se*

$$\begin{cases} Lu \geq Lv & \text{em } \Omega, \\ u \leq v & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*então  $u \leq v$  em  $\Omega$ .*

**Prova.** Considere  $w = u - v$ . No primeiro caso,  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$\max_{\Omega} |w| = \max_{\partial\Omega} |w| = 0.$$

No segundo caso,  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} Lw \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ w \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$\max_{\Omega} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ \leq 0.$$

■

Este resultado motiva a seguinte definição:

**Definição.** Dado um operador elíptico  $L$ , dizemos que  $u$  é uma **subsolução** de  $L$  se  $Lu \geq 0$ , e uma **supersolução** se  $Lu \leq 0$ .

**Exemplo 6.5.** Mais uma vez, a restrição  $c \leq 0$  é essencial no Corolário 5.6 é essencial. Considere  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$ . Então o problema

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui a solução  $u(x, y) = \sin x \sin y$  além da solução trivial. Na verdade, esta função é uma autofunção para o operador laplaciano (associada ao autovalor 2) e qualquer múltiplo escalar dela é ainda uma solução, logo temos infinitas soluções. O operador laplaciano tem uma infinidade de autovalores. □

**Exemplo 6.6.** A unicidade também não vale se o domínio é ilimitado. Por exemplo, se  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ , qualquer múltiplo escalar da função  $u(x) = x_n$  é uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^n, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

Como um exemplo adicional, se  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ , qualquer múltiplo escalar de  $\Gamma(x) - \Gamma(1)$  é uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B_1(0), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Note que  $\Gamma(x) - \Gamma(1)$  é limitada em  $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ . □

## 6.2 Lema de Hopf e Princípio do Máximo Forte

O próximo lema será utilizado na demonstração de um princípio do máximo forte para operadores estritamente elípticos, mas é importante por si só. Dizemos que a fronteira  $\partial\Omega$  de um domínio  $\Omega$  satisfaz a *condição da esfera interior* em  $x_0$  se existe uma bola  $B \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ . Isso acontece, por exemplo, se  $\partial\Omega$  é de classe  $C^2$ . Quando um ponto  $x_0 \in \partial\Omega$  é um ponto de máximo para uma certa função  $u$ , já sabemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0.$$

O Lema de Hopf a seguir, diz que se  $u$  é uma subsolução, então vale a desigualdade estrita, sob certas hipóteses.

**Teorema 6.7.** (Lema de Hopf) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico. Suponha que  $u$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ . Seja  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $\partial\Omega$  satisfaz a condição da esfera interior em  $x_0$ , que  $u$  é contínua em  $x_0$  e que  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ . Suponha que pelo menos uma das hipóteses seguintes seja válida:*

(i)  $c = 0$  ou

(ii)  $c \leq 0$  e  $u(x_0) \geq 0$  ou

(iii)  $u(x_0) = 0$ .

Então, se existir a derivada normal em  $x_0$ , ela deve satisfazer

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde  $\nu$  é o vetor normal a  $\partial\Omega$  apontando para fora.

**Prova.** Assuma primeiro  $c \leq 0$ . Seja  $B_R(y) \subset \Omega$  tal que  $x_0 \in \partial B_R(y)$ . Denote  $|x - y| = r$  e para  $0 < \rho \leq |x - y| \leq R$  defina a função

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2},$$

onde  $\rho, \alpha > 0$  serão convenientemente escolhidos mais tarde. Temos

$$\begin{aligned} Lv(x) &= e^{-\alpha r^2} \left[ 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i(x_i - y_i)) \right] + cv \\ &\geq e^{-\alpha r^2} [4\alpha^2 \lambda(x)r^2 - 2\alpha (\text{tr}(a_{ij}) + \mathbf{b}r) + c] \\ &\geq e^{-\alpha r^2} [4\alpha^2 \lambda_0 r^2 - 2\alpha (\text{tr}(a_{ij}) + \mathbf{b}r) + c], \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ . Então  $\alpha$  pode ser escolhido suficientemente grande para que tenhamos  $Lv > 0$  na região anular  $A = B_R(y) \setminus B_\rho(y)$ .

Note que  $v \geq 0$  em  $A$  e  $v \equiv 0$  em  $\partial B_R(y)$ . Como  $u - u(x_0) < 0$  em  $\Omega$ , existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \text{ em } \partial B_\rho(y) \cup \partial B_R(y).$$

Logo, se  $c = 0$  ou se  $c \leq 0$  e  $u(x_0) \geq 0$ , nós temos

$$L(u - u(x_0) + \varepsilon v) = Lu - cu(x_0) + \varepsilon Lv \geq -cu(x_0) \geq 0 \text{ em } A$$

e

$$u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \text{ em } \partial A.$$

Segue do Princípio do Máximo Fraco que

$$u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \text{ em } A.$$

Como  $[u - u(x_0) + \varepsilon v](x_0) = 0$ ,  $x_0$  é um ponto de máximo desta função e portanto

$$\frac{\partial}{\partial \nu} [u - u(x_0) + \varepsilon v](x_0) \geq 0,$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon v'(R) = 2\varepsilon \alpha R e^{-\alpha R^2} > 0.$$

Se  $u(x_0) = 0$ , segue que  $u$  é negativa em  $\Omega$ . Tomando  $c^+(x) = \max(c(x), 0)$ , segue que

$$Mu := (L - c^+)u = Lu - c^+u \geq 0,$$

logo podemos aplicar o argumento anterior ao operador  $M$ . ■

Observe que não é necessário que  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , mas apenas para  $x$  em uma vizinhança de  $x_0$ .

**Teorema 6.8.** (Princípio do Máximo Forte) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c = 0$ . Suponha que  $u$  satisfaz  $Lu \geq 0$  [ $Lu \leq 0$ ] em  $\Omega$ . Se  $u$  atinge o seu máximo [mínimo] no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.*

*Se  $c \leq 0$  e  $u$  atinge um máximo não-negativo [mínimo não-positivo] no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.*

*Independentemente do sinal de  $c$ , se  $u$  atinge um máximo igual a 0 [mínimo igual a 0] no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante.*

**Prova.** Suponha que  $u$  atinge o seu máximo  $M$  em um ponto interior e suponha por absurdo que  $A = \{x \in \Omega : u(x) < M\} \neq \emptyset$ . Segue que  $\partial A \cap \Omega \neq \emptyset$  também. Escolha  $y \in A$  tal que  $\text{dist}(y, \partial A) < \text{dist}(y, \partial \Omega)$  e seja  $B_y$  a maior bola centrada em  $y$  inteiramente contida em  $A$ . Então  $\partial B_y$  intercepta  $\partial A$  e não intercepta  $\partial \Omega$ , logo podemos tomar  $x_0 \in \partial A \cap \partial B_y$  e  $x_0 \notin \partial \Omega$ . Segue que  $u(x_0) = M$  e portanto  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in A$ . Segue do Lema de Hopf que  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \neq 0$ . Por outro lado,  $x_0 \in \Omega$  é um ponto de máximo para  $u$ , logo devemos ter  $\nabla u(x_0) = 0$ , uma contradição. ■

Outra consequência do Lema de Hopf é o seguinte resultado de unicidade para o problema de Neumann:

**Corolário 6.9.** (Unicidade do Problema de Neumann) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $c \leq 0$ . Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  é uma solução de*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial \Omega, \end{cases}$$

*então  $u$  é constante em  $\Omega$ . Se  $c < 0$ , então  $u \equiv 0$  em  $\Omega$ . Em particular, se o problema de Neumann*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial \Omega, \end{cases}$$

*possuir solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , então a solução é única a menos de constantes se  $c \leq 0$  e única se  $c < 0$ .*

**Prova.** Se  $u$  não é constante, podemos assumir pelo Princípio do Máximo Forte que ou  $u$  ou  $-u$  assume um máximo  $M \geq 0$  em um ponto  $x_0 \in \partial \Omega$  e é estritamente menor que  $M$  em  $\Omega$ . Pelo Lema de Hopf, segue que  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \neq 0$ , contradizendo a condição de fronteira. Como  $u \equiv C$ , segue que  $Lu = cC$ , logo temos que ter necessariamente  $C = 0$  se  $c < 0$ , para que  $u$  satisfaça a equação  $Lu = 0$ . ■

### 6.3 Princípios do Máximo Especiais

O sinal de  $c$  no operador  $L$  limita bastante a aplicação do princípio do máximo. Veremos agora que se o domínio for “estrito” ou “pequeno” o princípio do máximo vale para qualquer operador linear elíptico  $L$ , independentemente do sinal de  $c$  (o quanto o domínio precisa ser estrito ou pequeno depende de  $L$ ). Estes resultados são muito úteis e uma de suas mais importantes aplicações é no *método dos planos móveis*, que será discutido na próxima seção. Além disso, para provar o princípio do máximo para domínios de volume pequeno, utilizaremos o princípio do máximo de Alexandroff, que é importante por si só.

**Teorema 6.10.** (Princípio do Máximo e Lema de Hopf Generalizados) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico. Suponha que exista  $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  satisfazendo*

$$Lw \leq 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad w > 0 \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Suponha que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ . Se  $\frac{u}{w}$  assume um máximo não-negativo no interior de  $\Omega$ , então  $\frac{u}{w}$  é constante. Se  $\frac{u}{w}$  assume um máximo não-negativo em  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $\partial\Omega$  possui a propriedade da esfera interior em  $x_0$ , então, se existir a derivada normal em  $x_0$ , ela deve satisfazer

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{u}{w} \right) (x_0) > 0,$$

onde  $\nu$  é o vetor normal a  $\partial\Omega$  apontando para fora.

**Prova.** Tome

$$v = \frac{u}{w}.$$

Então, escrevendo  $u = vw$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial v}{\partial x_i} w + v \frac{\partial w}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} w + \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{Lu}{w} &= \frac{1}{w} \left[ wLv + vLw + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} - cvw \right] = Lv + \left( \frac{Lw}{w} \right) v + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} - cv \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left( b_i + \frac{2}{w} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left( \frac{Lw}{w} \right) v. \end{aligned}$$

Portanto,  $v$  satisfaz  $Mv \geq 0$  para o operador estritamente elíptico  $M$  definido por

$$Mv = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left( b_i + \frac{2}{w} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left( \frac{Lw}{w} \right) v,$$

com  $\frac{Lw}{w} \leq 0$ . Aplicando o Lema de Hopf e o Princípio do Máximo Forte a  $M$  e  $v$ , obtemos o resultado. ■

**Teorema 6.11.** (Princípio do Máximo para Domínios Estreitos) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico tal que  $b_i, c$  são limitados em  $\Omega$ . Seja  $d > 0$  e  $\mathbf{e}$  um vetor unitário tal que  $|(x - y) \cdot \mathbf{e}| < d$  para todos  $x, y \in \Omega$ . Existe  $d_0 > 0$  tal que se  $d \leq d_0$  então as hipóteses do teorema anterior são cumpridas.*

**Prova.** Fazendo uma mudança de coordenadas ortogonal (que não altera a elipticidade do operador  $L$ , nem o valor da constante  $\lambda_0$ ), podemos assumir sem perda de generalidade que  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Diminuindo  $d$ , se necessário, podemos assumir que  $\bar{\Omega} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < d\}$ . Tome

$$w(x) = e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}.$$

Então  $w > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Além disso, se  $|b_i|, |c| \leq M$

$$Lw = - (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) e^{\alpha x_1} - c(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \leq - (a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) + 2Me^{\alpha d},$$

como podemos escolher  $\alpha$  suficientemente grande para que

$$a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha \geq \lambda_0\alpha^2 - M\alpha \geq 4M,$$

temos que

$$Lw \leq 2M(e^{\alpha d} - 2) \leq 0$$

se  $d$  for escolhido suficientemente pequeno. ■

Para provar o Princípio do Máximo para Domínios de Volume Pequeno, precisaremos introduzir o conceito de *conjunto de contato* e também de alguns resultados auxiliares.

**Definição.** Seja  $u \in C^0(\Omega)$ . O conjunto

$$\Gamma^+ = \{y \in \Omega : \text{existe } p = p(y) \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } u(x) \leq u(y) + p \cdot (x - y) \text{ para todo } x \in \Omega\}$$

é chamado o **conjunto de contato superior** de  $u$ .

Em outras palavras, o conjunto  $\Gamma^+$  é o subconjunto dos pontos  $y$  de  $\Omega$  tais que existe um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que toca o gráfico de  $u$  em  $(y, u(y))$  e tal que o gráfico de  $u$  em toda a região  $\Omega$  está abaixo deste hiperplano (portanto, o hiperplano toca o gráfico de  $u$  permanecendo acima deste, daí o nome). A equação deste hiperplano é precisamente  $x_{n+1} = u(y) + p \cdot (x - y)$  e  $(p, -1)$  é o seu vetor normal. Em geral o vetor  $p$  não é único. No entanto, se  $u \in C^1(\Omega)$ , então necessariamente  $p = \nabla u$ , pois  $(\nabla u, -1)$  é o vetor normal ao gráfico de  $u$ . Finalmente, note que  $u$  é côncava se e somente se  $\Gamma^+ = \Omega$ .

**Lema 6.12.** *Seja  $u \in C^2(\Omega)$ . Então a matriz hessiana  $D^2u$  é não-positiva em  $\Gamma^+$ .*

**Prova.** Seja  $y \in \Gamma^+$ . Considere a função

$$w(y) = u(x) - u(y) - p \cdot (x - y).$$

Temos que  $w \leq 0$  em  $\Omega$  por definição de  $\Gamma^+$  e  $w(y) = 0$ , logo  $w$  possui um máximo em  $y$ . Isso implica que a matriz hessiana  $D^2w(y)$  é negativa semidefinida. Como  $D^2w(y) = D^2u(y)$ , o resultado segue. ■

**Lema 6.13.** *Suponha que  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  é não-negativa. Então para toda  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  vale*

$$\int_{B_M(0)} g \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u) |\det D^2u|, \quad (6.4)$$

onde  $\Gamma^+$  é o conjunto de contato superior de  $u$  e  $M = \frac{\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+}{\text{diam } \Omega}$ .

**Prova.** Sem perda de generalidade, podemos assumir  $u \leq 0$  em  $\partial\Omega$ , subtraindo uma constante positiva suficientemente grande de  $u$  se necessário. Seja  $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ . Podemos assumir também que  $\sup_{\Omega} u > 0$ ; caso contrário teríamos  $M = \sup_{\Omega} u / \text{diam } \Omega \leq 0$  e o resultado é verdadeiro por vacuidade.

Pelo lema anterior, a aplicação  $\Phi_{\varepsilon} = \nabla u - \varepsilon \text{Id}$  tem jacobiano  $D^2u - \varepsilon I$  negativo definido em  $\Gamma^+$ , logo podemos aplicar a fórmula de mudança de variáveis para integrais múltiplas para obter

$$\int_{\Phi_{\varepsilon}(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g = \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\nabla u) |\det(D^2u - \varepsilon I)|.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue que

$$\int_{\nabla u(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} g = \int_{\Gamma^+ \cap \Omega^+} g(\nabla u) |\det D^2u|. \quad (6.5)$$

Para provar o resultado, basta então provar que

$$B_M(0) \subset \nabla u(\Gamma^+ \cap \Omega^+).$$

Temos então que mostrar que para todo  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|a| < M$  existe  $y \in \Gamma^+ \cap \Omega^+$  tal que  $a = \nabla u(y)$ . Se  $a = 0$ , isto é óbvio (basta tomar  $y$  como sendo o ponto onde  $u$  assume o seu máximo positivo), logo podemos assumir  $a \neq 0$ .

Seja  $x_0 \in \Omega$  tal que

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u = m > 0.$$

Através de uma translação, podemos supor que  $x_0 = 0$ . Dado  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|a| < m/\text{diam } \Omega$ , considere a função afim

$$L(x) = m + a \cdot x.$$

Temos  $L(0) = m$  e, para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , vale

$$L(x) \geq m - |a| |x| > m - \frac{m}{\text{diam } \Omega} \text{diam } \Omega = 0,$$

de modo que  $L > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Agora, como  $u$  assume o seu máximo  $m$  em  $0$ , temos  $\nabla u(0) = 0$ . Daí,

$$\begin{aligned} (u - L)(0) &= 0, \\ \nabla(u - L)(0) &= -a. \end{aligned}$$

Em particular, não podemos ter  $u - L \leq 0$  em uma vizinhança de  $0$ , pois neste caso  $0$  seria um ponto de máximo local para  $u - L$  e teríamos  $\nabla(u - L)(0) = 0$ . Portanto, existe  $x_1 \in \Omega$  suficientemente próximo de  $0$  tal que

$$(u - L)(x_1) > 0.$$

Como  $u \leq 0 < L$  em  $\partial\Omega$ , segue que  $u - L$  atinge um máximo positivo em  $\bar{\Omega}$  em  $y \in \Omega$ . Logo,  $\nabla(u - L)(y) = 0$  e portanto  $\nabla u(y) = \nabla L(y) = a$ . Além disso, para todo  $x \in \Omega$  vale

$$(u - L)(x) \leq (u - L)(y),$$

donde

$$u(x) \leq u(y) + a(x - y) = u(y) + \nabla u(y)(x - y).$$

Logo  $y \in \Gamma^+ \cap \Omega^+$ . ■

O termo  $|\det D^2 u|$  que aparece no lado direito da desigualdade do lema anterior pode ser substituído por uma expressão envolvendo o operador  $L$  através do resultado a seguir. Observe que como em  $\Gamma^+$  a matriz  $D^2 u$  é negativa semi-definida, temos  $|\det D^2 u| = \det(-D^2 u)$ .

**Lema 6.14.** *Para qualquer matriz simétrica positiva definida  $(a_{ij})$  vale*

$$\det(-D^2 u) \leq \frac{1}{\det(a_{ij})} \left( \frac{-\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u}{n} \right)^n \quad \text{em } \Gamma^+. \quad (6.6)$$

**Prova.** A estimativa enunciada segue da desigualdade matricial

$$\det(AB) \leq \left( \frac{\text{tr } AB}{n} \right)^n$$

onde  $A, B$  são duas matrizes simétricas positivas semidefinidas. ■

Usando esta estimativa, o resultado do Lema 6.13 pode ser escrito na forma

$$\int_{B_M(0)} g \leq \int_{\Gamma^+} g(\nabla u) \left( \frac{-\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u}{n [\det(a_{ij})]^{1/n}} \right)^n, \quad (6.7)$$

que é a forma que usaremos para provar o Princípio do Máximo de Alexandroff:



**Teorema 6.15.** (Princípio do Máximo de Alexandroff) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico em  $\Omega$  com  $c \leq 0$  e que satisfaz*

$$\frac{|\mathbf{b}|}{[\det(a_{ij})]^{1/n}} \in L^n(\Omega).$$

*Suponha que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq f$  em  $\Omega$ , com*

$$\frac{f}{[\det(a_{ij})]^{1/n}} \in L^n(\Omega).$$

*Então existe uma constante positiva  $C = C(n, \text{diam } \Omega, L)$  tal que*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \left\| \frac{f^-}{[\det(a_{ij})]^{1/n}} \right\|_{L^n(\Gamma^+)}.$$

**Prova.** O resultado decorrerá do Lema 6.13. Por exemplo, tomando  $g \equiv 1$ , temos

$$\omega_n \left( \frac{\sup_{\Omega} u - \sup_{\partial\Omega} u^+}{\text{diam } \Omega} \right)^n = \int_{B_M(0)} 1 \leq \int_{\Gamma^+} \left( -\frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u}{n [\det(a_{ij})]^{1/n}} \right)^n,$$

e daí obtemos a desigualdade para o caso  $\mathbf{b} = 0$  e  $c = 0$ :

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{\text{diam } \Omega}{n \omega_n^{1/n}} \left[ \int_{\Gamma^+} \left( \frac{f^-}{[\det(a_{ij})]^{1/n}} \right)^n \right]^{1/n}.$$

Para provar o caso geral, precisamos escolher outra função  $g$  adequada. Note que se  $f = 0$  e  $c = 0$  então  $\left(-\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u\right)^n \leq |\mathbf{b}|^n |\nabla u|^n$ , o que sugere tomar  $g(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^{-n}$ . Como esta função não é localmente integrável na origem, no entanto, escolheremos

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{|\mathbf{p}|^n + \mu^n} \tag{6.8}$$

e faremos  $\mu \rightarrow 0^+$ .

Pela desigualdade de Cauchy, em  $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$  temos

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &\leq \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - f \leq \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - f \leq |\mathbf{b}| |\nabla u| + f^- \\ &\leq \left[ |\mathbf{b}|^n + \left( \frac{f^-}{\mu} \right)^n \right]^{1/n} (|\nabla u| + \mu^n)^{1/n} (1+1)^{(n-2)/n}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left( -\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^n \leq 2^{n-2} \left[ |\mathbf{b}|^n + \left( \frac{f^-}{\mu} \right)^n \right] (|\nabla u| + \mu^n).$$

Segue do Lema 5.40 que

$$\int_{B_M(0)} g \leq \frac{2^{n-2}}{n^n} \int_{\Gamma^+} \frac{1}{\det(a_{ij})} \left[ |\mathbf{b}|^n + \left( \frac{f^-}{\mu} \right)^n \right].$$

Mas

$$\int_{B_M(0)} g = \omega_n \int_0^M \frac{r^{n-1}}{r^n + \mu^n} dr = \frac{\omega_n}{n} \log \frac{M^n + \mu^n}{\mu^n} = \frac{\omega_n}{n} \log \left( \frac{M^n}{\mu^n} + 1 \right).$$

Portanto,

$$M^n \leq \mu^n \left\{ \exp \left[ \frac{2^{n-2}}{\omega_n n^n} \left( \left\| \frac{|\mathbf{b}|}{[\det(a_{ij})]^{1/n}} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} + \left\| \frac{f^-}{[\det(a_{ij})]^{1/n}} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)} \right) \right] - 1 \right\}.$$

Se  $f = 0$ , escolhemos  $\mu = \left\| \frac{f^-}{[\det(a_{ij})]^{1/n}} \right\|_{L^n(\Gamma^+ \cap \Omega^+)}$ . Se  $f \neq 0$ , escolhemos qualquer  $\mu > 0$  e fazemos  $\mu \rightarrow 0$ . ■

**Teorema 6.16.** (Princípio do Máximo para Domínios com Volume Pequeno) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico em  $\Omega$ . Suponha que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Existe uma constante positiva  $\delta = \delta(n, \text{diam } \Omega, L)$  tal que se  $|\Omega| \leq \delta$  então  $u \leq 0$  em  $\Omega$ .*

**Prova.** Se  $c \leq 0$ , então  $u \leq 0$  em  $\Omega$  pelo Princípio do Máximo Fraco. Em geral, escreva  $c = c^+ - c^-$ . Defina o operador elíptico  $M$  por

$$Mu = Lu - cu - c^- u \geq -c^+ u.$$

Então  $M$  satisfaz as hipóteses do teorema anterior com  $f = -c^+ u$ . Como  $f^- = c^+ u^+$ , segue que existe uma constante positiva  $C = C(n, \text{diam } \Omega, L)$  tal que

$$\sup_{\Omega} u \leq C \|c^+ u^+\|_{L^n(\Omega)} \leq C |\Omega|^{1/n} \|c^+ u^+\|_{L^\infty(\Omega)} = C |\Omega|^{1/n} \|c^+\|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{\Omega} u \leq \frac{1}{2} \sup_{\Omega} u$$

se  $|\Omega|$  é pequeno. Daí obtemos  $\sup_{\Omega} u \leq 0$  em  $\Omega$ . ■

**Corolário 6.17.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico em  $\Omega$ . Então, se  $\Omega$  é suficientemente estreito ou suficientemente pequeno, existe no máximo uma única solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

## 6.4 Simetria de Soluções: Método dos Planos Móveis

Em 1979, Gidas, Ni e Nirenberg [GNN] estabeleceram a simetria radial de soluções positivas para certas equações elípticas não-lineares. Usando o método dos planos móveis, Gidas, Ni e Nirenberg obtiveram resultados de simetria e monotonicidade para as soluções deste problema. A técnica é baseada no princípio do máximo. Entretanto, sua demonstração original requeria que o domínio  $\Omega$  fosse suave,  $f \in C^1(\Omega)$  e era também essencial que as soluções  $u$  fossem de classe  $C^2$  até a fronteira. Aplicando o princípio do máximo para domínios pequenos, Berestycki e Nirenberg [BN] foram capazes de generalizar os resultados obtidos para qualquer domínio, requerendo apenas que  $f$  fosse localmente de Lipschitz e que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , isto é, requerendo apenas continuidade da solução até a fronteira. Além disso, no processo de obter estes resultados mais gerais, eles simplificaram consideravelmente a demonstração original.

Seja  $a = \sup\{x_1 : (x_1, x') \in \Omega\}$  e para  $0 < \lambda < a$  considere o hiperplano

$$T_\lambda = \{x \in \Omega : x_1 = \lambda\}.$$

Denote a porção de  $\Omega$  à direita deste hiperplano por

$$\Omega_\lambda = \{x \in \Omega : x_1 > \lambda\}.$$

Denote também por  $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$  a reflexão do ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega_\lambda$  com respeito ao hiperplano  $T_\lambda$ .

**Teorema 6.18.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto limitado, convexo na direção  $x_1$  e simétrico com respeito ao hiperplano  $x_1 = 0$ . Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  uma solução positiva de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente de Lipschitz. Então

$$u(x_1, x') \leq u(-x_1, x')$$

para todo  $x = (x_1, x') \in \Omega$  tal que  $x_1 > 0$ .

Além disso,  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$  para todo  $x \in \Omega$  tal que  $x_1 > 0$ .

**Prova.** Provaremos que

$$u(x_1, x') < u(y_1, x')$$

para todo  $x = (x_1, x') \in \Omega$  tal que  $x_1 > 0$  e  $-x_1 < y_1 < x_1$ . O resultado segue da continuidade de  $u$  fazendo  $y_1 \rightarrow -x_1$ .

**Passo 0.** *Definindo  $w_\lambda$  e determinando suas propriedades básicas.*

Em  $\Omega_\lambda$  nós definimos

$$w_\lambda(x) = u(x) - u(x_\lambda).$$

Por causa da convexidade e simetria de  $\Omega$ , se  $x \in \Omega_\lambda$  então  $x_\lambda \in \Omega$ , logo esta definição faz sentido.

Temos

$$-\Delta w_\lambda(x) = -\Delta u(x) + \Delta u(x_\lambda) = f(u(x)) - f(u(x_\lambda)) = c_\lambda(x)[u(x) - u(x_\lambda)] = c_\lambda(x)w_\lambda(x),$$

onde

$$c_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{f(u(x)) - f(u(x_\lambda))}{u(x) - u(x_\lambda)} & \text{se } u(x) \neq u(x_\lambda), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que  $c_\lambda$  é uma função limitada em  $\Omega_\lambda$  porque  $f$  é localmente Lipschitziana: de fato, temos  $u(\overline{\Omega}) \subset [\alpha, \beta]$  para  $\alpha = \min_{\overline{\Omega}} u$  e  $\beta = \max_{\overline{\Omega}} u$ , e para cada  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  existem números  $c(t_0), \delta_{t_0} > 0$  tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq c(t_0)|t - s| \quad \text{para todos } t, s \in [t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0}];$$

cobrindo  $[\alpha, \beta]$  por um número finito de tais intervalos, digamos  $[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_N, \beta_N]$ , de tal modo que  $\beta_{i+1} > \alpha_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , através de iterações sucessivas concluímos que se  $C = \max\{c(t_1), \dots, c(t_N)\}$  então

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| \leq NC \quad \text{para todos } t, s \in [\alpha, \beta].$$

Além disso, como  $u(x) = u(x_\lambda)$  para  $x \in T_\lambda$  e  $u(x) = 0, u(x_\lambda) > 0$  para  $x \in \partial\Omega_\lambda - T_\lambda$  (pois neste caso  $x_\lambda$  está no interior de  $\Omega$  onde  $u$  é positiva), segue que  $w_\lambda \leq 0$  sobre  $\partial\Omega_\lambda$ .

Resumindo, e substituindo  $c_\lambda$  por  $-c_\lambda$  por conveniência de notação,  $w_\lambda$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda + c_\lambda(x)w_\lambda = 0 & \text{em } \Omega_\lambda, \\ w_\lambda \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega_\lambda, \end{cases}$$

com  $w_\lambda \neq 0$  sobre  $\partial\Omega_\lambda$ , porque  $w_\lambda < 0$  em  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\lambda$  (já que  $u > 0$  em  $\Omega$  e  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ ) e  $w_\lambda = 0$  em  $T_\lambda$ . Para provar o teorema, temos que mostrar que

$$w_\lambda < 0 \text{ em } \Omega_\lambda \text{ para todo } 0 < \lambda < a.$$

Para isso, movemos os planos a partir da direita, começando em  $a$ . Para dar o empurrão inicial ao processo, precisamos do seguinte passo:

**Passo 1.**  $w_\lambda < 0$  em  $\Omega_\lambda$  para todo  $\lambda$  suficientemente próximo a  $a$ .

Isso segue imediatamente do Princípio do Máximo Fraco para Domínios Estreitos (não podemos usar o princípio do máximo fraco usual porque o sinal de  $c_\lambda$  é desconhecido).

Em vista do Passo 1, podemos definir

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda > 0 : w_\mu < 0 \text{ em } \Omega_\mu \text{ para todo } \lambda < \mu < a\},$$

e temos  $\lambda_0 \geq 0$ . Para concluir a primeira parte do teorema, temos apenas que mostrar que  $\lambda_0 = 0$ . Assuma por contradição que  $\lambda_0 > 0$ .

**Passo 2.**  $w_{\lambda_0} < 0$  em  $\Omega_{\lambda_0}$ .

Por continuidade,  $w_{\lambda_0} \leq 0$  em  $\Omega_{\lambda_0}$  e  $w_{\lambda_0} \not\equiv 0$  sobre  $\partial\Omega_{\lambda_0}$ . Segue do Princípio do Máximo Forte (Teorema 5.35, isto é,  $w_{\lambda_0}$  não pode assumir o máximo 0 no interior de  $\Omega$ , independentemente do sinal de  $c_\lambda$ ) que

$$w_{\lambda_0} < 0 \text{ em } \Omega_{\lambda_0}.$$

**Passo 3.** Existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0$  em  $\Omega_{\lambda_0-\varepsilon}$ , contradizendo a escolha de  $\lambda_0$ .

Fixe  $\delta > 0$ , cujo valor será determinado mais tarde. Seja  $K \subset\subset \Omega_{\lambda_0}$  tal que

$$|\Omega_{\lambda_0} \setminus K| < \frac{\delta}{2}.$$

O fato que  $w_{\lambda_0} < 0$  em  $\Omega_{\lambda_0}$  implica

$$w_{\lambda_0} \leq -c < 0 \text{ em } K,$$

logo, por continuidade, temos

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0 \text{ em } K,$$

para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Agora,  $w_{\lambda_0-\varepsilon}$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w_{\lambda_0-\varepsilon} + c_{\lambda_0-\varepsilon}(x)w_{\lambda_0-\varepsilon} = 0 & \text{em } \Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \setminus K, \\ w_{\lambda_0-\varepsilon} \leq 0 & \text{sobre } \partial(\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \setminus K), \end{cases}$$

onde  $\partial(\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \setminus K) = \partial\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \cup \partial K$ . Já vimos que  $w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0$  em  $K$ . Se  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, então  $|\Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \setminus K| < \delta$ ; logo, escolhendo  $\delta > 0$  de tal modo que o Princípio do Máximo para Domínios com Volume Pequeno se aplica, concluímos que

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} \leq 0 \text{ em } \Omega_{\lambda_0-\varepsilon} \setminus K,$$

donde

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} \leq 0 \text{ em } \Omega_{\lambda_0-\varepsilon}.$$

Pelo princípio do máximo forte e o fato que  $w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0$  em  $K$ , segue que

$$w_{\lambda_0-\varepsilon} < 0 \quad \text{em } \Omega_{\lambda_0-\varepsilon},$$

concluindo a demonstração do Passo 3.

Finalmente, se  $w_\lambda < 0$  em  $\Omega_\lambda$  para todo  $0 < \lambda < a$ , então em particular  $w_\lambda$  assume o seu máximo em  $T_\lambda \cap \Omega$ . Pelo Lema de Hopf,

$$0 < \frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1}(x) \Big|_{x_1=\lambda} = 2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \Big|_{x_1=\lambda}.$$

■

**Corolário 6.19.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto limitado, convexo na direção  $x_1$  e simétrico com respeito ao hiperplano  $x_1 = 0$ . Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  uma solução positiva de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente de Lipschitz. Então  $u$  é simétrica com respeito ao hiperplano  $x_1 = 0$  e decrescente na direção  $x_1$  para  $x_1 > 0$ .

**Prova.** Pelo teorema anterior,

$$u(x_1, x') \leq u(-x_1, x')$$

para todo  $x = (x_1, x') \in \Omega$  tal que  $x_1 > 0$ . Tomando  $v(x_1, x') = u(-x_1, x')$ , segue que  $-\Delta v(x_1, x') = -\Delta u(-x_1, x')$ , e portanto  $v$  também satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v = f(v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

logo a conclusão do teorema anterior vale para  $v$ , isto é,

$$v(x_1, x') \leq v(-x_1, x'),$$

donde

$$u(-x_1, x') \leq u(x_1, x'),$$

e portanto

$$u(x_1, x') = u(-x_1, x').$$

■

**Corolário 6.20.** *Seja  $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$  uma solução positiva de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } B_R, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_R, \end{cases}$$

onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente de Lipschitz. Então  $u$  é radialmente simétrica e radialmente decrescente em  $B_R$ .

**Prova.** Usando o fato que o Laplaciano é invariante sob rotações, podemos definir como no corolário anterior  $v(x) = u(Tx)$ , onde  $T$  é a rotação que leva qualquer vetor  $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$  no vetor  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , e aplicar o teorema para concluir que  $u$  é simétrica nesta direção e satisfaz  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0$  para todo  $x$  que é um múltiplo escalar positivo do vetor  $\nu$ . Se  $u$  é simétrica em relação a todas as direções, então necessariamente  $u$  é radialmente simétrica. ■

# Capítulo 7

## Equação do Calor

Seja  $u$  a densidade de alguma substância ou a temperatura (que pode ser vista como a densidade de calor ou energia térmica) em uma região  $\Omega$ . Se  $U \subset \Omega$  é qualquer região com fronteira suave, pelo princípio de conservação de massa ou de energia, a taxa de variação da quantidade de substância em  $U$  é igual ao negativo do fluxo para fora da região  $U$  através da fronteira  $\partial U$ :

$$\frac{d}{dt} \int_U u = - \int_{\partial U} \mathbf{F} \cdot \nu.$$

Segue do Teorema da Divergência que

$$\frac{d}{dt} \int_U u = - \int_U \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Se  $u$  for diferenciável, concluímos que

$$u_t = - \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Em muitas aplicações, o fluxo é proporcional ao gradiente de  $u$  mas aponta na direção contrária (a substância ou o calor fluem das regiões de maior concentração ou temperatura para as de menor concentração ou temperatura, respectivamente). Normalizando a constante de proporcionalidade, podemos então supor que

$$\mathbf{F} = -\nabla u.$$

Obtemos assim a **equação do calor** ou **equação da difusão**:

$$u_t - \Delta u = 0. \tag{7.1}$$

Na presença de fontes ou sorvedouros, onde a substância é criada ou destruída, respectivamente, obtemos uma equação não-homogênea:

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \tag{7.2}$$

onde  $f(x, t)$  é a taxa de criação da substância.

Observe que a equação do calor (diferentemente da equação da onda, como veremos no próximo capítulo) não é preservada quando substituímos  $t$  por  $-t$ : a função  $v(x, t) = u(x, -t)$  não satisfaz  $v_t - \Delta v = 0$ , mas sim  $v_t + \Delta v = 0$ . Isso indica que a equação do calor ou da difusão descreve processos irreversíveis, fazendo uma distinção entre passado e futuro. Portanto, o *problema de Cauchy* ou *problema de valor inicial* para a equação do calor é encontrar uma solução  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  para

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{7.3}$$

onde  $f$  e  $g$  têm a regularidade apropriada.

## 7.1 Núcleo do Calor

Nesta seção procuraremos uma solução fundamental para a equação do calor homogênea, procedendo de maneira similar como quando tratamos da equação de Laplace. Observe que a equação do calor é uma equação linear envolvendo uma derivada em  $t$  e duas derivadas em  $x$ . Conseqüentemente, se  $u$  é uma solução para a equação do calor, então

$$v(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

também é uma solução, para qualquer valor de  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Em outras palavras, a equação do calor é invariante sob mudanças de coordenadas lineares que deixam invariante a razão  $\frac{|x|^2}{t}$ . Isso sugere procurar por uma solução que tenha a forma

$$u(x, t) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) \quad (7.4)$$

para alguma função especial  $v$  a ser determinada. No entanto, chegaremos ao nosso objetivo de uma maneira algebricamente mais simples se tentarmos soluções da forma

$$u(x, t) = w(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right), \quad (7.5)$$

onde  $v$  e  $w$  devem ser determinadas. Temos

$$u_t = w'(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - \frac{|x|^2}{t^2}w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right)$$

e

$$u_{x_i} = w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{2x_i}{t},$$

donde

$$u_{x_i x_i} = w(t)v''\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{4x_i^2}{t^2} + w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{2}{t}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= w'(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - \frac{|x|^2}{t^2}w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - \sum_{i=1}^n \left[ w(t)v''\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{4x_i^2}{t^2} + w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{2}{t} \right] \\ &= w'(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - \frac{|x|^2}{t^2}w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - \frac{4|x|^2}{t^2}w(t)v''\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - \frac{2n}{t}w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right). \end{aligned}$$

Portanto,  $v$  e  $w$  devem satisfazer

$$w'(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - \frac{w(t)}{t} \left[ 4\frac{|x|^2}{t^2}v''\left(\frac{|x|^2}{t}\right) + \frac{|x|^2}{t}v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) + 2nv'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) \right] = 0. \quad (7.6)$$

Escolhendo

$$v(s) = e^{-\frac{s}{4}},$$

segue que

$$4v''(s) + v'(s) = 0,$$

logo a equação acima transforma-se em

$$w'(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) - 2n\frac{w(t)}{t}v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right) = 0$$

ou,

$$\left(w'(t) - \frac{n w(t)}{2t}\right) e^{-|x|^2/4t} = 0,$$

donde

$$w'(t) - \frac{n w(t)}{2t} = 0. \quad (7.7)$$

A solução desta equação é

$$w(t) = t^{-n/2}. \quad (7.8)$$

Concluimos que

$$u(x, t) = t^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}. \quad (7.9)$$

**Definição.** A **solução fundamental** para a equação do calor é a função

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0. \quad (7.10)$$

Ela também é chamada o **núcleo do calor**.

A escolha da constante é para normalizar o núcleo do calor, que é uma função integrável em  $\mathbb{R}^n$ :

**Lema 6.1.** Para todo  $t > 0$  vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) dx = 1. \quad (7.11)$$

**Prova.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} (2t^{1/2})^n dy = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n e^{-y_i^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_i^2} dy_i = \frac{1}{\pi^{n/2}} (\pi^{1/2})^n = 1. \end{aligned}$$

■

## 7.2 Solução do Problema de Cauchy

### 7.2.1 O Caso Homogêneo

Usaremos o núcleo do calor para obter uma fórmula de representação para a solução limitada do problema de valor inicial da equação do calor:

**Teorema 6.2.** (Solução do Problema de Cauchy) *Suponha que  $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Defina*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (7.12)$$



para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ . Então  $u$  é a única solução limitada de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.13)$$

Mais precisamente, vale

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo } t > 0. \quad (7.14)$$

**Prova.** Como  $\Gamma(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  e suas derivadas parciais de todas as ordens são integráveis em  $\mathbb{R}^n$  para todo  $(x, t)$ ,  $t > 0$ , segue que

$$D^\alpha u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \Gamma(x - y, t) g(y) dy$$

para todo multi-índice  $\alpha$ , e portanto  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ . Além disso,

$$[u_t - \Delta u](x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} [u_t - \Delta u] \Gamma(x - y, t) g(y) dy = 0,$$

de modo que  $u$  satisfaz a equação do calor.

Dizer que  $u$  satisfaz a condição de fronteira significa dizer que

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = g(x_0) \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (7.15)$$

Para provar isso, dados  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon > 0$ , escolha  $\delta > 0$  tal que  $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$  se  $|y - x_0| < \delta$ . Então, se  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ , temos (usando o Lema 6.1)

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) [g(y) - g(x_0)] dy \right| \\ &\leq \int_{B_\delta(x_0)} \Gamma(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Gamma(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\leq \varepsilon + 2 \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Gamma(x - y, t) dy. \end{aligned}$$

Mas, para  $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)$ , temos

$$|y - x_0| \leq |x - y| + |x - x_0| < |x - y| + \frac{\delta}{2} \leq |x - y| + \frac{1}{2} |y - x_0|,$$

de modo que

$$|x - y| > \frac{1}{2} |y - x_0|,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy &\leq \frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy = \frac{n\omega_n}{t^{n/2}} \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \\ &\leq n\omega_n 4^n \int_{\delta/4t^{1/2}}^{+\infty} e^{-s^2} s^{n-1} ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $t \rightarrow 0^+$ , porque  $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} s^{n-1} ds = \pi^{1/2} < \infty$ . Portanto, se  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$  e  $t > 0$  é suficientemente pequeno, temos  $|u(x, t) - g(x_0)| < 2\varepsilon$ , o que conclui a parte da existência da demonstração. O fato de que  $u$  é limitada segue imediatamente da fórmula de representação; de fato, para cada  $t > 0$  temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) dy = \|g\|_{L^\infty}.$$

A unicidade decorrerá do princípio do máximo que consideraremos na próxima seção. ■

Sem condições adicionais sobre a solução  $u$  (tal como ser limitada), não é possível provar a unicidade de soluções para a equação do calor. De fato, é possível construir infinitas soluções analíticas para a equação do calor satisfazendo  $u(x, 0) \equiv 0$  (veja [John] e a próxima seção). Também é possível provar com um pouco mais de detalhes técnicos que se  $g$  é apenas mensurável e satisfaz uma desigualdade do tipo

$$|g(x)| \leq M e^{a|x|^2} \quad (7.16)$$

para algumas constantes  $M, a > 0$  então a fórmula do núcleo do calor ainda define uma solução  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  para o problema de valor inicial acima para  $T = 1/4a$ .

Uma das características mais importantes da solução da equação do calor dada no teorema anterior é que  $u(x, t)$  depende dos valores de  $g$  em todos os pontos. Equivalentemente, os valores de  $g$  na vizinhança de um ponto  $x_0$  afetam os valores de  $u(x, t)$  em todo  $x$ , embora imperceptivelmente a grandes distâncias. Isso significa que efeitos viajam com velocidade infinita (o que por sua vez indica alguma limitação na aplicação estrita da equação do calor ao estudo de fenômenos físicos). Além disso, a solução  $u$  é de classe  $C^\infty$  para qualquer  $t > 0$ , mesmo se o dado inicial  $g$  for apenas contínuo, ou mesmo se ele contiver um número finito de descontinuidades de salto (se  $g$  é contínua limitada, a solução é na verdade analítica; veja [John] para maiores detalhes). Assim, depois de decorrido um intervalo infinitesimal de tempo, a propagação do calor ou a difusão da substância suaviza perfeitamente qualquer descontinuidade presente originalmente. Isso mostra que o problema de Cauchy para a equação do calor não pode em geral ser resolvido “para trás”, isto é, não podemos obter uma solução  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (-T, 0)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times (-T, 0])$  para o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } -T < t < 0, \\ u(x, 0) = g & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t = 0. \end{cases}$$

De fato, valores da temperatura  $u(x, 0) = g(x)$  que não forem suaves (ou analíticos), não podem se originar através da condução do calor a partir de uma distribuição de temperaturas no passado.

## 7.2.2 O Caso Não-Homogêneo - Princípio de Duhamel

Para obter a solução para o caso não-homogêneo, observe que não apenas  $\Gamma(x - y, t)$  é uma solução para a equação do calor, mas também  $\Gamma(x - y, t - s)$ , se  $0 < s < t$ . Além disso, fixado  $s$ ,

$$u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

é solução do problema

$$\begin{cases} u_t(x, t; s) - \Delta u(x, t; s) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > s, \\ u(x, s; s) = f(x, s) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

que é um problema de valor inicial em que o instante de tempo inicial é  $t = s$ , ao invés de  $t = 0$ . Esta solução certamente não é uma solução para o problema de calor não-homogêneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

No entanto, o *princípio de Duhamel* afirma que podemos encontrar uma solução para este problema integrando as soluções do problema homogêneo acima com respeito a  $s$ , isto é, devemos tentar uma solução da forma

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds.$$

O princípio de Duhamel foi enunciado inicialmente para a equação da onda pelo próprio em 1843, mas é válido para equações diferenciais parciais lineares mais gerais. Ele é o análogo do método de variação da parâmetros para equações diferenciais ordinárias. A idéia é sempre reduzir a solução do problema não-homogêneo à solução de uma família de problemas homogêneos.

**Teorema 6.3.** (Solução do Problema de Cauchy Não-Homogêneo) *Suponha que  $f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ .*

*Defina*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \int_0^t \frac{1}{[4\pi(t - s)]^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds \quad (7.17)$$

*para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ . Então  $u$  é uma solução de classe  $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.18)$$

**Prova.** Como  $\Gamma(x - y, t - s)$  tem uma singularidade em  $t = s$ , não podemos derivar sob o sinal de integração. Então, em primeiro lugar, fazemos uma mudança de variáveis, escrevendo

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) f(x - y, t - s) dy ds.$$

Daí, como  $f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ ,  $\Gamma(y, s)$  é integrável em  $\mathbb{R}^n \times [0, t]$  para qualquer  $t$  (Lema 6.1) e suave perto de  $s = t > 0$ , calculamos

$$u_t(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy$$

e

$$\partial_{ij} u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \partial_{ij} f(x - y, t - s) dy ds.$$

Segue que  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  e podemos calcular

$$\begin{aligned} [u_t - \Delta u](x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left[ \frac{\partial}{\partial s} - \Delta \right] f(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left[ \frac{\partial}{\partial s} - \Delta \right] f(x - y, t - s) dy ds + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy. \end{aligned}$$

Estimando a primeira integral do lado direito da equação acima, obtemos, pelo Lema 6.1,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left[ \frac{\partial}{\partial s} - \Delta \right] f(x - y, t - s) dy ds \right| &\leq \left( \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)} |f_t| + \sup_{\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)} |D^2 f| \right) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) dy ds \\ &\leq C(f) \varepsilon. \end{aligned}$$

Integrando por partes a segunda integral, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left[ \frac{\partial}{\partial s} - \Delta \right] f(x - y, t - s) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy ds - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy ds + \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{\partial}{\partial s} - \Delta \right] \Gamma(y, s) f(x - y, t - s) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy ds - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy ds, \end{aligned}$$

já que  $\Gamma(y, s)$  é uma solução para a equação do calor. Concluimos, usando o mesmo argumento do Teorema 6.1, que

$$[u_t - \Delta u](x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy ds + o(\varepsilon) \rightarrow f(x, t) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Para terminar a demonstração, notamos que

$$|u(x, t)| \leq t \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))} \rightarrow 0$$

uniformemente quando  $t \rightarrow 0^+$ . ■

### 7.2.3 O Caso Geral

Combinando os Teoremas 6.2 e 6.3, obtemos uma solução para o caso geral:

**Teorema 6.4.** (Solução do Problema de Cauchy Geral) *Suponha que  $f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  e  $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Defina*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) g(y) dy \quad (7.19)$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{[4\pi(t-s)]^{n/2}} f(y, s) dy ds + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (7.20)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ . Então  $u$  é uma solução de classe  $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7.21)$$

## 7.3 O Princípio do Máximo e Unicidade de Soluções

### 7.3.1 O Princípio do Máximo em Domínios Limitados

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e considere o cilindro

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T).$$

Podemos dividir a fronteira  $\partial\Omega_T$  de  $\Omega_T$  em duas partes, uma fronteira “inferior”  $\partial_*\Omega_T$ , também conhecida como a **fronteira parabólica** de  $\Omega_T$ , e uma fronteira “superior”  $\partial^*\Omega_T$ :

$$\begin{aligned} \partial_*\Omega_T &= \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, T], \\ \partial^*\Omega_T &= \Omega \times \{T\}. \end{aligned}$$

A importância da fronteira parabólica está em que uma solução para a equação do calor em  $\Omega_T$  atinge o seu máximo e o seu mínimo exatamente na fronteira parabólica:

**Teorema 6.5.** (Princípio do Máximo em Domínios Limitados) *Seja  $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ . Se  $u$  satisfaz  $u_t - \Delta u \leq 0$ , então*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial_* \Omega_T} u. \quad (7.22)$$

*Se  $u$  satisfaz  $u_t - \Delta u \geq 0$ , então*

$$\min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\partial_* \Omega_T} u. \quad (7.23)$$

*Conseqüentemente, se  $u$  satisfaz  $u_t - \Delta u = 0$ , então*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} = \|u\|_{L^\infty(\partial_* \Omega_T)}. \quad (7.24)$$

**Prova.** Suponha primeiro que

$$u_t - \Delta u < 0.$$

Dado  $0 < \varepsilon < T$ , como  $u$  é contínua em  $\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}$ , ela atinge o seu máximo em  $\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}$  em algum ponto  $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_{T-\varepsilon}$ , isto é,

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}} u.$$

Afirmamos que  $(x_0, t_0) \in \partial_* \Omega_{T-\varepsilon}$ . De fato, se  $(x_0, t_0) \in \Omega$ , teríamos

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \Delta u(x_0, t_0) \leq 0 \Rightarrow [u_t - \Delta u](x_0, t_0) \geq 0,$$

uma contradição; da mesma forma, se  $(x_0, t_0) \in \partial^* \Omega_{T-\varepsilon}$ , teríamos uma contradição:

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \Delta u(x_0, t_0) \leq 0 \Rightarrow [u_t - \Delta u](x_0, t_0) \geq 0.$$

Portanto,  $(x_0, t_0) \in \partial_* \Omega_{T-\varepsilon}$  e

$$\max_{\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}} u = \max_{\partial_* \Omega_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\partial_* \Omega_T} u.$$

Como todo ponto de  $\overline{\Omega}_T$  está em algum  $\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}$  e por continuidade  $u$  atinge o seu máximo em  $\overline{\Omega}_T$ , a conclusão do teorema neste caso segue.

Agora suponha que

$$u_t - \Delta u \leq 0.$$

Considere a função

$$v(x, t) = u(x, t) - kt$$

para alguma constante arbitrária  $k > 0$ . Então  $v$  satisfaz

$$v_t - \Delta v \leq -\varepsilon < 0 \text{ em } \Omega_T,$$

logo

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\overline{\Omega}_T} (v + kT) \leq \max_{\overline{\Omega}_T} v + kT = \max_{\partial_* \Omega_T} v + kT \leq \max_{\partial_* \Omega_T} u + kT.$$

Fazendo  $k \rightarrow 0$ , obtemos o resultado. ■

**Corolário 6.6.** (Unicidade em Domínios Limitados) *Existe no máximo uma única solução  $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$  para o problema de valor inicial e de valor de fronteira*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{em } \Omega_T, \\ u = g & \text{sobre } \partial_* \Omega_T, \end{cases} \quad (7.25)$$

*com  $f \in C^0(\Omega_T)$  e  $g \in C^0(\partial_* \Omega_T)$ .*

**Prova.** Se  $u, v \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$  são ambas soluções do problema de valor inicial e de valor de fronteira acima, então  $w = u - v$  é solução de

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{em } \Omega_T, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial_* \Omega_T. \end{cases}$$

Pelo teorema anterior, segue que  $w \equiv 0$ . ■

### 7.3.2 O Princípio do Máximo em $\mathbb{R}^n$

O princípio do máximo e o resultado de unicidade podem ser estendidos para  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , desde que  $u$  satisfaça uma condição de crescimento no infinito:

**Teorema 6.7.** (Princípio do Máximo em  $\mathbb{R}^n$ ) *Suponha que  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  satisfaz*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \leq 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \quad (7.26)$$

e existem constantes  $M, a > 0$  tais que

$$u(x, t) \leq M e^{a|x|^2} \quad \text{para todos } x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T. \quad (7.27)$$

Então

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g. \quad (7.28)$$

**Prova.** Basta provar o resultado assumindo que  $T < \frac{1}{4a}$ , pois podemos sempre dividir o intervalo  $[0, T]$  em subintervalos iguais de comprimento menor que  $1/4a$  e aplicar o argumento sucessivamente a estes subintervalos.

Portanto podemos assumir que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $a < \frac{1}{4(T + \varepsilon)}$ . Fixado  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $\mu > 0$ , defina

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}.$$

O segundo termo é precisamente  $\Gamma(|x-y|, T + \varepsilon - t)$  e portanto satisfaz a equação do calor. Segue que  $v_t - \Delta v \leq 0$ . Considere o cilindro circular

$$B_T = B_\rho(y) \times (0, T)$$

centrado na bola de raio  $\rho$  e centro em  $y$ . Então, pelo princípio do máximo para domínios limitados, temos que

$$v(y, t) \leq \max_{\partial_* B_T} v.$$

Agora, observe que  $\partial_* B_T$  consiste de uma parte plana e uma parte curva. Sobre a parte plana temos

$$v(x, 0) \leq u(x, 0) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Sobre a parte curva, em que  $|x - y| = \rho$ , temos

$$\begin{aligned} v(x, t) &\leq M e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{-\frac{\rho^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq M e^{a(|x|+\rho)^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{-\frac{\rho^2}{4(T+\varepsilon)}} \\ &= M e^{a(|y|+\rho)^2} - \mu [4(a + \gamma)]^{n/2} e^{(a+\gamma)\rho^2}, \end{aligned}$$

onde  $\gamma > 0$  é tal que

$$a + \gamma = \frac{1}{4(T + \varepsilon)}.$$

Segue que se  $\rho$  é suficientemente grande, temos

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Fazendo  $\mu \rightarrow 0$ , concluímos o teorema. ■

**Corolário 6.8.** (Unicidade em  $\mathbb{R}^n$ ) *Existe no máximo uma única solução  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  para o problema de valor inicial e de valor de fronteira*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \end{cases} \quad (7.29)$$

com  $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  e  $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ , que satisfaz a estimativa de crescimento

$$|u(x, t)| \leq M e^{a|x|^2} \quad \text{para todos } x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T. \quad (7.30)$$

Existe uma infinidade de soluções para o problema de valor inicial acima com  $f = g = 0$  de crescimento muito rápido, maior do que o crescimento exponencial (veja [John]). Por outro lado, a unicidade para o problema de Cauchy vale se apenas soluções não-negativas são admitidas (veja [DiBenedetto]).

## 7.4 Regularidade de Soluções

Mostraremos agora que as soluções da equação do calor são automaticamente suaves.

**Teorema 6.9.** (Regularidade de Soluções da Equação do Calor) *Seja  $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$  uma solução de*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega_T \quad (7.31)$$

onde  $\Omega$  tem fronteira de classe  $C^1$ . Então  $u \in C^\infty(\Omega_T)$ .

**Prova.** Se  $v \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$  é uma função qualquer, integrando por partes obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_T} (u_t - \Delta u) v = \int_0^T \int_{\Omega} (u_t - \Delta u) v \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} u_t v \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx dt \\ &= \left[ \int_{\Omega} uv \, dx \right]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_{\Omega} uv_t \, dx dt - \left[ \int_0^T \int_{\Omega} u (\Delta v) \, dx dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \right] \\ &= - \int_{\Omega_T} u (v_t + \Delta v) + \int_{\Omega} u(x, T) v(x, T) \, dx - \int_{\Omega} u(x, 0) v(x, 0) \, dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \end{aligned}$$

Fixado  $y \in \Omega$  e  $\varepsilon > 0$ , escolha

$$v(x, t) = \Gamma(x - y, T + \varepsilon - t),$$

de modo que  $v_t + \Delta v = 0$ . Segue que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u(x, T) \Gamma(x - y, \varepsilon) \, dx - \int_{\Omega} u(x, 0) \Gamma(x - y, T + \varepsilon) \, dx \\ &= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[ \Gamma(x - y, T + \varepsilon - t) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma(x - y, T + \varepsilon - t)}{\partial \nu} \right]. \end{aligned}$$

Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos como na demonstração do Teorema 6.1 que

$$\int_{\Omega} u(x, T) \Gamma(x - y, \varepsilon) \, dx \rightarrow u(y, T);$$

o fato de que a região de integração é  $\Omega$  e não o  $\mathbb{R}^n$  todo não muda a conclusão obtida lá. Concluímos que

$$u(y, T) = \int_{\Omega} u(x, 0) \Gamma(x - y, T) \, dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[ \Gamma(x - y, T - t) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma(x - y, T - t)}{\partial \nu} \right].$$

Como  $\Gamma(x - y, s) \in C^\infty$ , o resultado segue. ■

Na verdade, pode-se provar que  $u$  é analítica (veja [John]). Além disso, as hipóteses de regularidade até a fronteira podem ser enfraquecidas (veja [Evans]).

# Capítulo 8

## Equação da Onda

### 8.1 Solução através de Médias Esféricas

Embora seja possível encontrar a solução fundamental da equação da onda através de métodos de similaridade como fizemos com a equação de Laplace e a equação do calor, neste caso considerando soluções da forma  $v\left(\frac{|x|}{t}\right)$ , não seguiremos este procedimento por ser complicado para  $n$  grande. Ao invés, usaremos o chamado *método das médias esféricas*. A idéia essencial deste método é substituir funções arbitrárias por funções radiais. É muito mais fácil obter informações sobre funções radiais, e o conhecimento obtido sobre elas é então usado para obter informações sobre as funções originais.

Lembramos que a solução para o problema de valor inicial da equação da onda

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad \text{se } x \in \mathbb{R}, \quad (8.1)$$

em  $\mathbb{R}^n$  para  $n = 1$  é dada pela fórmula de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy. \quad (8.2)$$

Observe que se  $g \in C^k(\mathbb{R})$  e  $h \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ , então a solução da equação da onda  $u \in C^k(\mathbb{R} \times (0, \infty))$  mas não pode ser mais regular que os dados iniciais. Assim, para obtermos uma solução  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ , precisamos que  $g \in C^2(\mathbb{R})$  e  $h \in C^1(\mathbb{R})$ . Note também que as condições iniciais se propagam com velocidade finita.

Sejam  $n \geq 2$  e  $l \geq \frac{n+3}{2}$ . Suponha que  $u \in C^l(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  é uma solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.3)$$

Denote o valor médio de  $u(y, t)$  sobre a esfera  $B_r(x)$  por

$$\bar{u}(x, t; r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y, t) ds(y). \quad (8.4)$$

Definimos  $\bar{u}(x, t; r)$  para  $r = 0$  por  $\bar{u}(x, t; 0) = u(x, t)$  e para  $r < 0$  por  $\bar{u}(x, t; r) = \bar{u}(x, t; -r)$ . Deste modo,  $\bar{u}$  é uma função par. De maneira análoga, defina

$$\bar{g}(x; r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} g(y) ds(y) \quad (8.5)$$



e

$$\bar{h}(x; r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} h(y) ds(y) \quad (8.6)$$

e estenda para  $r \leq 0$ . Fixado  $x$ ,  $\bar{u}$  é uma função de  $r$  e  $t$ , ou seja,  $\bar{u}$  é uma função radial na coordenada espacial. O resultado a seguir mostra que  $\bar{u}$  satisfaz a equação da onda para funções radiais.

**Proposição 7.1.** *Se  $u$  satisfaz (8.3), então  $\bar{u} \in C^k(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  e satisfaz*

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} = \bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r} \bar{u}_r & \text{se } r \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ \bar{u}(r, 0) = \bar{g}(r) \\ \bar{u}_t(r, 0) = \bar{h}(r) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Prova.** Como na demonstração das propriedades do valor médio para funções harmônicas, obtemos

$$\bar{u}_r(x, t; r) = \frac{r}{n|B_r|} \int_{B_r} \Delta u(y, t) dy = \frac{r}{n|B_r|} \int_{B_r} u_{tt}(y, t) dy. \quad (8.7)$$

Em particular, segue que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{u}_r(x, t; r) = 0 = \lim_{r \rightarrow 0^-} \bar{u}_r(x, t; r);$$

como também

$$\bar{u}_{rr}(x, t; r) = \bar{u}_{rr}(x, t; -r),$$

temos que  $\bar{u} \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Analogamente obtemos  $\bar{u} \in C^k(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

Para provar que  $\bar{u}$  satisfaz a equação diferencial parcial acima, escrevemos

$$\bar{u}_r = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r} u_{tt} dy,$$

de modo que

$$r^{n-1} \bar{u}_r = \frac{1}{n\omega_n} \int_{B_r} u_{tt} dy,$$

logo

$$(r^{n-1} \bar{u}_r)_r = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_r} u_{tt} dy = \frac{r^{n-1}}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} u_{tt} dy = r^{n-1} \bar{u}_{tt},$$

onde segue o resultado. ■

A equação da onda para funções radiais é às vezes chamada *equação de Darboux*.

### 8.1.1 Solução para $n$ ímpar

Pelo teorema do valor médio para integrais, temos que

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(x, t; r). \quad (8.8)$$

Assim, se obtivermos  $\bar{u}$  seremos capazes de obter  $u$ . Para obter  $\bar{u}$ , transformaremos  $\bar{u}$  em uma nova função  $\tilde{u}$  que satisfazerá a equação da onda unidimensional. Em dimensões ímpares seremos então capazes de obter a forma explícita de  $\tilde{u}$  através da fórmula de D'Alembert.

**Lema 7.2.** *Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{k+1}$ . Então, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \left( r^{2k} \frac{d\phi}{dr}(r) \right)$$

e

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{d^j \phi}{dr^j}(r),$$

com as constantes  $\beta_j^k$  independentes de  $\phi$  e  $\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ .

**Prova.** O resultado segue por indução. ■

Suponha que  $n \geq 3$  é um inteiro ímpar e escreva  $n = 2k + 1$ . Defina

$$\tilde{u}(r, t) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \bar{u}(x, t; r)), \quad (8.9)$$

$$\tilde{g}(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \bar{g}(x; r)) \quad (8.10)$$

e

$$\tilde{h}(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \bar{h}(x; r)). \quad (8.11)$$

Observe que  $\tilde{u}, \tilde{g}, \tilde{h}$  são funções ímpares. A transformação definida acima transforma a equação de Darboux na equação da onda unidimensional:

**Lema 7.3.** Para todos  $r \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$  vale

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{rr} & \text{se } r \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ \tilde{u}(r, 0) = \tilde{g}(r) \\ \tilde{u}_t(r, 0) = \tilde{h}(r) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Prova.** Se  $r > 0$ , pelo Lema 7.2 temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{rr} &= \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \bar{u}(x, t; r)) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k} \bar{u}_r) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \bar{u}_{rr} + 2kr^{2k-2} \bar{u}_r) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left[ r^{2k-1} \left( \bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r} \bar{u}_r \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} [r^{2k-1} \bar{u}_{tt}] = \tilde{u}_{tt}. \end{aligned}$$

■

**Teorema 7.4.** (Solução da Equação da Onda para  $n$  ímpar) Seja  $n \geq 3$  um inteiro ímpar. Suponha que  $g \in C^l(\mathbb{R}^n)$  e  $h \in C^{l-1}(\mathbb{R}^n)$  para  $l \geq \frac{n+3}{2}$ . Defina

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\gamma_n} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} g(y) ds(y) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} h(y) ds(y) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

onde  $\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)$ . Então  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  e é uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

**Prova.** Seja  $k$  tal que  $n = 2k + 1$ . Temos

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(x, t; r).$$

Mas, pela fórmula de d'Alembert, segue que

$$\tilde{u}(r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(r+t) + \tilde{g}(r-t)] + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{h}(y) dy.$$

Por outro lado, pelo Lema 7.2, temos

$$\tilde{u}(r, t) = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} (r^{2k-1} \bar{u}(x, t; r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{d^j}{dr^j} \bar{u}(x, t; r),$$

logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(x, t; r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(r, t)}{\beta_0^k r}.$$

Portanto, usando o fato de que  $\tilde{h}$  é uma função ímpar,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\tilde{g}(r+t) + \tilde{g}(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{h}(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\tilde{g}(t+r) - \tilde{g}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{-t} \tilde{h}(y) dy + \frac{1}{2r} \int_{-t}^t \tilde{h}(y) dy + \frac{1}{2r} \int_t^{t+r} \tilde{h}(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\tilde{g}(t+r) - \tilde{g}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{-t} \tilde{h}(y) dy + \frac{1}{2r} \int_t^{t+r} \tilde{h}(y) dy \right] \\ &= \frac{1}{\gamma_n} [\tilde{g}'(t) + \tilde{h}(t)]. \end{aligned}$$

Como

$$\tilde{g}'(t) = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{k-1} (t^{2k-1} \bar{g}(x; t)) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} g(y) ds(y) \right) \right]$$

e

$$\tilde{h}(t) = \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{k-1} (t^{2k-1} \bar{h}(x; t)) = \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} h(y) ds(y) \right),$$

segue o resultado. ■

O caso mais simples é  $n = 3$ . Neste caso,  $\gamma_3 = 1$  e

$$u(x, t) = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} g(y) ds(y) \right) + \frac{t}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} h(y) ds(y) \right].$$

Mas, como vimos na demonstração das propriedades do valor médio para funções harmônicas,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} g(y) ds(y) \right) = \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} \nabla g(y) \cdot \frac{y-x}{t} ds(y).$$

Assim, obtemos a **fórmula de Kirchhoff** para a solução da equação da onda tridimensional:

$$u(x, t) = \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} [g(y) + th(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x)] ds(y). \quad (8.13)$$

Como a fórmula de Kirchhoff envolve a derivada de  $g$ , vemos que a solução  $u$  pode ser menos regular que o seu valor inicial  $g$ . Note que as condições iniciais se propagam com velocidade finita também neste caso.

### 8.1.2 Solução para $n$ par – Método da Descida

Seja  $n$  par. Suponha que  $u(x, t)$  é uma solução para o problema de valor inicial para a equação da onda em  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Então

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, t) = u(x_1, \dots, x_n, t)$$

é uma solução para o problema de valor inicial para a equação da onda em  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ e } t > 0, \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{g}(x) \\ \bar{u}_t(x, 0) = \bar{h}(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{g}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= g(x_1, \dots, x_n), \\ \bar{h}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= h(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como  $n + 1$  é ímpar, nós possuímos uma fórmula de representação para  $\bar{u}$  em termos de  $\bar{g}$  e  $\bar{h}$ . A partir daí podemos obter uma fórmula de representação para  $u$  em termos de  $g$  e  $h$ . Esta é a essência do **método da descida**.

**Teorema 7.5.** (Solução da Equação da Onda para  $n$  par) *Seja  $n \geq 2$  um inteiro par. Suponha que  $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$  e  $h \in C^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  para  $k \geq \frac{n+4}{2}$ . Defina*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\gamma_n} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{t^n}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{t^n}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde  $\gamma_n = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n$ . Então  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  e é uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

**Prova.** Usando a notação da discussão anterior a este teorema e o Teorema 7.4, temos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{t^{n-1}}{|\partial \bar{B}_t(\bar{x})|} \int_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{g}(y) d\bar{s}(y) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{t^{n-1}}{|\partial \bar{B}_t(\bar{x})|} \int_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{h}(y) d\bar{s}(y) \right) \right\}. \end{aligned}$$

onde  $\bar{B}_t(\bar{x})$  denota a bola em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com centro em  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  e raio  $t$ .

Agora,  $\partial\bar{B}_t(\bar{x}) \cap \{y_{n+1} \geq 0\}$  é o gráfico da função

$$\phi(y) = \left(t^2 - |y - x|^2\right)^{1/2} \text{ para } y \in B_t(x) \subset \mathbb{R}^n.$$

Portanto, como  $\partial\bar{B}_t(\bar{x})$  consiste de dois hemisférios, um acima e outro abaixo do hiperplano  $y_{n+1} = 0$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\partial\bar{B}_t(\bar{x})|} \int_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{g}(y) d\bar{s}(y) &= \frac{2}{(n+1)\omega_{n+1}t^n} \int_{B_t(x)} g(y) \left(1 + |\nabla\phi(y)|^2\right)^{1/2} dy \\ &= \frac{2}{(n+1)\omega_{n+1}t^n} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)t}{\left(t^2 - |y - x|^2\right)^{1/2}} dy \\ &= \frac{2\omega_n}{(n+1)\omega_{n+1}} \frac{t}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\left(t^2 - |y - x|^2\right)^{1/2}} dy. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{1}{|\partial\bar{B}_t(\bar{x})|} \int_{\partial\bar{B}_t(\bar{x})} \bar{h}(y) d\bar{s}(y) = \frac{2\omega_n}{(n+1)\omega_{n+1}} \frac{t}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{h(y)}{\left(t^2 - |y - x|^2\right)^{1/2}} dy.$$

O resultado segue observando-se que

$$\begin{aligned} \frac{2\omega_n}{\gamma_{n+1}(n+1)\omega_{n+1}} &= \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)(n+1)} \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \\ &= \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)(n+1)} \frac{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2\pi^{(n+1)/2}} \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)} \frac{\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \\ &= \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)} \frac{(n-1) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{n\left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n(n-2) \cdot (n-4) \cdot (n-6) \cdot \dots \cdot 2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n}. \end{aligned}$$

■

O caso mais simples agora é  $n = 2$ , com  $\gamma_2 = 2$ . Temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{t^2}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\left(t^2 - |y - x|^2\right)^{1/2}} dy \right) + \left( \frac{t^2}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{h(y)}{\left(t^2 - |y - x|^2\right)^{1/2}} dy \right) \right].$$

Agora, procedendo como na demonstração das propriedades do valor médio para funções harmônicas, escrevemos

$$\frac{t^2}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\left(t^2 - |y - x|^2\right)^{1/2}} ds(y) = \frac{t}{|B_1(0)|} \int_{B_1(0)} \frac{g(x + tz)}{\left(1 - |z|^2\right)^{1/2}} dz$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{t^2}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy \right) \\ &= \frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(0)} \frac{g(x+tz)}{(1-|z|^2)^{1/2}} dz + \frac{t}{|B_1(0)|} \int_{B_1(0)} \frac{\nabla g(x+tz) \cdot z}{(1-|z|^2)^{1/2}} dz \\ &= \frac{t}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy + \frac{t}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{\nabla g(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a **fórmula de Poisson** para a solução da equação da onda bidimensional

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t \nabla g(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy. \quad (8.14)$$

Observe que, enquanto que no caso tridimensional (no caso ímpar em geral) os dados iniciais  $g$  e  $h$  em um ponto  $x \in \mathbb{R}^3$  afetam a solução  $u$  apenas na fronteira do cone  $C = \{(y, t) : |x-y| < t, t > 0\}$ , no caso bidimensional (no caso par em geral) os dados iniciais  $g$  e  $h$  em um ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  afetam a solução  $u$  no cone todo. Este é o *princípio de Huygens*: uma perturbação originando em  $x$  propaga-se ao longo da frente de onda em dimensões ímpares, mas em dimensões pares continua tendo efeitos mesmo depois que a frente de onda passou. Esta é a diferença entre a propagação de ondas no ar e no mar.

## 8.2 Solução do Problema Não-Homogêneo – Princípio de Duhamel

Aplicamos o princípio de Duhamel à equação da onda para obter a solução do problema não-homogêneo como fizemos com a equação do calor no capítulo anterior:

**Teorema 7.6.** (Solução da Equação da Onda Não-Homogênea) *Seja  $n \geq 2$ . Seja  $f \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Suponha que  $u(x, t; s)$  é uma solução para o problema homogêneo*

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t; s) - \Delta u(x, t; s) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > s, \\ u(x, s; s) = 0 \\ u_t(x, s; s) = f(x, s) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Defina

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds.$$

Então  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  e é uma solução para o problema não-homogêneo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

**Prova.** Se  $n$  é ímpar, então  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+1}{2}$  e pelo Teorema 7.4  $u(\cdot, \cdot; s) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  para todo  $s > 0$ , logo  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Se  $n$  é par, então  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+2}{2}$  e pelo Teorema 7.5  $u(\cdot, \cdot; s) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  para todo  $s > 0$ , logo  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

Temos

$$u_t(x, t) = u(x, t; t) + \int_0^t u_t(x, t; s) ds = \int_0^t u_t(x, t; s) ds,$$

logo

$$u_{tt}(x, t) = u_t(x, t; t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds = f(x, t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds.$$

Além disso,

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \Delta u(x, t; s) ds = \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds.$$

Portanto

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t).$$

As condições iniciais são claramente cumpridas. ■

Conseqüentemente, a solução do problema geral

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é a soma da solução do Teorema 7.6 com a solução do Teorema 7.4, se  $n$  é ímpar, e a soma da solução do Teorema 7.6 com a solução do Teorema 7.5, se  $n$  é par.

### 8.3 Unicidade de Soluções através de Métodos de Energia

**Teorema 7.7.** (Unicidade de Soluções para a Equação da Onda) *Existe no máximo uma solução*  $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$  *para*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{em } \Omega_T, \\ u = g & \text{em } \partial_* \Omega_T, \\ u_t = h & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

**Prova.** Se  $u_1, u_2$  são duas soluções, então  $w = u_1 - u_2$  satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 & \text{em } \Omega_T, \\ w = 0 & \text{em } \partial_* \Omega_T, \\ w_t = 0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Para cada  $0 \leq t \leq T$ , defina a *energia da onda*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [w_t^2(x, t) + |\nabla w(x, t)|^2] dx. \quad (8.15)$$

Derivando e usando a primeira identidade de Green, obtemos

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [2w_t w_{tt} + 2\nabla w(x, t) \cdot \nabla w_t(x, t)] dx = \int_{\Omega} w_t [w_{tt} - \Delta w] dx = 0,$$

porque

$$\int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0,$$

já que  $w = 0$  em  $\partial\Omega \times [0, T]$  e portanto  $w_t = 0$  em  $\partial\Omega \times [0, T]$ . Segue que  $E(t) \equiv \text{constante} = E(0) = 0$ , donde  $w_t \equiv 0$  e  $\nabla w \equiv 0$ . Concluimos que  $w \equiv \text{constante} = 0$ , já que  $w = 0$  em  $\partial_* \Omega_T$ . ■

# Capítulo 9

## Equação de Poisson

Neste capítulo obteremos a existência de solução para a equação de Poisson usando a chamada *teoria do potencial*. Lembre-se que a unicidade da solução para a equação de Poisson segue do Princípio do Máximo. Além disso, obteremos importantes estimativas a priori para a solução que serão utilizadas no próximo capítulo para resolver o problema de Dirichlet para operadores elípticos mais gerais.

### 9.1 O Potencial Newtoniano e Continuidade de Hölder

Recordamos a solução fundamental para a equação de Laplace  $\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida no Capítulo 5 por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (9.1)$$

Pela Fórmula de Representação de Green (Teorema 5.12), se  $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  então

$$\varphi(y) = - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)\varphi(x) - \Gamma(x-y)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(x) \right) - \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta\varphi(x).$$

Em particular, se  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , segue que

$$\varphi(0) = - \int_{\Omega} \Gamma(x)\Delta\varphi(x). \quad (9.2)$$

Usando a linguagem de distribuições, isto pode ser denotado por

$$-\Delta\Gamma = \delta_0, \quad (9.3)$$

onde  $\delta_0$  é a *distribuição delta de Dirac*, isto é, o funcional linear em  $C_0^\infty(\Omega)$  que satisfaz

$$\delta_0[\varphi] = \varphi(0).$$

A equação (9.3) explica a terminologia “solução fundamental”, bem como a escolha de constantes na definição de  $\Gamma$ .

Se  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ , de acordo com a Fórmula de Representação de Green a solução da equação de Poisson  $-\Delta u = f$  deve ser o *potencial newtoniano* de  $f$ :

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y) dy.$$



E, de fato, isso é verdade, como provamos no Teorema 5.15. Neste capítulo, queremos provar que esta ainda é a solução da equação de Laplace para funções  $f$  mais gerais, com menos diferenciabilidade e sem suporte compacto. Denotaremos o potencial newtoniano de uma função  $f$  por

$$v(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y) dy. \quad (9.4)$$

O potencial newtoniano de uma função  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  é uma função  $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , pois podemos escrever

$$v(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y)f(x-y) dy.$$

Por outro lado, se  $f$  é apenas contínua, então podemos garantir apenas que o potencial newtoniano  $v$  é continuamente diferenciável, mas não é necessariamente duas vezes diferenciável, porque as derivadas parciais de segunda ordem de  $\Gamma$  na vizinhança do polo não são integráveis (veja as justificativas destas afirmações nos Lemas 9.1 e 9.2). E, de fato, uma solução da equação de Poisson

$$\Delta u = f$$

não precisa necessariamente ser de classe  $C^2$  se a função  $f$  for apenas contínua (veja Exercício 9.1). Para obter soluções de classe  $C^2$ , quer usemos a teoria do potencial ou não, somos obrigados a considerar um conceito de continuidade mais forte, o conceito de *continuidade de Hölder*.

**Definição.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é **contínua de Hölder** com expoente  $\alpha$  em  $\Omega$ , se

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \quad (9.5)$$

para algum  $0 < \alpha \leq 1$ . Neste caso, denotaremos  $f \in C^\alpha(\Omega)$ , se  $\alpha < 1$ , e  $f \in C^{0,1}(\Omega)$  se  $\alpha = 1$ . Além disso, denotamos também

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \quad (9.6)$$

Dizemos que uma função é **localmente contínua de Hölder** com expoente  $\alpha$  em  $\Omega$ , se ela for contínua de Hölder com expoente  $\alpha$  em todo subconjunto compacto de  $\Omega$ .

Em particular, note que se  $f$  é contínua de Hölder com expoente  $\alpha$  em  $\Omega$ , então

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_{C^\alpha(\Omega)} |x - y|^\alpha \quad \text{para todos } x, y \in \Omega. \quad (9.7)$$

Claramente, se uma função é contínua de Hölder em  $\Omega$ , então ela é contínua em  $\Omega$ ; na verdade, ela é uniformemente contínua em  $\Omega$ , o que motiva o nome de *função uniformemente contínua de Hölder* em  $\Omega$ , às vezes usado na literatura. Uma função contínua de Hölder com expoente  $\alpha = 1$  é uma função contínua de Lipschitz. Para os propósitos de provar a existência de solução para o problema de Dirichlet para a equação de Poisson, a definição acima é suficiente. No entanto, para propósitos futuros, principalmente o de estabelecer estimativas a priori para a equação de Poisson com vistas a resolver equações diferenciais parciais elípticas mais gerais (assunto do próximo capítulo), aproveitaremos a oportunidade para desenvolver uma teoria mais detalhada sobre os *espaços de Hölder*.

## 9.2 O Problema de Dirichlet para a Equação de Poisson

Nesta seção, mostraremos que se  $f$  é uma função limitada e localmente contínua de Hölder em um domínio limitado  $\Omega$ , o problema de Dirichlet para a equação de Poisson para este domínio possui uma solução (única,

pelo Princípio do Máximo) sob as mesmas condições de fronteira para as quais o problema de Dirichlet para a equação de Laplace possui solução.

A primeira coisa a fazer será estabelecer os resultados de diferenciabilidade para o potencial newtoniano em domínios limitados. Para isso, usaremos uma *função corte*. O uso de funções corte é uma técnica ubíqua em Análise, como teremos a oportunidade de ver nos próximos capítulos.

**Proposição 9.1.** *Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe uma função  $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1$ ,*

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{se } |x| \geq 2\varepsilon, \end{cases}$$

e

$$\left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

**Prova.** Escolha uma função corte  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  satisfazendo  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $0 \leq \eta' \leq C$  e

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1, \\ 1 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

Defina então

$$\eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right).$$

A função  $\eta$  pode ser construída da seguinte forma (cf. [Lima]). Comece com  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$  definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Em seguida, defina  $\beta(t) = \alpha(t-1)\alpha(-t+2)$ . Em outras palavras,

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1 \text{ e } t \geq 2 \\ e^{\frac{1}{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}} & \text{se } 1 < t < 2. \end{cases}$$

Assim,  $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$  e satisfaz  $\beta = 0$  se  $t \leq 1$  e se  $t \geq 2$ ; o gráfico de  $\beta$  nada mais é que um “pulso” positivo suave no intervalo  $[1, 2]$ . Defina então

$$\eta(t) = \frac{1}{\int_{-\infty}^2 \beta(s) ds} \int_{-\infty}^t \beta(s) ds.$$

É fácil ver que  $\eta$  satisfaz todas as propriedades requeridas. ■

As seguintes estimativas serão usadas nos cálculos subseqüentes: se  $0 < \varepsilon < 1$ , então

$$\int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)| dy = n\omega_n \int_0^\varepsilon |\Gamma(r)| r^{n-1} dr = \begin{cases} \int_0^\varepsilon r |\log r| dr & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{n-2} \int_0^\varepsilon r dr & \text{se } n \geq 3, \end{cases}.$$

de modo que

$$\int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma| dy = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + |\log \varepsilon| \right) \varepsilon^2 & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{2(n-2)} \varepsilon^2 & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (9.8)$$

e, se  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(y) \right| dy \leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{|y| \leq \varepsilon} \frac{1}{|y|^{n-1}} dy = \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{n-1}} r^{n-1} dr,$$

de modo que

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right| dy \leq \varepsilon. \quad (9.9)$$

**Lema 9.2.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Seja  $v$  o potencial newtoniano de  $f$ . Então  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e para todo  $x \in \Omega$  vale*

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) f(y) dy \quad (9.10)$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

**Prova.** Em primeiro lugar, observe que a função

$$w(x) = \int_\Omega \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) f(y) dy \quad (9.11)$$

está bem definida porque, se  $R = R(x) > 0$  é tal que  $\Omega \subset B_R(x)$ , temos

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) f(y) \right| dy \leq R \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Para mostrar que  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e  $\frac{\partial v}{\partial x_i} = w$ , seja  $\eta_\varepsilon$  como na Proposição 9.1. Considere a função

$$v_\varepsilon(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy. \quad (9.12)$$

Claramente,  $v_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e

$$v(x) - v_\varepsilon(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] f(y) dy = \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \Gamma(x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] f(y) dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned} |v(x) - v_\varepsilon(x)| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} |\Gamma(x-y)| dy = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|y| \leq 2\varepsilon} |\Gamma| dy \\ &= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \begin{cases} (1 + 2|\log 2\varepsilon|) \varepsilon^2 & \text{se } n = 2, \\ \frac{2}{n-2} \varepsilon^2 & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto,  $v_\varepsilon \rightarrow v$  uniformemente em  $\mathbb{R}^n$ . Além disso,

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} [\Gamma(x-y) \eta_\varepsilon(x-y)] f(y) dy.$$

de modo que

$$w(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} [\Gamma(x-y) (1 - \eta_\varepsilon(x-y))] f(y) dy = \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} [\Gamma(x-y) (1 - \eta_\varepsilon(x-y))] f(y) dy$$

e daí

$$\begin{aligned} \left| w(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|y| \leq 2\varepsilon} \left( \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right| + |\Gamma| \left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \right) dy \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|y| \leq 2\varepsilon} \left( \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right| + \frac{C}{\varepsilon} |\Gamma| \right) dy \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \begin{cases} 2C(1 + |\log 2\varepsilon|)\varepsilon & \text{se } n = 2, \\ \frac{Cn}{n-2}\varepsilon & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Concluimos que  $v_\varepsilon \rightarrow v$  e  $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow w$  uniformemente em  $\mathbb{R}^n$ , o que implica simultaneamente que  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e  $\frac{\partial v}{\partial x_i} = w$ . ■

**Lema 9.3.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $f \in C_{\text{loc}}^\alpha(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Seja  $v$  o potencial newtoniano de  $f$ . Então  $v \in C^2(\Omega)$ ,*

$$-\Delta v = f \quad \text{em } \Omega, \quad (9.13)$$

e para todo  $x \in \Omega$  vale

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) [f(y) - f(x)] dy + f(x) \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \nu_j ds(y), \quad (9.14)$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ , onde  $\Omega_0$  é qualquer domínio limitado contendo  $\Omega$  para o qual o Teorema da Divergência vale, e  $f$  é estendida valendo 0 fora de  $\Omega$ .

**Prova.** Em primeiro lugar, vamos mostrar que a função

$$w(x) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) [f(y) - f(x)] dy + f(x) \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \nu_j ds(y) \quad (9.15)$$

está bem definida para todo  $x \in \Omega$ . A segunda integral está claramente bem definida, já que o polo da solução fundamental  $x \notin \partial \Omega_0$ . Para estabelecer que a primeira integral está bem definida, usamos as estimativas para as derivadas parciais de segunda ordem da função  $\Gamma$  e que  $f \in C_{\text{loc}}^\alpha(\Omega)$ . De fato, fixando uma bola  $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| |f(y) - f(x)| dy &= \int_{\Omega_0 \setminus B_\varepsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| |f(y) - f(x)| dy \\ &\quad + \int_{B_\varepsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| |f(y) - f(x)| dy. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0 \setminus B_\varepsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| |f(y) - f(x)| dy &\leq 2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right| dy \\ &\leq \frac{2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{\omega_n} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r^n} r^{n-1} dr \\ &= \frac{2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{\omega_n} (\log R - \log \varepsilon), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon(x)} \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) \right| |f(y) - f(x)| dy &\leq \frac{[f]_{C^\alpha(B_\varepsilon(x))}}{\omega_n} \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{1}{|x-y|^n} |x-y|^\alpha dy \\
&\leq n [f]_{C^\alpha(B_\varepsilon(x))} \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{n-\alpha}} r^{n-1} dr \\
&= n [f]_{C^\alpha(B_\varepsilon(x))} \int_0^\varepsilon r^{\alpha-1} dr \\
&= \frac{n}{\alpha} [f]_{C^\alpha(B_\varepsilon(x))} \varepsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Observe como a falta de integrabilidade das derivadas parciais de segunda ordem de  $\Gamma$  na vizinhança do polo foi compensada pela continuidade de Hölder da função  $f$  em uma vizinhança do polo (e não foi necessário exigir continuidade de Hölder global de  $f$  em  $\Omega$ ). A falta de integrabilidade das derivadas parciais de segunda ordem de  $\Gamma$  na vizinhança do polo é o motivo pelo qual não é verdade em geral que  $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Para mostrar que  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = w$ , seja  $\eta_\varepsilon$  como na Proposição 9.1 com  $2\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ . Considere a função

$$z_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy. \quad (9.16)$$

Claramente,  $z_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) - z_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] f(y) dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) - z_\varepsilon(x) \right| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \right| dy = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|y| \leq 2\varepsilon} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right| dy \\
&= 2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \varepsilon,
\end{aligned}$$

logo  $z_\varepsilon \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i}$  uniformemente em  $\mathbb{R}^n$ . Derivando  $z_\varepsilon$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_j}(x) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right] f(y) dy \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right] [f(y) - f(x)] dy + f(x) \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right] dy \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right] [f(y) - f(x)] dy + f(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \nu_j ds(y) \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \right] [f(y) - f(x)] dy + f(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \nu_j ds(y).
\end{aligned}$$

Logo, se  $x \in \Omega$ , temos que

$$w(x) - \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] \right\} [f(y) - f(x)] dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left| w(x) - \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| &\leq [f]_{C^\alpha(B_{2\varepsilon}(x))} \int_{|y| \leq 2\varepsilon} \left( \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right| + \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \right) |y|^\alpha dy \\ &\leq [f]_{C^\alpha(B_{2\varepsilon}(x))} \int_{|y| \leq 2\varepsilon} \left( \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} \right| + \frac{C}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right| \right) |y|^\alpha dy \\ &\leq 2^\alpha \left( \frac{n}{\alpha} + 2C \right) [f]_{C^\alpha(B_{2\varepsilon}(x))} \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Concluimos que  $z_\varepsilon \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_j} \rightarrow w$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $\Omega$ , o que implica simultaneamente (usando o resultado do lema anterior) que  $v \in C^2(\Omega)$  e  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = w$ .

Agora, tomando  $\Omega_0 = B_R(x)$  para algum  $R$  suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) = \int_{B_R(x)} \Delta \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] dy + f(x) \sum_{i=1}^n \int_{\partial B_R(x)} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \nu_i ds(y) \\ &= f(x) \sum_{i=1}^n \int_{\partial B_R(0)} \left( -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y_i}{|y|^n} \right) \frac{y_i}{|y|} ds(y) = -\frac{f(x)}{n\omega_n R^{n+1}} \int_{\partial B_R(0)} \sum_{i=1}^n y_i^2 ds(y) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

■

Na demonstração do Lema 9.3 ficou claro que a necessidade de se considerar  $f$  localmente contínua de Hölder deve-se ao fato das derivadas parciais de segunda ordem da solução fundamental não serem integráveis em uma vizinhança do polo.

**Teorema 9.4.** (Existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado cuja fronteira satisfaz o postulado da barreira,  $f \in C_{\text{loc}}^\alpha(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  e  $g \in C^0(\partial\Omega)$ . Então o problema de Dirichlet para a equação de Poisson*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*possui uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  única.*

**Prova.** Seja  $v$  o potencial newtoniano de  $f$  e  $w$  a solução (Teorema 5.28) de

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = v - g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então  $u = v - w$ . A unicidade já foi estabelecida no Corolário 5.8. ■

### 9.3 Espaços de Hölder

A continuidade de Hölder é uma medida quantitativa de continuidade que é especialmente apropriada para o estudo de equações diferenciais parciais. De um certo modo, ela também pode ser vista como um conceito de diferenciabilidade fracional. Isso sugere uma ampliação dos espaços  $C^k(\Omega)$  de funções diferenciáveis. Lembre-se que se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto, então  $C^k(\Omega)$  denota o espaço vetorial das funções cujas derivadas parciais até a ordem  $k$  (inclusive) são todas contínuas:

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\gamma f \text{ é contínua em } \Omega \text{ para todo } |\gamma| \leq k\}. \quad (9.17)$$

Freqüentemente denotamos o espaço das funções contínuas  $C^0(\Omega)$  simplesmente por  $C(\Omega)$ , e definimos  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$ .

**Definição.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Os **espaços de Hölder**  $C^{k,\alpha}(\Omega)$  são definidos como os subespaços de  $C^k(\Omega)$  consistindo das funções cujas derivadas parciais até a ordem  $k$  (inclusive) são todas contínuas de Hölder com expoente  $\alpha$  em  $\Omega$ :

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \leq k\}. \quad (9.18)$$

Permitindo  $\alpha = 0$ , podemos incluir os espaços  $C^k(\Omega)$  entre os espaços de Hölder:  $C^k(\Omega) = C^{k,0}(\Omega)$ .

Dado um espaço vetorial  $E$ , lembre-se que uma *norma* em  $E$  é uma função  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) (Desigualdade Triangular)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  para todos  $v, w \in E$ ;
- (ii)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$  para todo  $v \in E$  e para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $\|v\| = 0$  se e somente se  $v = 0$ .

Uma função  $[\cdot] : E \rightarrow [0, \infty)$  que satisfaz apenas as duas primeiras propriedades é chamada uma *seminorma*. Por exemplo,  $[f]_{C^\alpha(\Omega)}$  é uma seminorma em  $C^\alpha(\Omega)$ : é fácil ver que as duas primeiras propriedades de uma norma são satisfeitas, mas a terceira propriedade não é satisfeita pois  $[f]_{C^\alpha(\Omega)} = 0$  para toda função constante  $f$ . Um espaço vetorial dotado de uma norma é chamado um *espaço normado*.

Como  $\Omega$  é aberto, funções em  $C^k(\Omega)$  (e suas derivadas) não precisam ser limitadas em  $\Omega$ . Portanto não podemos adotar a norma do sup para transformar  $C^k(\Omega)$  em um espaço normado. Ao invés, lembrando que uma função limitada e uniformemente contínua em  $\Omega$  tem uma única extensão contínua limitada para  $\overline{\Omega}$ , consideraremos o espaço

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\Omega) : D^\gamma f \text{ é limitada e uniformemente contínua em } \Omega \text{ para todo } |\gamma| \leq k\}. \quad (9.19)$$

(Observe que  $C^k(\overline{\mathbb{R}^n}) \neq C^k(\mathbb{R}^n)$ .) Transformamos este espaço vetorial em um espaço normado definindo a norma

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (9.20)$$

Similarmente, definimos

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\overline{\Omega}) : D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \text{ para todo } |\gamma| \leq k\} \quad (9.21)$$

e transformamos  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  em um espaço normado definindo

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma| \leq k} [D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}. \quad (9.22)$$

Novamente, identificamos  $C^k(\overline{\Omega}) = C^{k,0}(\overline{\Omega})$ . Lembrando que um *espaço de Banach* é um espaço normado em que toda seqüência de Cauchy é convergente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 9.5.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Então  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  é um espaço de Banach.*

A demonstração deste resultado fica como exercício (Exercício 9.2).

Agora, observamos que se  $0 < \alpha < \beta \leq 1$  valem as seguintes inclusões:

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \subsetneq C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subsetneq C^k(\overline{\Omega}).$$

Também é claro que

$$C^{k,1}(\overline{\Omega}) \not\subset C^{k+1}(\overline{\Omega}).$$

Em geral também temos  $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \not\subset C^{k,1}(\overline{\Omega})$ , a não ser quando o domínio é convexo, quando podemos aplicar o teorema do valor médio (veja o teorema a seguir e o Exercício 9.4). Podemos caracterizar melhor topologicamente as inclusões lembrando os conceitos de *imersão contínua* e *imersão compacta*:

**Definição.** Seja  $E$  um subespaço vetorial normado de um espaço normado  $F$  (ou seja, a norma em  $E$  não precisa necessariamente ser a norma induzida de  $F$ ). Dizemos que a inclusão  $E \subset F$  é uma **imersão** (contínua) se a aplicação inclusão  $I : E \rightarrow F$  definida por  $Ix = x$  for contínua. Denotamos este fato por

$$E \hookrightarrow F.$$

Se, além disso, a aplicação inclusão for compacta, dizemos que a imersão  $E \hookrightarrow F$  é **compacta**.

Como a aplicação inclusão é linear, o fato de existir uma imersão  $E \hookrightarrow F$  é equivalente à existência de uma constante  $C$  tal que

$$\|x\|_F \leq C \|x\|_E \quad \text{para todo } x \in E. \quad (9.23)$$

Em particular, se  $(x_n)$  é uma seqüência de Cauchy em  $E$ , então  $(x_n)$  também é uma seqüência de Cauchy em  $F$ ; logo, se  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ , então  $x_n \rightarrow x$  em  $F$  também. É claro que se  $E$  tem a norma induzida de  $F$ , então a inclusão  $E \subset F$  é uma imersão, com  $C = 1$ . Quando existe uma imersão  $E \hookrightarrow F$ , dizer que ela é compacta é equivalente a dizer que seqüências limitadas de  $E$  possuem subseqüências convergentes em  $F$  (isto é, na topologia de  $F$ ). A compacidade das imersões de espaços de Hölder definidos em domínios limitados é uma consequência direta do Teorema de Ascoli-Arzelá, como o próximo teorema mostra:

**Teorema 9.6.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Então, para todo  $k$  e para todos  $0 < \alpha < \beta \leq 1$  valem as seguintes imersões:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \quad (9.24)$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \quad (9.25)$$

$$C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \quad (9.26)$$

*Se  $\Omega$  é limitado, então as duas últimas imersões são compactas e se  $\Omega$  é convexo e limitado, todas as três imersões são compactas.*

*Se  $\Omega$  é convexo, valem duas imersões adicionais*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}), \quad (9.27)$$

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad (9.28)$$

*sendo que a última é compacta se  $\Omega$  for também limitado.*

**Prova.** Primeiro vamos estabelecer a existência das cinco imersões. A existência das imersões (9.24) e (9.25) segue das desigualdades óbvias

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})},$$

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Para estabelecer (9.26), observamos que se  $0 < \alpha \leq \beta$ , então

$$|x - y|^\alpha \geq |x - y|^\beta \quad \text{se } 0 < |x - y| \leq 1,$$

e

$$|x - y|^\alpha \geq 1 \quad \text{se } |x - y| \geq 1.$$

Logo, para todo  $|\gamma| \leq k$  temos

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ 0 < |x-y| \leq 1}} \frac{|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)|}{|x-y|^\beta} = [D^\gamma f]_{C^\beta(\Omega)}$$



e

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ |x-y| \geq 1}} \frac{|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq 2 \sup_{\Omega} |D^\gamma f| = 2 \|D^\gamma f\|_{C^0(\overline{\Omega})},$$

donde

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq 3 \|f\|_{C^{k,\beta}(\overline{\Omega})}.$$

Para estabelecer a existência de (9.27) e (9.28), suponha agora que  $\Omega$  é convexo. Seja  $f \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ . Dados  $x, y \in \Omega$  e  $|\gamma| \leq k$ , pelo Teorema do Valor Médio existe um ponto  $z \in \Omega$  no segmento de reta que liga  $x$  e  $y$  tal que

$$D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y) = \nabla D^\gamma f(z) \cdot (x - y).$$

Portanto,

$$|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)| \leq \|f\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})} |x - y|$$

para todos  $x, y \in \Omega$  e para todo  $|\gamma| \leq k$ , o que implica  $f \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$  e

$$\|f\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})}.$$

A imersão (9.28) segue das imersões (9.26) e (9.27).

Vamos agora estabelecer a compacidade das imersões. De agora em diante assuma que  $\Omega$  é limitado.

Mostremos primeiramente que (9.25) é compacta no caso  $k = 0$ . Se  $(f_j)$  é uma seqüência limitada de funções em  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega})$ , então existe  $M > 0$  tal que  $\|f_j\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq M$  para todo  $j$ . Mas então

$$|f_j(x)| \leq M \text{ para todo } x \in \Omega \text{ e para todo } j,$$

o que implica que a seqüência  $(f_j)$  é uniformemente limitada, e

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq M |x - y|^\alpha \text{ para todos } x, y \in \Omega \text{ e para todo } j,$$

o que implica que a seqüência  $(f_j)$  é uniformemente equicontínua. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá,  $(f_j)$  possui uma subseqüência convergente em  $C^0(\overline{\Omega})$ . Isso prova a compacidade de (9.25) no caso  $k = 0$ .

No caso geral, se  $(f_j)$  é uma seqüência limitada de funções em  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ , então em particular  $(f_j)$  é uma seqüência limitada de funções em  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  e portanto possui uma subseqüência convergente em  $C^0(\overline{\Omega})$ , como acabamos de ver, que continuaremos denotando por  $(f_j)$ . Assim, existe  $f \in C^0(\overline{\Omega})$  tal que  $f_j \rightarrow f$  em  $C^0(\overline{\Omega})$ . Mas  $(D^1 f_j)$  também é limitada em  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , logo existe uma subseqüência de  $(f_j)$ , que continuaremos denotando por  $(f_j)$ , tal que  $D^1 f_j \rightarrow f^1$  em  $C^0(\overline{\Omega})$ , para alguma  $f^1 \in C^0(\overline{\Omega})$ . Como a convergência em  $C^0(\overline{\Omega})$  corresponde à convergência uniforme em  $\Omega$ , concluímos que  $f^1 = D^1 f$ . Continuando este processo de extrair subseqüências, concluímos que  $D^\gamma f_j \rightarrow D^\gamma f$  em  $C^0(\overline{\Omega})$  para todo  $|\gamma| \leq k$ . Isso significa que  $f_j \rightarrow f$  em  $C^k(\overline{\Omega})$ , o que estabelece a compacidade de (9.25).

A compacidade de (9.26) segue da compacidade de (9.25). Basta apenas observar o seguinte: se  $(f_j)$  é uma seqüência limitada de funções em  $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ , digamos  $\|f_j\|_{C^{k,\beta}(\overline{\Omega})} \leq M$ , então podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{|D^\gamma f_j(x) - D^\gamma f_j(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \left( \frac{|D^\gamma f_j(x) - D^\gamma f_j(y)|}{|x-y|^\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} |D^\gamma f_j(x) - D^\gamma f_j(y)|^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \\ &\leq M^{\alpha/\beta} |D^\gamma f_j(x) - D^\gamma f_j(y)|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[D^\gamma f_j]_{C^\alpha(\Omega)} \leq 2^{1-\frac{\alpha}{\beta}} M^{\alpha/\beta} \|D^\gamma f_j\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{1-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Por (9.25),  $(f_j)$  possui uma subseqüência convergente em  $C^k(\overline{\Omega})$ . A desigualdade que acabamos de obter implica, então, que cada uma das derivadas parciais desta mesma subseqüência converge em  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Portanto, esta subseqüência converge em  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Finalmente, se  $\Omega$  é convexo é limitado, a compacidade de (9.24) e (9.28) segue respectivamente de compor a imersão contínua (9.27) com as imersões compactas (9.25) e (9.26) para o caso  $\alpha = 1$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} C^{k+1}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \xrightarrow{\text{compacta}} C^k(\overline{\Omega}), \\ C^{k+1}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \xrightarrow{\text{compacta}} C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

■

Agora observamos que o produto de duas funções contínuas de Hölder limitadas ainda é uma função contínua de Hölder (limitada). Portanto, os espaços de Hölder  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  são *álgebras*.

**Proposição 9.7.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Se  $f, g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ , então  $fg \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  e*

$$[fg]_{C^\alpha(\Omega)} \leq \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} [g]_{C^\alpha(\Omega)} + \|g\|_{C^0(\overline{\Omega})} [f]_{C^\alpha(\Omega)}.$$

**Prova.** Temos

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq |f(x)| \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} + |g(y)| \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

■

Uma das mais importantes propriedades dos espaços de Hölder é a desigualdade de interpolação, que torna possível estudar somente o termo mais importante ao derivar uma estimativa a priori, simplificando assim a demonstração. Usamos o argumento de compacidade clássico para a demonstração deste tipo de desigualdade. No que se segue, consideraremos as seminormas

$$[f]_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\gamma|=k} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}, \quad (9.29)$$

$$[f]_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}. \quad (9.30)$$

A norma introduzida anteriormente para os espaços  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  é equivalente à norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{j=0}^k [f]_{C^j(\overline{\Omega})} + [f]_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \quad (9.31)$$

(veja o Exercício 9.5). Em vista disso, usaremos em cada situação a norma que for mais conveniente.

**Teorema 9.8.** (Desigualdade de Interpolação) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $0 \leq \alpha \leq 1$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  vale*

$$[u]_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \quad (9.32)$$

$$[u]_{C^2(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \quad (9.33)$$

para todo  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , com a constante  $C_\varepsilon = C(\varepsilon, n, \alpha, \Omega)$ . Além disso, se  $\Omega$  é convexo, valem também

$$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \quad (9.34)$$

$$[u]_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}. \quad (9.35)$$

**Prova.** Provaremos primeiro (9.33). Se (9.33) não é válida, então para todo  $m \in \mathbb{N}$  existe  $u_m \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que

$$[u_m]_{C^2(\bar{\Omega})} > \varepsilon [u_m]_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} + m \|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})}.$$

Usando a homogeneidade da desigualdade (isto é, se (9.33) é válida para uma função  $v$ , ela continua válida para qualquer múltiplo escalar  $\lambda v$  de  $v$ ), podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})} = 1 \tag{9.36}$$

para todo  $m$ , pois se isso não ocorrer podemos substituir  $u_m$  por  $v_m = u_m / \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ . Como  $[u_m]_{C^2(\bar{\Omega})} \leq \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ , segue que

$$\varepsilon [u_m]_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} + m \|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})} < 1,$$

donde

$$[u_m]_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} < \frac{1}{\varepsilon} \tag{9.37}$$

e

$$\|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})} < \frac{1}{m}. \tag{9.38}$$

De (9.36) e (9.37) concluímos, via a norma equivalente introduzida acima, que a seqüência  $(u_m)$  é limitada em  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Segue então da compacidade da imersão  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$  que existe uma subsequência  $(u_{m_j})$  de  $(u_m)$  tal que  $u_{m_j} \rightarrow u$  em  $C^2(\bar{\Omega})$ ; em particular,  $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} = \lim \|u_{m_j}\|_{C^2(\bar{\Omega})} = 1$ . Por outro lado, de (9.38) concluímos que  $u_m \rightarrow 0$  uniformemente em  $C^0(\bar{\Omega})$ . Isso implica que  $u = 0$ , uma contradição.

A demonstração das outras três desigualdades é análoga, uma vez que observamos que

$$[u_m]_{C^1(\bar{\Omega})} \leq \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})},$$

por definição, e que, se  $\Omega$  é convexo, existe uma constante  $C = C(n, \alpha, \Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} [u_m]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} &\leq C \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})}, \\ [u_m]_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} &\leq C \|u_m\|_{C^2(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Estas duas últimas desigualdades decorrem da continuidade da imersão  $C^2(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ :

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} + [u]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + [Du]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}.$$

■

Uma versão da desigualdade de interpolação para espaços de Hölder de qualquer ordem é apresentada no Exercício 9.9. Para os nossos propósitos de estudar equações elípticas de segunda ordem, a desigualdade de interpolação do Teorema 9.8 será suficiente.

## 9.4 Normas de Hölder via Funções Suavizantes

Outra norma de Hölder equivalente pode ser introduzida através do uso das derivadas das *regularizações* da função. Isto reduzirá o cálculo das estimativas de Hölder de soluções de equações elípticas a estimar as derivadas destas regularizações, que são funções suaves de suporte compacto, o que simplificará as demonstrações.

### 9.4.1 Funções Suavizantes e Regularizações

**Definição.** Uma **função suavizante** é uma função não-negativa  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  com  $\text{supp } \varphi = B_1(0)$  e satisfazendo  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ .

O exemplo típico de função suavizante é a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante  $c$  é escolhida de forma que tenhamos  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ .

**Definição.** Considere  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , a **regularização**  $u_\varepsilon$  de  $u$  é definida como sendo a convolução

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy. \quad (9.39)$$

Observe que  $\text{supp } \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = B_\varepsilon(x)$ . Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto e  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , estendemos  $u$  como valendo 0 fora de  $\Omega$  de forma a aplicar a definição acima, mas mesmo assim a função  $u_\varepsilon$  pode não estar definida para todo  $x \in \Omega$ , já que  $u$  é apenas localmente integrável em  $\Omega$  (o que significa que  $u$  é integrável apenas em vizinhanças compactas de  $\Omega$ ). Para uma tal função, a regularização  $u_\varepsilon$  está definida em  $x \in \Omega$  apenas para aqueles  $\varepsilon$  tais que  $\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ ;  $u_\varepsilon$  não está definida em todo o aberto  $\Omega$  se  $u$  é apenas localmente integrável em  $\Omega$ .

Uma das propriedades principais da regularização  $u_\varepsilon$  de  $u$  é ser uma função suave onde estiver definida. De fato, se  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , dado  $\Omega' \subset\subset \Omega$  e  $0 < \varepsilon < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  temos para qualquer multi-índice  $\gamma$

$$D^\gamma u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} D^\gamma \left[ \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] u(y) dy$$

para todo  $x \in \Omega'$ ; ou seja,  $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega')$ . Assim, se  $u \in L^1(\Omega)$ , de modo que  $u_\varepsilon$  está definida em todo o aberto  $\Omega$  para qualquer  $\varepsilon > 0$ , segue que  $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$  para qualquer  $\varepsilon > 0$ ; se, além disso,  $\Omega$  for limitado, então  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  para qualquer  $\varepsilon > 0$ . Finalmente, se  $\text{supp } u \subset \Omega$  e  $\varepsilon < \text{dist}(\text{supp } u, \partial\Omega)$ , então  $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  também.

A propriedade essencial das regularizações de uma função  $u$ , o que justifica o seu uso, é serem aproximações de  $u$  na topologia natural do espaço em que  $u$  se encontra, como veremos a seguir no caso de espaços de funções contínuas (veja resultados de aproximação para regularizações em espaços  $L^p$  no Capítulo 11; lá elas serão usadas extensivamente no estudo dos *espaços de Sobolev*).

Introduzimos a seguinte fórmula de integração por partes: se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} uv \eta_i - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad (9.40)$$

onde  $\eta$  é o vetor unitário normal apontando para fora de  $\partial\Omega$ . Esta fórmula segue diretamente da fórmula introduzida no Capítulo 5 (consequência do Teorema da Divergência)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} w \eta_i \quad (9.41)$$

tomando  $w = uv$ . Em particular, se  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ , a fórmula de integração por partes assume uma forma mais simples:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}. \quad (9.42)$$

Esta fórmula pode ser iterada para produzir a seguinte fórmula de integração por partes para derivadas parciais  $D^\gamma$  para qualquer multi-índice  $\gamma$ :

$$\int_{\Omega} (D^\gamma u) v = (-1)^{|\gamma|} \int_{\Omega} u (D^\gamma v). \quad (9.43)$$

**Lema 9.9.** *Sejam  $u \in C^k(\Omega)$  e  $\gamma$  um multi-índice tal que  $|\gamma| \leq k$ . Então*

$$D^\gamma u_\varepsilon(x) = (D^\gamma u)_\varepsilon(x). \quad (9.44)$$

para  $\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

**Prova:** Observe que

$$D_x^\gamma \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = (-1)^{|\gamma|} D_y^\gamma \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Derivando sob o sinal de integral, podemos usar a fórmula de integração por partes para obter

$$\begin{aligned} D^\gamma u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} D_x^\gamma \left[ \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] u(y) dy \\ &= \frac{(-1)^{|\gamma|}}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} D_y^\gamma \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D^\gamma u(y) dy \\ &= (D^\gamma u)_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

■

**Proposição 9.10.** (Aproximações em Espaços de Funções Contínuas) *Valem os seguintes resultados de aproximação para as regularizações  $u_\varepsilon$  de uma função  $u$  (todos os limites são tomados quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Seja  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .*

- (1) *Se  $u \in C^0(\Omega)$ , então  $u_\varepsilon$  converge uniformemente para  $u$  em  $\Omega'$ .*
- (2) *Mais geralmente, se  $u \in C^k(\Omega)$ , então  $u_\varepsilon$  converge para  $u$  em  $C^k(\overline{\Omega'})$ .*

**Prova:** Suponha  $u \in C^0(\Omega)$ . Reescrevemos  $u_\varepsilon$  na forma

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy = \int_{B_1(0)} \varphi(z) u(x - \varepsilon z) dz$$

e, usando  $\int_{B_1(0)} \varphi(x) dx = 1$ , observamos que

$$u(x) = \int_{B_1(0)} \varphi(z) u(x) dz.$$

Logo, se  $\Omega' \subset\subset \Omega$  e  $\varepsilon < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)/2$ , segue que

$$\sup_{x \in \Omega'} |u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x \in \Omega'} \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x) - u(x - \varepsilon z)| dz \leq C \sup_{x \in \Omega'} \sup_{z \in B_1(0)} |u(x) - u(x - \varepsilon z)|,$$

onde  $C = \omega_n \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ . Como  $u$  é uniformemente contínua em qualquer vizinhança compacta de  $\Omega'$ , dado  $\eta > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - (x - \varepsilon z)| = \varepsilon < \delta$  então  $|u(x) - u(x - \varepsilon z)| < \eta$  para todo  $x \in \Omega'$ . Portanto,  $u_\varepsilon$  converge uniformemente para  $u$  em  $\Omega'$ .

O caso geral (2) decorre deste caso particular e do lema anterior: para cada multi-índice  $|\gamma| \leq k$  temos  $D^\gamma u \in C^0(\Omega)$ , logo  $(D^\gamma u)_\varepsilon$  converge uniformemente para  $D^\gamma u$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  em  $\Omega'$ ; mas  $(D^\gamma u)_\varepsilon = D^\gamma u_\varepsilon$ , portanto  $D^\gamma u_\varepsilon \rightarrow D^\gamma u$  em  $C^0(\overline{\Omega'})$  para todo multi-índice  $|\gamma| \leq k$ , o que é equivalente a dizer que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $C^k(\overline{\Omega'})$ . ■

### 9.4.2 Regularizações e Normas de Hölder

De agora em diante denotaremos

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u_\varepsilon(x). \quad (9.45)$$

Assim, para um multi-índice  $(n+1)$ -dimensional  $\gamma = (\gamma', k)$ , onde  $\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  é um multi-índice  $n$ -dimensional e  $k \in \mathbb{N}$ , a derivada parcial  $D^\gamma$  de  $\tilde{u}(x, \varepsilon)$  é

$$D^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon) = D_x^{\gamma'} D_\varepsilon^k \tilde{u}(x, \varepsilon) = \frac{\partial^{|\gamma'|+k} \tilde{u}}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n} \partial \varepsilon^k}(x, \varepsilon).$$

**Proposição 9.11.** *Seja  $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$  temos*

$$|\tilde{u}(x, \varepsilon)| \leq \sup_{B_\varepsilon(x)} |u| \quad (9.46)$$

e

$$|D^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{|\gamma|}} \sup_{B_\varepsilon(x)} |u| \quad (9.47)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e para todo multi-índice  $(n+1)$ -dimensional  $\gamma$ , com  $C = C(n, \gamma, \varphi)$ .

**Prova:** (9.46) decorre de

$$|\tilde{u}(x, \varepsilon)| \leq \sup_{B_\varepsilon(x)} |u| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \sup_{B_\varepsilon(x)} |u| \int_{B_1(0)} \varphi(z) dz = \sup_{B_\varepsilon(x)} |u|.$$

Para provar (9.47), denotando  $\gamma = (\gamma', k)$  escrevemos

$$\begin{aligned} D^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon) &= D_\varepsilon^k D_x^{\gamma'} \tilde{u}(x, \varepsilon) = D_\varepsilon^k \left[ \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\gamma'} \left[ \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] u(y) dy \right] \\ &= D_\varepsilon^k \left[ \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \right] \\ &= D_\varepsilon^k \left( \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \right) \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy + \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{\mathbb{R}^n} D_\varepsilon^k \left[ D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] u(y) dy. \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da última igualdade é facilmente estimado. Temos

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^k \left( \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \right) \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy &= \frac{c_{n,\gamma}}{\varepsilon^{n+|\gamma'|+k}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{c}{\varepsilon^{|\gamma'|+k}} \int_{B_1(0)} D^{\gamma'} \varphi(z) u(x - \varepsilon z) dz, \end{aligned}$$

onde  $c_{n,\gamma} \in \mathbb{Z}$  depende de  $n, \gamma$ , de modo que se escolhermos

$$C_1 = c_{n,\gamma} \int_{B_1(0)} |D^{\gamma'} \varphi(z)| dz,$$

teremos, notando que  $|\gamma| = |\gamma'| + k$ ,

$$\left| D_\varepsilon^k \left( \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \right) \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \right| \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{|\gamma|}} \sup_{B_\varepsilon(x)} |u|. \quad (9.48)$$

Para estimar o segundo termo, note que

$$D_\varepsilon^k \left[ D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] = \frac{(-1)^k}{\varepsilon^k} P_k \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \quad (9.49)$$

para alguma função  $P_k \in C_0^\infty(B_1(0))$  definida a partir de  $\varphi$  e  $\gamma$ . Isso pode ser visto por indução. Temos

$$D_\varepsilon^1 \left[ D_x^{\gamma'} \varphi \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] = \nabla \left( D_x^{\gamma'} \varphi \right) \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \cdot \left( -\frac{x-y}{\varepsilon^2} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \left( D_x^{\gamma'} \varphi \right) \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \cdot \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right),$$

de modo que

$$P_1(z) = \nabla \left( D_x^{\gamma'} \varphi \right) (z) \cdot z.$$

Para o próximo passo, observe que

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^2 \left[ D_x^{\gamma'} \varphi \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] &= -D_\varepsilon^1 \left[ \frac{1}{\varepsilon} P_1 \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} P_1 \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla P_1 \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \cdot \left( -\frac{x-y}{\varepsilon^2} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ P_1 \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) + \nabla P_1 \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \cdot \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right], \end{aligned}$$

e definimos

$$P_2(z) = P_1(z) + \nabla P_1(z) \cdot z.$$

Prosseguindo desta forma, definimos em cada passo  $P_j(z) = c_j P_{j-1}(z) + \nabla P_{j-1}(z) \cdot z$  que depende apenas de  $j$ ,  $\gamma'$  e  $\varphi$ . Porque  $P_{j-1} \in C_0^\infty(B_1(0))$ , temos  $P_j \in C_0^\infty(B_1(0))$  também. Portanto, usando (9.49) podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{\mathbb{R}^n} D_\varepsilon^k \left[ D_x^{\gamma'} \varphi \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] u(y) dy &= \frac{(-1)^k}{\varepsilon^{n+|\gamma'|+k}} \int_{B_\varepsilon(x)} P_k \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) u(y) dy \\ &= \frac{(-1)^k}{\varepsilon^{|\gamma'|}} \int_{B_1(0)} P_k(z) u(x - \varepsilon z) dz, \end{aligned}$$

de modo que se tomarmos

$$C_2 = \int_{B_1(0)} |P_k(z)| dz,$$

teremos

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{\mathbb{R}^n} D_\varepsilon^k \left[ D_x^{\gamma'} \varphi \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) \right] u(y) dy \right| \leq \frac{C_2}{\varepsilon^{|\gamma'|}} \sup_{B_\varepsilon(x)} |u|. \quad (9.50)$$

Reunindo (9.48) e (9.50), obtemos a desigualdade (9.47). ■

Agora vamos ver a relação entre as derivadas da regularização  $u_\varepsilon$  e a norma de Hölder de  $u$ . Para os próximos resultados, introduzimos a notação

$$[u]_{C^\alpha(x;\Omega)} = \sup_{y \in \Omega \setminus \{x\}} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\alpha} \quad (9.51)$$

quando o lado direito for finito; neste caso, dizemos que  $u$  é **contínua de Hölder em  $x$  com respeito a  $\Omega$** . Observe que se  $u$  é contínua de Hölder em  $\Omega$  no sentido usual, então

$$[u]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} [u]_{C^\alpha(x;\Omega)}.$$

**Proposição 9.12.** *Seja  $u \in C_{\text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Então,*

$$|\tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x)| \leq \varepsilon^\alpha [u]_{C^\alpha(x;B_\varepsilon(x))} \quad (9.52)$$

e

$$|D^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{|\gamma|-\alpha}} [u]_{C^\alpha(x;B_\varepsilon(x))} \quad (9.53)$$

para todo multi-índice  $(n+1)$ -dimensional  $\gamma$ , com  $C = C(n, \alpha, \gamma, \varphi)$ .

**Prova:** Para obter a primeira desigualdade, usando  $\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = 1$  escrevemos

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u(y) - u(x)] dy, \quad (9.54)$$

de modo que

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |u(x) - u(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u]_{C^\alpha(x; B_\varepsilon(x))} |x-y|^\alpha dy \\ &\leq \varepsilon^\alpha [u]_{C^\alpha(x; B_\varepsilon(x))} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \varepsilon^\alpha [u]_{C^\alpha(x; B_\varepsilon(x))}. \end{aligned}$$

Para obter a segunda desigualdade, seja  $\gamma = (\gamma', k)$ . Se  $\gamma' \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} D^{\gamma'} \tilde{u}(x, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} D^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} D_x^{\gamma'} \left[ \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] [u(y) - u(x)] dy + \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} D_x^{\gamma'} \left[ \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] dy. \end{aligned}$$

Mas, como vimos na demonstração do Lema 9.9, e usando a fórmula de integração por partes (considerando o integrando como o produto da derivada  $D_y^{\gamma'}$  da função  $\varphi$  que tem suporte compacto em  $B_\varepsilon(x)$  pela função identicamente 1), temos

$$\int_{B_\varepsilon(x)} D_x^{\gamma'} \left[ \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] dy = (-1)^{|\gamma'|} \int_{B_\varepsilon(x)} D_y^{\gamma'} \left[ \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right] dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D_y^{\gamma'} [1] dy = 0,$$

de modo que obtemos

$$D^{\gamma'} \tilde{u}(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{B_\varepsilon(x)} D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u(y) - u(x)] dy.$$

Assim, como na demonstração da proposição anterior, para alguma função  $P_k \in C_0^\infty(B_1(0))$  temos

$$\begin{aligned} D^{\gamma'} \tilde{u}(x, \varepsilon) &= D_\varepsilon^k \left\{ \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{B_\varepsilon(x)} D_x^{\gamma'} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u(y) - u(x)] dy \right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{B_\varepsilon(x)} P_k\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u(y) - u(x)] dy, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} |D^{\gamma'} \tilde{u}(x, \varepsilon)| &\leq [u]_{C^\alpha(x; B_\varepsilon(x))} \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma'|}} \int_{B_\varepsilon(x)} \left| P_k\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right| |y-x|^\alpha dy \\ &\leq [u]_{C^\alpha(x; B_\varepsilon(x))} \frac{1}{\varepsilon^{|\gamma|-\alpha}} \int_{B_1(0)} |P_k(z)| dz \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Para os próximos resultados, observamos que  $D$  denota o gradiente (isto é,  $D = \nabla$ , usando um símbolo mais usual) em relação a todas as variáveis  $x_1, \dots, x_n, \varepsilon$ ;  $D_x$  denota o gradiente apenas em relação às variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , e  $D_\varepsilon$  o gradiente em relação à variável  $\varepsilon$ , isto é, simplesmente a derivada parcial  $D_\varepsilon^1$ .



**Proposição 9.13.** *Seja  $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ . Se*

$$\sup_{\substack{z \in B_R(x) \\ 0 < \varepsilon \leq R}} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D\tilde{u}(z, \varepsilon)|\} < \infty$$

para algum  $0 < \alpha \leq 1$ , então  $u$  é contínua de Hölder em  $x$  com respeito a  $B_R(x)$  e

$$[u]_{C^\alpha(x, B_R(x))} \leq C \sup_{\substack{z \in B_R(x) \\ 0 < \varepsilon \leq R}} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D\tilde{u}(z, \varepsilon)|\} \quad (9.55)$$

com  $C = C(n, \alpha, \varphi)$ .

**Prova:** Para  $0 < \varepsilon \leq R$  e para  $|y - x| < R$ , escreva

$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - \tilde{u}(y, \varepsilon)| + |\tilde{u}(y, \varepsilon) - \tilde{u}(x, \varepsilon)| + |\tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x)|.$$

Considere a função

$$g(t) = \tilde{u}(x, \varepsilon t).$$

Em vista da Proposição 9.10, podemos definir  $g(0) = u(x)$  e obter, para  $0 < \varepsilon \leq R$ ,

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} [g(t)] dt \right| = \varepsilon \left| \int_0^1 D_\varepsilon \tilde{u}(x, \varepsilon t) dt \right| = \varepsilon^\alpha \left| \int_0^1 (t\varepsilon)^{1-\alpha} \frac{1}{t^{1-\alpha}} D_\varepsilon \tilde{u}(x, \varepsilon t) dt \right| \\ &\leq \varepsilon^\alpha \sup_{0 < \varepsilon \leq R} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D_\varepsilon \tilde{u}(x, \varepsilon)|\} \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} \sup_{0 < \varepsilon \leq R} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D_\varepsilon \tilde{u}(x, \varepsilon)|\}. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto  $\xi$  no segmento que liga  $x$  a  $y$  tal que

$$\tilde{u}(y, \varepsilon) - \tilde{u}(x, \varepsilon) = D_x \tilde{u}(\xi, \varepsilon) \cdot (y - x).$$

Portanto,

$$|u(y) - u(x)| \leq \frac{2\varepsilon^\alpha}{\alpha} \sup_{\substack{z \in B_R(x) \\ 0 < \varepsilon \leq R}} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D_\varepsilon \tilde{u}(z, \varepsilon)|\} + |D_x \tilde{u}(\xi, \varepsilon)| |y - x|.$$

Tomando  $\varepsilon = |y - x|$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\alpha} &\leq \frac{2}{\alpha} \sup_{\substack{z \in B_R(x) \\ 0 < \varepsilon \leq R}} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D_\varepsilon \tilde{u}(z, \varepsilon)|\} + \varepsilon^{1-\alpha} |D_x \tilde{u}(\xi, \varepsilon)| \\ &\leq \left( \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \sup_{\substack{z \in B_R(x) \\ 0 < \varepsilon \leq R}} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D\tilde{u}(z, \varepsilon)|\}. \end{aligned}$$

■

Finalmente, estamos em condições de provar a seguinte “equivalência” entre a norma de Hölder de  $u$  e as normas de Hölder das derivadas das regularizações de  $u$ :

**Corolário 9.14.** *Existe uma constante  $C = C(n, \alpha, \varphi)$  tal que*

$$\frac{1}{C} [u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \varepsilon > 0}} \{\varepsilon^{1-\alpha} |D\tilde{u}(x, \varepsilon)|\} \leq C [u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \quad (9.56)$$

para todo  $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ .

Além disso, se  $u \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ , para todo multi-índice  $n$ -dimensional  $\gamma$  com  $|\gamma| \leq k-1$ , existe uma constante  $C = C(n, \alpha, \gamma, \varphi)$  tal que

$$\frac{1}{C} [D^{\gamma+1}u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{\varepsilon>0} [DD_x^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon)]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}^x \leq C [D^{\gamma+1}u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}, \quad (9.57)$$

onde  $D^{\gamma+1} = DD^\gamma$  e  $[\cdot]_{C^\alpha}^x$  denota a norma de Hölder em  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Prova:** Vamos provar (9.56). A primeira desigualdade decorre diretamente da Proposição 9.13. Para provar a segunda, pela Proposição 9.12 temos

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \varepsilon > 0}} \{ \varepsilon^{1-\alpha} |D\tilde{u}(x, \varepsilon)| \} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \varepsilon > 0}} \varepsilon^{1-\alpha} \frac{C}{\varepsilon^{1-\alpha}} [u]_{C^\alpha(x; \Omega)} = C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [u]_{C^\alpha(x; \Omega)} = C [u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Para provar a primeira desigualdade de (9.57), note que para todo  $\varepsilon > 0$  temos

$$\frac{|D^{\gamma+1}u_\varepsilon(y) - D^{\gamma+1}u_\varepsilon(x)|}{|y-x|^\alpha} \leq \sup_{\varepsilon>0} [D^{\gamma+1}u_\varepsilon]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\varepsilon>0} [DD_x^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon)]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)};$$

logo, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  no lado esquerdo, obtemos

$$[D^{\gamma+1}u]_{C^\alpha(x, \mathbb{R}^n)} \leq \sup_{\varepsilon>0} [D^{\gamma+1}u_\varepsilon]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Para provar a segunda desigualdade de (9.57), vamos estimar

$$|DD_x^\gamma \tilde{u}(y, \varepsilon) - DD_x^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon)|.$$

Denote  $y = x + h$  e defina

$$v_h(x) = u(x+h).$$

Observe que  $D^\gamma v_h(x) = D^\gamma u(y)$  e

$$\begin{aligned} \tilde{v}_h(x, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) v_h(z) dz = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) u(z+h) dz = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{y-w}{\varepsilon}\right) u(w) dw \\ &= \tilde{u}(y, \varepsilon). \end{aligned}$$

Usando o Lema 9.9 e a segunda desigualdade da Proposição 9.12 (tomando todos os multi-índices  $\gamma$  de lá com  $|\gamma| = 1$  e  $\alpha = 1$ ), obtemos

$$\begin{aligned} |DD_x^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon) - DD_x^\gamma \tilde{u}(y, \varepsilon)| &= |DD_x^\gamma (\tilde{u}(y, \varepsilon) - \tilde{u}(x, \varepsilon))| = \left| DD_x^\gamma \left( \widetilde{u - v_h}(x, \varepsilon) \right) \right| \\ &= \left| D \left[ D^\gamma \left( \widetilde{u - v_h} \right) \right] (x, \varepsilon) \right|. \end{aligned}$$

Note agora que se na segunda desigualdade da Proposição 9.12 tomarmos todos os multi-índices  $(n+1)$ -dimensionais  $\gamma$  de lá com  $|\gamma| = 1$  e escolhermos  $\alpha = 1$ , podemos escrever para qualquer função  $w \in C_{\text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}^n)$

$$|D\tilde{w}(x, \varepsilon)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{1-1}} [w]_{C^{0,1}(x; B_\varepsilon(x))} \leq C [w]_{C^{0,1}(x; B_\varepsilon(x))} \leq C [w]_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto, temos

$$|DD_x^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon) - DD_x^\gamma \tilde{u}(y, \varepsilon)| \leq C [D^\gamma (u - v_h)]_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (9.58)$$

Por outro lado, pela demonstração do Teorema 9.6 (desigualdade do valor médio) existe uma constante  $C$  tal que

$$[D^\gamma(u - v_h)]_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D^{\gamma+1}(u - v_h)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = C \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} |D^{\gamma+1}u(x) - D^{\gamma+1}u(y)|.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} [DD_x^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon)]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}^x &= \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \frac{|DD_x^\gamma \tilde{u}(x, \varepsilon) - DD_x^\gamma \tilde{u}(y, \varepsilon)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq C \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \frac{|D^{\gamma+1}u(x) - D^{\gamma+1}u(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= C [D^{\gamma+1}u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. ■

## 9.5 Estimativas $C^{2,\alpha}$ para Soluções da Equação de Poisson

Agora usaremos os resultados da seção anterior para obter estimativas  $C^{2,\alpha}$  para soluções da equação de Poisson. Primeiro, obteremos um resultado auxiliar que limita a derivada primeira de soluções da equação de Poisson em cada ponto em função do comportamento da solução em qualquer esfera ao redor deste ponto e em função do raio desta esfera.

**Definição.** Seja  $u$  uma função definida em um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . A **oscilação** de  $u$  em  $\Omega$  é definida por

$$\text{osc}_\Omega u = \sup_\Omega |u(x) - u(y)|. \quad (9.59)$$

Como o nome indica, a oscilação de uma função em um conjunto mede a maior diferença de valores que a função alcança no conjunto, que é a oscilação máxima alcançada.

**Lema 9.15.** *Suponha que  $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  e que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  é uma solução para a equação de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Então, para todo  $R > 0$  temos

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{n}{R} \text{osc}_{B_R(x)} u + R \sup_{B_R(x)} |f|. \quad (9.60)$$

**Prova:** No que se segue, todas as bolas têm centro em  $x$ . Lembre-se que se  $w \in C^1(\overline{B_R})$ , para todo  $0 < r \leq R$  vale

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} w \right] = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} \frac{\partial w}{\partial r}$$

(veja a demonstração da Proposição 5.3). Assim, como pelo Teorema da Divergência (fórmula de Green)

$$\int_{B_r} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \int_{\partial B_r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = r^{n-1} \left[ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right],$$

obtemos

$$\int_{B_r} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]. \quad (9.61)$$

Por outro lado, usando (9.41),

$$\int_{B_r} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \int_{B_r} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta u) = \int_{\partial B_r} \Delta u \nu_i,$$

donde

$$\int_{B_r} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = - \int_{\partial B_r} f \nu_i. \quad (9.62)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] = - \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} f \nu_i,$$

donde

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] \right| \leq n \omega_n \sup_{B_R} |f| \quad (9.63)$$

ou

$$-n \omega_n \sup_{B_R} |f| \leq \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] \leq n \omega_n \sup_{B_R} |f|.$$

Integrando esta desigualdade em  $[0, r]$ , lembrando que pelo Teorema do Valor Médio para Integrais

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{n \omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} (0),$$

segue que

$$\left| \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial x_i} - n \omega_n \frac{\partial u}{\partial x_i} (x) \right| \leq n \omega_n r \sup_{B_R(0)} |f|. \quad (9.64)$$

Multiplicando esta desigualdade por  $r^{n-1}$  e integrando em  $[0, R]$ , segue que

$$\left| \int_{B_R} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \omega_n R^n \frac{\partial u}{\partial x_i} (x) \right| \leq \omega_n R^{n+1} \sup_{B_R(0)} |f| \quad (9.65)$$

pois  $\frac{n}{n+1} < 1$ . Daí,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} (0) \right| \leq \left| \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| + R \sup_{B_R(0)} |f|. \quad (9.66)$$

Como

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| &= \left| \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R} \frac{\partial}{\partial x_i} (u - u(x)) \right| = \left| \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R} (u - u(x)) \nu_i \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R} |u - u(x)| \\ &\leq \frac{n}{R} \operatorname{osc}_{B_R} u, \end{aligned}$$

isso termina a demonstração. ■

**Teorema 9.16.** *Suponha que  $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^n)$  e que  $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , é uma solução para a equação de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

*Então, existe uma constante  $C = C(n, \alpha)$  tal que*

$$[D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}. \quad (9.67)$$

**Prova:** Fixe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e seja  $g(x) = f(x) - f(x_0)$ . Observe que

$$\sup_{x \in B_R(x_0)} |g(x)| \leq \sup_{x \in B_R(x_0)} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} |x - x_0|^\alpha \leq R^\alpha [f]_{C^\alpha(x_0, B_R(x_0))},$$

logo

$$\sup_{x \in B_R(x_0)} |g(x)| \leq R^\alpha [f]_{C^\alpha(B_R(x_0))}. \quad (9.68)$$

A equação pode ser reescrita na forma

$$-\Delta u - f(x_0) = g. \quad (9.69)$$

Regularizando esta equação, ela é transformada na equação

$$-\Delta u_\varepsilon - f(x_0) = g_\varepsilon \quad (9.70)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

Derivando esta equação duas vezes com respeito a  $x$  e  $\varepsilon$ , obtemos

$$-\Delta D^2 \tilde{u}(x, \varepsilon) = D^2 \tilde{g}(x, \varepsilon).$$

Tomando  $D^2 = DD_x$ , o lema anterior nos dá

$$\begin{aligned} |DD_x^2 \tilde{u}(x_0, \varepsilon)| &\leq C \left[ \frac{1}{R} \operatorname{osc}_{B_R(x_0)} DD_x \tilde{u}(x, \varepsilon) + R \sup_{B_R(x_0)} |D^2 \tilde{g}| \right] \\ &\leq C \left[ \frac{1}{R^{1-\alpha}} [DD_x \tilde{u}]_{C^\alpha(B_R(x_0))}^x + R \sup_{B_R(x_0)} |D^2 \tilde{g}| \right]. \end{aligned}$$

Daí, para  $0 < \varepsilon \leq R$ , pela Proposição 9.11 e pelo Corolário 9.14 temos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1-\alpha} |DD_x^2 \tilde{u}(x_0, \varepsilon)| &\leq C \left[ \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{R^{1-\alpha}} [DD_x \tilde{u}]_{C^\alpha(B_R(x_0))}^x + R \varepsilon^{1-\alpha} \sup_{B_R(x_0)} |D^2 \tilde{g}| \right] \\ &\leq C \left[ \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{R^{1-\alpha}} [D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} + R \varepsilon^{-1-\alpha} \sup_{B_{R+\varepsilon}(x_0)} |g| \right]. \end{aligned}$$

Tome  $R = N\varepsilon$ , onde  $N$  será um número suficientemente grande a ser determinado. Usando (9.68),

$$\varepsilon^{1-\alpha} |DD_x^2 \tilde{u}(x_0, \varepsilon)| \leq C \left[ \frac{1}{N^{1-\alpha}} [D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} + N^{1+\alpha} [f]_{C^\alpha(B_R(x_0))} \right]$$

Segue do Corolário 9.14 que

$$[D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C \sup_{\substack{x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \varepsilon > 0}} \varepsilon^{1-\alpha} |DD_x^2 \tilde{u}(x_0, \varepsilon)| \leq C \left[ \frac{1}{N^{1-\alpha}} [D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} + N^{1+\alpha} [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \right].$$

Tomando  $N$  suficientemente grande para que  $C/N^{1-\alpha} = 1/2$ , por exemplo, temos

$$[D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq 2CN^{1+\alpha} [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

■

Resta provar que de fato as soluções da equação de Poisson estão em  $C^{2,\alpha}$ . Este é o chamado Teorema de Kellogg. Embora isso possa ser feito através da teoria clássica via estimativas do potencial newtoniano (como o próprio Kellogg fez, em 1931), não tentaremos fazer isso aqui. A demonstração será dada mais tarde utilizando métodos variacionais e teoria da regularidade de soluções de equações elípticas. Por hora, vamos admitir o resultado e usá-lo no próximo capítulo para obter resultados sobre a existência de soluções para equações elípticas (uma demonstração clássica para o Teorema de Kellogg em bolas é dada em [Gilbarg-Trudinger], Corolário 4.14).

**Teorema 9.17.** (Teorema de Kellogg) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado de classe  $C^{2,\alpha}$ . Sejam  $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  e  $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Então o problema de Dirichlet para a equação de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*possui uma única solução  $u$  de classe  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .*

## 9.6 Exercícios

**Exercício 9.1.** [Gilbarg-Trudinger] *Para um multi-índice  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = 2$ , seja  $P$  um polinômio harmônico de grau 2 tal que  $D^\alpha P \neq 0$  (por exemplo, se  $\alpha = (1, 2)$ , tome  $P = x_1 x_2$  de modo que  $D^\alpha P = 1$ ). Seja  $\eta \in C_0^\infty(B_2(0))$  com  $\eta \equiv 1$  em  $B_1(0)$ . Escolha uma seqüência  $\{c_k\}$  tal que  $\lim c_k = 0$  mas que  $\sum c_k$  diverge (por exemplo,  $c_k = 1/k$ ). Defina*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Delta(\eta P)(2^k x).$$

*Mostre que  $f$  é contínua mas que  $\Delta u = f$  não tem uma solução de classe  $C^2$  em nenhuma vizinhança da origem.*

**Exercício 9.2.** *Prove o Teorema 9.5.*

**Exercício 9.3.** [Gilbarg-Trudinger] *Prove que se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,  $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  e  $g \in C^\beta(\overline{\Omega})$ , então  $fg \in C^\gamma(\overline{\Omega})$  onde  $\gamma = \min(\alpha, \beta)$  e*

$$\|fg\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})} \leq \max(1, (\text{diam } \Omega)^{\alpha+\beta-2\gamma}) \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \|g\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}.$$

**Exercício 9.4.** *Mostre que a seguinte norma em  $C^k(\overline{\Omega})$  é equivalente à norma definida no texto:*

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

*Conclua que uma norma equivalente em  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  pode ser escrita na forma*

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|\gamma| \leq k} [D^\gamma u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}. \quad (9.71)$$

*Em particular,*

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = & \left( \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{C^0(\overline{\Omega})} \right) \\ & + \left( [u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \sum_{i,j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \right). \end{aligned}$$

**Exercício 9.5.** *Prove que a seguinte norma em  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  é equivalente à norma definida no texto:*

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}.$$

**Exercício 9.6.** *Faz sentido (isto é, vale a pena) definir espaços de Hölder  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  para  $\alpha > 1$ ?*

**Exercício 9.7.** *Mostre que (9.28) falha se  $\Omega$  não é convexo, considerando o domínio em forma de cúspide*

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|^{1/2} \text{ e } x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

e, para  $1 < \beta < 2$ , a função

$$f(x, y) = \begin{cases} (\operatorname{sgn} x)y^\beta & \text{se } y > 0, \\ 0 & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

Observe que  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ , mas se  $\beta/2 < \alpha < 1$  então  $f \notin C^\alpha(\bar{\Omega})$ , logo  $C^1(\bar{\Omega}) \not\subset C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

**Exercício 9.8.** *Em geral, mostre que*

$$C^{k,\beta}(\bar{\Omega}) \subsetneq C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subsetneq C^k(\bar{\Omega}),$$

$$C^{k,1}(\bar{\Omega}) \not\subset C^{k+1}(\bar{\Omega}),$$

e que podemos ter

$$C^{k+1}(\bar{\Omega}) \not\subset C^{k,1}(\bar{\Omega})$$

se  $\Omega$  não for convexo.

**Exercício 9.9.** (Desigualdade de Interpolação) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto convexo limitado. Se  $j + \beta < k + \alpha$ , com  $j, k = 0, 1, 2, \dots$  e  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  vale*

$$[u]_{C^{j,\beta}(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon [u]_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})},$$

para todo  $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ , com a constante  $C_\varepsilon = C(\varepsilon, n, k, j, \alpha, \beta, \Omega)$ .

**Exercício 9.10.** *Verifique que não é necessário assumir que  $\Omega$  seja convexo para que as conclusões do Teorema 9.6 correspondentes a esta hipótese sejam válidas, mas apenas que todo par de pontos  $x, y \in \Omega$  possa ser ligado por um arco retificável em  $\Omega$  tendo comprimento não excedendo a algum múltiplo fixo de  $|x - y|$  (ou seja, um múltiplo independente de  $x, y \in \Omega$ ).*

**Exercício 9.11.** *Tente provar diretamente a partir da definição do potencial newtoniano as seguintes estimativas  $C^{2,\alpha}$  para soluções da equação de Poisson (veja [Jost]).*

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e seja  $v$  o potencial newtoniano de  $f$ . Então existem constantes  $C = C(n, \alpha, \Omega)$  tais que

(i) *se  $f \in L^\infty(\Omega)$ , então  $v \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  para qualquer  $0 < \alpha < 1$  e*

$$\|v\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)};$$

(ii) *se  $f \in C_0^\alpha(\Omega)$ , então  $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  para qualquer  $0 < \alpha < 1$  e*

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^\alpha(\Omega)}.$$

**Exercício 9.12.** *Modifique um dos passos da demonstração do Lema 9.15 para provar o seguinte resultado (compare com a Proposição 5.22):*

*Suponha que  $f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$  e que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  é uma solução para a equação de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

*Então, para todo  $R > 0$  temos*

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x)} |u| + R \sup_{B_R(x)} |f|. \quad (9.72)$$

**Exercício 9.13.** Prove os seguintes resultados de aproximação para regularizações de funções nos espaços de Hölder  $C^{k,\alpha}$ .

- (1) Se  $u \in C^\alpha(\Omega)$ , então  $u_\varepsilon$  converge para  $u$  em  $C^\alpha(\overline{\Omega'})$ .
- (2) Mais geralmente, se  $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ , então  $u_\varepsilon$  converge para  $u$  em  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega'})$ .



# Capítulo 10

## Teoria de Schauder

Através de transformações lineares de coordenadas, a existência de soluções para a equação de Poisson  $\Delta u = f$ , com  $f$  em algum espaço de Hölder, pode ser facilmente estendida para operadores elípticos com coeficientes constantes. Em 1934-35, Schauder teve sucesso em estender estes resultados para obter soluções de equações elípticas  $Lu = f$  com coeficientes em algum espaço de Hölder ao considerar um tal operador  $L$  como uma perturbação local de um operador com coeficientes constantes. O *método da continuidade* reduz a solução da equação

$$Lu = f$$

à solução da equação de Poisson

$$\Delta u = f$$

através de considerar os operadores

$$L_t = tL + (1-t)\Delta$$

para  $0 \leq t \leq 1$ , mostrando que o conjunto dos  $t \in [0, 1]$  para os quais

$$L_t u = f$$

tem solução é aberto e fechado (ele é não-vazio porque a equação de Poisson pode ser resolvida). A prova de que este conjunto é fechado depende das estimativas globais de Schauder.

Ao longo deste capítulo, consideraremos operadores elípticos

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x)$$

definidos em um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , que satisfazem as seguintes hipóteses:

(H1)  $L$  é estritamente elíptico:

Existem constantes  $0 < \lambda \leq \Lambda$  tais que

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \tag{10.1}$$

para todo  $x \in \Omega$  e para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

(H2)  $L$  possui coeficientes em  $C^\alpha(\overline{\Omega})$ :

$a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ , de modo que existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$\|a_{ij}\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, \|b_i\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, \|c\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq M \tag{10.2}$$

para todos  $i, j = 1, \dots, n$ .

## 10.1 Estimativas a priori para Soluções de Equações Elípticas com Coeficientes Constantes

Antes de estudar a equação elíptica geral com coeficientes variáveis, precisaremos estender as estimativas a priori para a equação de Poisson, obtidas no capítulo anterior, para equações elípticas com coeficientes constantes. Considere o operador estritamente elíptico com coeficientes constantes

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad (10.3)$$

onde  $a_{ij} = a_{ji}$  e

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \quad (10.4)$$

para algumas constantes positivas  $\lambda, \Lambda$  (podemos assumir que  $\lambda$  é o menor autovalor e  $\Lambda$  o maior autovalor da matriz simétrica  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ).

**Teorema 10.1.** *Seja  $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , uma solução de*

$$-L_0 u = f \quad (10.5)$$

onde  $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^n)$ . Então

$$[D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{\lambda} [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}, \quad (10.6)$$

onde  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda)$ .

**Prova.** Denote por  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  a matriz simétrica associada ao operador  $L_0$  e seja  $\mathbf{P}$  uma matriz ortogonal tal que  $\mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D}$  é uma matriz diagonal; os elementos na diagonal principal de  $\mathbf{D}$  são os autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $\mathbf{A}$ . Afirmamos que no sistema de coordenadas

$$y = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t x$$

o operador elíptico  $L_0$  transforma-se no operador laplaciano, ou seja, definindo

$$\begin{aligned} v(y) &= u(x) = u(\mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} y), \\ g(y) &= f(x) = f(\mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} y), \end{aligned}$$

temos que  $v$  satisfaz a equação de Poisson:

$$-\Delta v = g. \quad (10.7)$$

De fato, como  $u(x) = v(\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t x)$ , segue da regra da cadeia que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t x) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t x) \lambda_k^{-1/2} p_{ik},$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial v}{\partial y_k}(\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t x) \right] \lambda_k^{-1/2} p_{ik} = \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t x) \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right] \lambda_k^{-1/2} p_{ik} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \lambda_k^{-1/2} \lambda_l^{-1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y) p_{ik} p_{jl}. \end{aligned}$$

Assim,

$$L_0 u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{i,j,k,l=1}^n \lambda_k^{-1/2} \lambda_l^{-1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y) p_{ik} a_{ij} p_{jl}.$$

Notando que

$$(\mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{P})_{kl} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}^t)_{ki} (\mathbf{A} \mathbf{P})_{il} = \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{P}^t)_{ki} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{P}_{jl} = \sum_{i,j=1}^n p_{ik} a_{ij} p_{jl}$$

e que

$$(\mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{P})_{kl} = \mathbf{D}_{kl} = \lambda_k \delta_{kl},$$

obtemos

$$\begin{aligned} L_0 u(x) &= \sum_{k,l=1}^n \lambda_k^{-1/2} \lambda_l^{-1/2} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y) \sum_{i,j=1}^n p_{ik} a_{ij} p_{jl} = \sum_{k,l=1}^n \lambda_k^{-1/2} \lambda_l^{-1/2} \lambda_k \delta_{kl} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_k^2}(y) \\ &= \Delta v(y). \end{aligned}$$

Este resultado também poderia ter sido obtido de forma mais imediata raciocinando da seguinte forma: se  $\mathbf{T}$  é uma matriz, então

$$y = \mathbf{T}x \quad \text{implica} \quad \nabla_y v = \nabla_x u \mathbf{T}^{-1}.$$

Isso decorre imediatamente da regra da cadeia, pois

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(y) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(y) \mathbf{T}_{ki},$$

de modo que

$$\nabla_x u = \nabla_y v \mathbf{T}.$$

Assim, como

$$L_0 u = \nabla_x \mathbf{A} (\nabla_x)^t u = \nabla_x \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{I} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{P}^t (\nabla_x)^t u = \left( \nabla_x \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} \right) \mathbf{I} \left( \nabla_x \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} \right)^t u,$$

se definirmos  $y = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t x$  teremos  $\nabla_y v = \nabla_x u \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2}$  e

$$L_0 u = \nabla_y (\nabla_y)^t = \Delta_y v.$$

Continuando a demonstração do teorema, usando o Teorema 9.16 obtemos

$$[D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, \alpha) [g]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \quad (10.8)$$

Lembrando que para uma matriz linear invertível  $\mathbf{T}$  temos

$$\frac{|x|}{\|\mathbf{T}^{-1}\|} \leq |\mathbf{T}x| \leq \|\mathbf{T}\| |x| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

segue que

$$\begin{aligned} [g]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{\substack{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \\ y_1 \neq y_2}} \frac{|g(y_1) - g(y_2)|}{|y_1 - y_2|^\alpha} = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t (x_1 - x_2)|^\alpha} \\ &\leq \left\| \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} \right\|^\alpha \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} = \left\| \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} \right\|^\alpha [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\mathbf{P}\|^\alpha \left\| \mathbf{D}^{1/2} \right\|^\alpha [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \left\| \mathbf{D}^{1/2} \right\|^\alpha [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \\ &= \Lambda^{\alpha/2} [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_2) \right| &= \left| \sum_{k,l=1}^n \lambda_k^{-1/2} \lambda_l^{-1/2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y_1) - \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y_2) \right] p_{ik} p_{jl} \right| \\
&\leq \sum_{k,l=1}^n \lambda_k^{-1/2} \lambda_l^{-1/2} |p_{ik} p_{jl}| \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y_1) - \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(y_2) \right| \\
&\leq [D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \left( \sum_{k,l=1}^n \lambda_k^{-1/2} \lambda_l^{-1/2} |p_{ki} p_{lj}| \right) |y_1 - y_2|^\alpha \\
&\leq n^2 \lambda^{-1} [D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \left\| \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t (x_1 - x_2) \right|^\alpha \\
&\leq n^2 \lambda^{-1} [D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \left\| \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^t \right\|^\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \\
&= n^2 \lambda^{-1} [D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \left\| \mathbf{D}^{-1/2} \right\|^\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \\
&\leq n^2 \lambda^{-1-\alpha/2} [D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} |x_1 - x_2|^\alpha.
\end{aligned}$$

donde

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \\ x_1 \neq x_2}} \frac{\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_2) \right|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \leq C(n) \lambda^{-1-\alpha/2} [D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Reunindo as duas desigualdades, obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}
[D^2 u]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} &\leq C(n) \lambda^{-1-\alpha/2} [D^2 v]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C(n, \alpha) \lambda^{-1-\alpha/2} [g]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C(n, \alpha) \lambda^{-1-\alpha/2} \Lambda^{\alpha/2} [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \\
&= C(n, \alpha) \left( \frac{\Lambda}{\lambda} \right)^{\alpha/2} \lambda^{-1} [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

■

## 10.2 Estimativas Interiores

O seguinte lema elementar de cálculo é extremamente útil no estudo de quaisquer estimativas interiores:

**Lema 10.2.** *Seja  $\varphi : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, não negativa, com  $T_0 \geq 0$ . Suponha que para quaisquer  $T_0 \leq t < s \leq T_1$ ,  $\varphi$  satisfaça*

$$\varphi(t) \leq \theta \varphi(s) + \frac{A}{(s-t)^\alpha} + B,$$

onde  $\theta < 1, A, B, \alpha$  são constantes não negativas. Então existe uma constante  $C = C(\alpha, \theta)$  tal que para quaisquer  $T_0 \leq r < R \leq T_1$  nós temos

$$\varphi(r) \leq C \left[ \frac{A}{(R-r)^\alpha} + B \right].$$

**Prova.** Escolha  $0 < \tau < 1$  e considere a seqüência  $\{t_i\}$  definida por

$$t_0 = r,$$

$$t_i = r + \sum_{k=1}^{i-1} (1 - \tau) \tau^k (R - r)$$

de modo que  $t_{i+1} - t_i = (1 - \tau) \tau^i (R - r)$ . Temos

$$\begin{aligned} \varphi(t_i) &\leq \theta \varphi(t_{i+1}) + \frac{A}{(t_{i+1} - t_i)^\alpha} + B \\ &= \theta \varphi(t_{i+1}) + \frac{A}{(1 - \tau)^\alpha \tau^{i\alpha} (R - r)^\alpha} + B. \end{aligned}$$

Iterando esta desigualdade  $k$  vezes, obtemos

$$\varphi(t_0) \leq \theta^k \varphi(t_k) + \left[ \frac{A}{(1 - \tau)^\alpha (R - r)^\alpha} + B \right] \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{\theta}{\tau^\alpha} \right)^i.$$

O resultado é obtido escolhendo  $\tau$  de modo que  $\theta/\tau^\alpha < 1$ , com

$$C = \frac{1}{(1 - \tau)^\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\theta}{\tau^\alpha} \right)^i = \frac{1}{(1 - \tau)^\alpha \left[ 1 - \frac{\theta}{\tau^\alpha} \right]}.$$

■

Para domínios que satisfazem a *propriedade do cone* (isso inclui bolas), podemos obter desigualdades de interpolação mais precisas que as obtidas no Teorema 9.8 e, inclusive, determinar a dependência da constante  $C_\varepsilon$  com  $\varepsilon$ . Estas desigualdades mais finas serão usadas imediatamente na seqüência para obter estimativas interiores de Schauder em bolas.

**Definição.** Dado um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , uma bola aberta  $B_1$  com centro em  $x$  e uma bola aberta  $B_2$  não contendo  $x$ , o conjunto  $V = B_1 \cap \{x + \lambda(y - x) : y \in B_2, \lambda > 0\}$  é chamado um **cone finito** com vértice em  $x$ .

**Definição.** Dizemos que um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  satisfaz a **propriedade do cone**, se existe um cone finito  $V$  tal que para todo  $x \in \Omega$  existe um cone congruente a  $V$  com vértice em  $x$  inteiramente contido em  $\Omega$ .

**Lema 10.3.** (Desigualdades de Interpolação em conjuntos que satisfazem a propriedade do cone) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto que satisfaz a propriedade do cone para um cone  $V$  de altura  $h$ . Então, para todo  $0 < \varepsilon \leq h$  e para todo  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , valem as desigualdades de interpolação*

$$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon^2 [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \quad (10.9)$$

$$[u]_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon^{1+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \quad (10.10)$$

$$[u]_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon^{1+\alpha}} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}. \quad (10.11)$$

$$[u]_{C^2(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon^\alpha [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon^2} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \quad (10.12)$$

onde a constante  $C$  depende apenas de  $n$  e do ângulo sólido de abertura do cone.

**Prova.** Seja  $V_1$  um cone com vértice na origem, com o mesmo ângulo de abertura do cone  $V$  e altura 1. Escolhendo  $\varepsilon = 1$ , obtemos a partir do Teorema 9.8 as seguintes desigualdades de interpolação:

$$[v]_{C^\alpha(\bar{V}_1)} \leq [v]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)} + C \|v\|_{C^0(\bar{V}_1)}, \quad (10.13)$$

$$[v]_{C^1(\bar{V}_1)} \leq [v]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)} + C \|v\|_{C^0(\bar{V}_1)}, \quad (10.14)$$

$$[v]_{C^{1,\alpha}(\bar{V}_1)} \leq [v]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)} + C \|v\|_{C^0(\bar{V}_1)}, \quad (10.15)$$

$$[v]_{C^2(\bar{V}_1)} \leq [v]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)} + C \|v\|_{C^0(\bar{V}_1)}, \quad (10.16)$$

para todo  $v \in C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)$ . Para  $0 < \varepsilon \leq h$ , seja  $V_\varepsilon$  um cone com vértice na origem, com o mesmo ângulo de abertura do cone  $V$  e altura  $\varepsilon$ . Seja  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)$ . Defina  $v \in C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)$  por

$$v(x) = u(\varepsilon x).$$

Isso estabelece uma correspondência bijetiva entre  $C^{2,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)$  e  $C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)$ . Temos

$$\|v\|_{C^0(\bar{V}_1)} = \sup_{x \in \bar{V}_1} |v(x)| = \sup_{x \in \bar{V}_1} |u(Rx)| = \sup_{y \in \bar{V}_\varepsilon} |u(y)| = \|u\|_{C^0(\bar{V}_\varepsilon)} \quad (10.17)$$

Além disso, como  $Dv(x) = \varepsilon Du(\varepsilon x)$  e  $D^2v(x) = \varepsilon^2 D^2u(\varepsilon x)$ , segue que

$$[v]_{C^1(\bar{V}_1)} = \varepsilon [u]_{C^1(\bar{V}_\varepsilon)}, \quad (10.18)$$

$$[v]_{C^2(\bar{V}_1)} = \varepsilon^2 [u]_{C^2(\bar{V}_\varepsilon)}, \quad (10.19)$$

e

$$\begin{aligned} [D^2v]_{C^\alpha(\bar{V}_1)} &= \max_{|\gamma|=2} \sup_{x,y \in \bar{V}_1} \frac{|D^\gamma v(x) - D^\gamma v(y)|}{|x-y|^\alpha} = \max_{|\gamma|=2} \sup_{x,y \in \bar{V}_1} \frac{\varepsilon^2 |D^\gamma u(\varepsilon x) - D^\gamma u(\varepsilon y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &= \varepsilon^2 \max_{|\gamma|=2} \sup_{z,w \in \bar{V}_\varepsilon} \frac{|D^\gamma u(z) - D^\gamma u(w)|}{\left| \frac{z}{\varepsilon} - \frac{w}{\varepsilon} \right|^\alpha} = \varepsilon^{2+\alpha} \max_{|\gamma|=2} \sup_{z,w \in \bar{V}_\varepsilon} \frac{|D^\gamma u(z) - D^\gamma u(w)|}{|z-w|^\alpha} \\ &= \varepsilon^{2+\alpha} [D^2u]_{C^\alpha(\bar{V}_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

logo

$$[v]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_1)} = \varepsilon^{2+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)}. \quad (10.20)$$

Similarmente, obtemos

$$[v]_{C^\alpha(\bar{V}_1)} = \varepsilon^\alpha [u]_{C^\alpha(\bar{V}_\varepsilon)}, \quad (10.21)$$

$$[v]_{C^{1,\alpha}(\bar{V}_1)} = \varepsilon^{1+\alpha} [u]_{C^{1,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)}. \quad (10.22)$$

Portanto, segue de (10.13), (10.14), (10.15) e (10.16) que

$$\begin{aligned} \varepsilon^\alpha [u]_{C^\alpha(\bar{V}_\varepsilon)} &\leq \varepsilon^{2+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)} + C \|u\|_{C^0(\bar{V}_\varepsilon)}, \\ \varepsilon [u]_{C^1(\bar{V}_\varepsilon)} &\leq \varepsilon^{2+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)} + C \|u\|_{C^0(\bar{V}_\varepsilon)}, \\ \varepsilon^{1+\alpha} [u]_{C^{1,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)} &\leq \varepsilon^{2+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)} + C \|u\|_{C^0(\bar{V}_\varepsilon)}, \\ \varepsilon^2 [u]_{C^2(\bar{V}_\varepsilon)} &\leq \varepsilon^{2+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_\varepsilon)} + C \|u\|_{C^0(\bar{V}_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [u]_{C^\alpha(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon^2 [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{V_\varepsilon})} + \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \|u\|_{C^0(\overline{V_\varepsilon})}, \\ [u]_{C^1(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon^{1+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{V_\varepsilon})} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{C^0(\overline{V_\varepsilon})}, \\ [u]_{C^{1,\alpha}(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{V_\varepsilon})} + \frac{C}{\varepsilon^{1+\alpha}} \|u\|_{C^0(\overline{V_\varepsilon})}, \\ [u]_{C^2(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon^\alpha [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{V_\varepsilon})} + \frac{C}{\varepsilon^2} \|u\|_{C^0(\overline{V_\varepsilon})}. \end{aligned}$$

Como para todo  $x \in \Omega$  e  $\varepsilon \leq h$  existe um cone  $V_\varepsilon$  com vértice  $x$  tal que  $V_\varepsilon \subset \Omega$ , segue que

$$\begin{aligned} [u]_{C^\alpha(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon^2 [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \\ [u]_{C^1(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon^{1+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \\ [u]_{C^{1,\alpha}(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon^{1+\alpha}} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \\ [u]_{C^2(\overline{V_\varepsilon})} &\leq \varepsilon^\alpha [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \frac{C}{\varepsilon^2} \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

Mas  $x \in \Omega$  é arbitrário, logo segue o resultado. ■

Observando que uma bola de raio  $R$  satisfaz a propriedade do cone com altura  $h = R/2$ , segue imediatamente o seguinte resultado:

**Corolário 10.4.** *Sejam  $B_R = B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$  e  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Existe uma constante positiva  $C = C(n)$  tal que para qualquer  $0 < \varepsilon \leq R/2$  e para todo  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_R})$  valem as desigualdades de interpolação*

$$[u]_{C^\alpha(\overline{B_R})} \leq \varepsilon^2 [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{B_R})} + \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \|u\|_{C^0(\overline{B_R})}, \quad (10.23)$$

$$[u]_{C^1(\overline{B_R})} \leq \varepsilon^{1+\alpha} [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{B_R})} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{C^0(\overline{B_R})}, \quad (10.24)$$

$$[u]_{C^{1,\alpha}(\overline{B_R})} \leq \varepsilon [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{B_R})} + \frac{C}{\varepsilon^{1+\alpha}} \|u\|_{C^0(\overline{B_R})}, \quad (10.25)$$

$$[u]_{C^2(\overline{B_R})} \leq \varepsilon^\alpha [u]_{C^{2,\alpha}(\overline{B_R})} + \frac{C}{\varepsilon^2} \|u\|_{C^0(\overline{B_R})}. \quad (10.26)$$

Agora vamos obter estimativas de Schauder em bolas para soluções com suporte compacto de equações elípticas; este é o primeiro passo para obter as estimativas interiores.

**Lema 10.5.** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado e suponha que  $L$  satisfaça (H1) e (H2). Então existe  $R_0 = R_0(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M) \leq 1$  tal que para todo  $0 < R \leq R_0$  com  $B_R \subset \Omega$  e para toda solução  $u \in C_0^{2,\alpha}(B_R)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , de*

$$-Lu = f \quad (10.27)$$

a seguinte estimativa é válida:

$$[D^2u]_{C^\alpha(B_R)} \leq C \left( \frac{1}{\lambda} [f]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{1}{R^2} \|u\|_{C^0(B_R)} \right), \quad (10.28)$$

com  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M)$ .

**Prova.** Multiplicando a equação por  $1/\lambda$ , podemos supor  $\lambda = 1$ . Seja  $B_R = B_R(x_0)$ . Usando o *método de congelar os coeficientes*, escrevemos a equação  $-Lu = f$  na forma

$$-L_0 u = \tilde{f},$$

onde

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

e

$$\tilde{f} = f + \sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x).$$

Observe que  $L_0$  é um operador estritamente elíptico com coeficientes constantes; além disso, pela hipótese sobre os coeficientes de  $L$  (o produto de funções em  $C^\alpha$  é uma função em  $C^\alpha$ , como vimos na Proposição 9.7) e que  $u$  tem suporte compacto em  $B_R$ , temos também que  $\tilde{f} \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^n)$ . Podemos então aplicar o Teorema 10.1 e a Proposição 9.7 para obter

$$\begin{aligned} [D^2 u]_{C^\alpha(B_R)} &\leq C(n, \alpha, \Lambda/\lambda) [\tilde{f}]_{C^\alpha(B_R)} \\ &\leq C(n, \alpha, \Lambda/\lambda) \left\{ [f]_{C^\alpha(B_R)} \right. \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \left( [a_{ij}]_{C^\alpha(B_R)} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{C^0(B_R)} + \|a_{ij} - a_{ij}(x_0)\|_{C^0(B_R)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{C^\alpha(B_R)} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left( [b_i]_{C^\alpha(B_R)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^0(B_R)} + \|b_i\|_{C^0(B_R)} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_{C^\alpha(B_R)} \right) \\ &\quad \left. + \left( [c]_{C^\alpha(B_R)} \|u\|_{C^0(B_R)} + \|c\|_{C^0(B_R)} [u]_{C^\alpha(B_R)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Por hipótese,

$$[a_{ij}]_{C^\alpha(B_R)}, [b_i]_{C^\alpha(B_R)}, [c]_{C^\alpha(B_R)} \leq M$$

e, por definição,

$$\|a_{ij} - a_{ij}(x_0)\|_{C^0(B_R)} \leq [a_{ij}]_{C^\alpha(B_R)} \sup_{x \in B_R} |x - x_0|^\alpha = R^\alpha [a_{ij}]_{C^\alpha(B_R)} \leq MR^\alpha.$$

Logo,

$$[D^2 u]_{C^\alpha(B_R)} \leq C(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M) \left( [f]_{C^\alpha(B_R)} + R^\alpha [D^2 u]_{C^\alpha(B_R)} + [Du]_{C^\alpha(B_R)} + [u]_{C^\alpha(B_R)} + \|u\|_{C^2(B_R)} \right). \quad (10.29)$$

Pelas desigualdades de interpolação do Corolário 10.4, se  $\varepsilon < 1$  temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^2(B_R)} &= \|u\|_{C^0(B_R)} + [u]_{C^1(B_R)} + [u]_{C^2(B_R)} \\ &\leq \|u\|_{C^0(B_R)} + \varepsilon^{1+\alpha} [D^2 u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{C^0(B_R)} \\ &\quad + \varepsilon^\alpha [u]_{C^{2,\alpha}(B_R)} + \frac{C}{\varepsilon^2} \|u\|_{C^0(B_R)} \\ &\leq \varepsilon^\alpha [u]_{C^{2,\alpha}(B_R)} + \frac{C}{\varepsilon^2} \|u\|_{C^0(B_R)}. \end{aligned}$$

Se escolhermos  $\varepsilon = \frac{R}{2}$ , para  $R < 1$ , temos então

$$\|u\|_{C^2(B_R)} \leq R^\alpha [D^2 u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{R^2} \|u\|_{C^0(B_R)}. \quad (10.30)$$



Também pelas desigualdades de interpolação do Corolário 10.4, temos

$$[u]_{C^\alpha(B_R)} \leq \varepsilon^2 [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \|u\|_{C^0(B_R)}, \quad (10.31)$$

$$[Du]_{C^\alpha(B_R)} \leq \varepsilon [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{\varepsilon^{1+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)}, \quad (10.32)$$

de modo que se escolhermos  $\varepsilon = \frac{R}{2}$ , para  $R < 1$ , temos

$$\begin{aligned} [u]_{C^\alpha(B_R)} &\leq \frac{R^2}{4} [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{R^\alpha} \|u\|_{C^0(B_R)} \leq R^\alpha [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{R^2} \|u\|_{C^0(B_R)}, \\ [Du]_{C^\alpha(B_R)} &\leq \frac{R}{2} [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{R^{1+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)} \leq R^\alpha [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{R^2} \|u\|_{C^0(B_R)}. \end{aligned}$$

Assim, se substituirmos (10.30), (10.31) e (10.32) em (10.29), obtemos

$$[D^2u]_{C^\alpha(B_R)} \leq CR^\alpha [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + C \left( [f]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{1}{R^2} \|u\|_{C^0(B_R)} \right).$$

Tomamos agora  $R_0 = \left(\frac{1}{2C}\right)^{1/\alpha}$  se  $C > 1$ ; caso contrário, basta tomar  $R_0 = \frac{1}{2^{1/\alpha}}$ . De qualquer forma, obtemos para  $0 < R \leq R_0$

$$[D^2u]_{C^\alpha(B_R)} \leq C \left( [f]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{1}{R^2} \|u\|_{C^0(B_R)} \right).$$

■

Usaremos agora o Lema 10.2 para nos livrar da hipótese de que  $u$  tem suporte compacto no Lema 10.5, obtendo as *estimativas interiores de Schauder*.

**Teorema 10.6.** (Estimativas Interiores de Schauder) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado e suponha que  $L$  satisfaça (H1) e (H2). Seja  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , uma solução de*

$$-Lu = f.$$

*Então, para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , nós temos*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C \left( \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right), \quad (10.33)$$

*com  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ .*

**Prova.** Mais uma vez, podemos supor  $\lambda = 1$ . Seja  $R_0$  a constante do lema anterior e

$$\bar{R}_0 = \min \left\{ R_0, \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) \right\}.$$

Para qualquer  $x_0 \in \Omega'$  e  $0 < R \leq R_0$ , denote  $B_R = B_R(x_0)$ . Seja  $\eta \in C_0^\infty(B_R)$  uma função corte  $0 \leq \eta \leq 1$  tal que para todo  $0 < \tau < 1$  nós temos

$$\eta \equiv 1 \quad \text{em } B_{\tau R}$$

e

$$[\eta]_{C^k(B_R)} + (1-\tau)^\alpha R^\alpha [\eta]_{C^{k,\alpha}(B_R)} \leq \frac{C}{(1-\tau)^k R^k}, \quad (10.34)$$

onde  $C = C(n, k)$  (a prova da existência de uma tal função corte é deixada para o leitor; veja Exercício 10.2). Seja

$$v = \eta u.$$

Então  $v \in C_0^{2,\alpha}(B_R)$  e

$$\begin{aligned} -Lv &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\eta u) - \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta u) - c(\eta u) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left( \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^n b_i \left( \eta \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) - \eta c u \\ &= -\eta Lu - \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) u - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-Lv = \eta f - \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) u - 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}. \quad (10.35)$$

Para aplicar o lema anterior, precisamos estimar a norma de Hölder do lado direito desta expressão. Em primeiro lugar, usando a Proposição 9.7 e a condição (10.34), temos

$$\begin{aligned} \left[ a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right]_{C^\alpha(B_R)} &\leq [a_{ij}]_{C^\alpha(B_R)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^0(B_R)} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\|_{C^0(B_R)} + \|a_{ij}\|_{C^0(B_R)} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_{C^\alpha(B_R)} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right\|_{C^0(B_R)} \\ &\quad + \|a_{ij}\|_{C^0(B_R)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^0(B_R)} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right]_{C^\alpha(B_R)} \\ &\leq M \left( [\eta]_{C^1(B_R)} [u]_{C^1(B_R)} + [\eta]_{C^1(B_R)} [u]_{C^{1,\alpha}(B_R)} + [\eta]_{C^{1,\alpha}(B_R)} [u]_{C^1(B_R)} \right) \\ &\leq M \left[ \frac{C}{(1-\tau)R} \left( [u]_{C^1(B_R)} + [u]_{C^{1,\alpha}(B_R)} \right) + \frac{C}{(1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha}} [u]_{C^1(B_R)} \right] \\ &\leq C \left[ \frac{1}{(1-\tau)R^\alpha} [u]_{C^2(B_R)} + \frac{1}{(1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha}} [u]_{C^1(B_R)} \right], \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o teorema do valor médio:

$$[u]_{C^{1,\alpha}(B_R)} = \sup_{x,y \in B_R} \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \sup_{x,y \in B_R} \frac{\|D^2u\|_{C^0(B_R)} |x-y|}{|x-y|^\alpha} \leq R^{1-\alpha} [u]_{C^2(B_R)}.$$

Agora, para  $0 < \bar{\varepsilon} < 1$ , escolha  $\varepsilon = \left[ \bar{\varepsilon} (1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$  e  $\varepsilon = \left[ \bar{\varepsilon} (1-\tau) R^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}$  nas duas desigualdades de interpolação correspondentes do Corolário 10.4, respectivamente, para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha}} [u]_{C^1(B_R)} &\leq \bar{\varepsilon} [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{1}{(1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha}} \frac{C}{\bar{\varepsilon}^{\frac{2}{1+\alpha}} \left[ (1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha} \right]^{\frac{2}{1+\alpha}}} \|u\|_{C^0(B_R)} \\ &\leq \bar{\varepsilon} [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C_{\bar{\varepsilon}}}{(1-\tau)^{2+\alpha} R^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\tau)R^\alpha} [u]_{C^2(B_R)} &\leq \bar{\varepsilon} [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{1}{(1-\tau)R^\alpha} \frac{C}{\bar{\varepsilon}^{\frac{2}{\alpha}} (1-\tau)^{\frac{2}{\alpha}} R^2} \|u\|_{C^0(B_R)} \\ &\leq \bar{\varepsilon} [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C_{\bar{\varepsilon}}}{(1-\tau)^{\frac{2}{\alpha}+1} R^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)}. \end{aligned}$$

Concluimos que (substituindo  $\bar{\varepsilon}$  por  $\varepsilon$ )

$$\left[ a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right]_{C^\alpha(B_R)} \leq C \left\{ \varepsilon [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C_\varepsilon}{(1-\tau)^{\frac{2}{\alpha}+1} R^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)} \right\}. \quad (10.36)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \left[ a_{ij} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} u \right]_{C^\alpha(B_R)} &\leq M \left( [\eta]_{C^2(B_R)} \|u\|_{C^0(B_R)} + [\eta]_{C^2(B_R)} [u]_{C^\alpha(B_R)} + [\eta]_{C^{2,\alpha}(B_R)} \|u\|_{C^0(B_R)} \right) \\ &\leq M \left[ \frac{C}{(1-\tau)^2 R^2} (\|u\|_{C^0(B_R)} + [u]_{C^\alpha(B_R)}) + \frac{C}{(1-\tau)^{2+\alpha} R^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)} \right] \\ &\leq \frac{C}{(1-\tau)^2 R^{1+\alpha}} [u]_{C^1(B_R)} + \frac{C}{(1-\tau)^{2+\alpha} R^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left[ b_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} u \right]_{C^\alpha(B_R)} &\leq M \left( [\eta]_{C^1(B_R)} [u]_{C^0(B_R)} + [\eta]_{C^1(B_R)} [u]_{C^\alpha(B_R)} + [\eta]_{C^{1,\alpha}(B_R)} [u]_{C^0(B_R)} \right) \\ &\leq M \left[ \frac{C}{(1-\tau)R} ([u]_{C^0(B_R)} + [u]_{C^\alpha(B_R)}) + \frac{C}{(1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha}} [u]_{C^0(B_R)} \right] \\ &\leq \frac{C}{(1-\tau)R^\alpha} [u]_{C^1(B_R)} + \frac{C}{(1-\tau)^{1+\alpha} R^{1+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)}, \end{aligned}$$

de modo que ambos satisfazem a estimativa (10.36). Logo, como

$$\begin{aligned} [\eta f]_{C^\alpha(B_R)} &\leq \|\eta\|_{C^0(B_R)} [f]_{C^\alpha(B_R)} + [\eta]_{C^\alpha(B_R)} \|f\|_{C^0(B_R)} \\ &\leq [f]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{(1-\tau)^\alpha R^\alpha} \|f\|_{C^0(B_R)}, \end{aligned}$$

temos que

$$[Lv]_{C^\alpha(B_R)} \leq C \left\{ \frac{C}{(1-\tau)^\alpha R^\alpha} \|f\|_{C^0(B_R)} + [f]_{C^\alpha(B_R)} + \varepsilon [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C_\varepsilon}{(1-\tau)^{\frac{2}{\alpha}+1} R^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)} \right\}.$$

Daí, segue do lema anterior que

$$[D^2v]_{C^\alpha(B_R)} \leq C \left\{ \frac{C}{(1-\tau)^\alpha R^\alpha} \|f\|_{C^0(B_R)} + [f]_{C^\alpha(B_R)} + \varepsilon [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C_\varepsilon}{(1-\tau)^{\frac{2}{\alpha}+1} R^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_R)} \right\}.$$

Portanto, lembrando que  $\eta \equiv 1$  em  $B_{\tau R}$ , concluimos que

$$\begin{aligned} [D^2u]_{C^\alpha(B_{\tau R})} &\leq C \left\{ [f]_{C^\alpha(B_R)} + \varepsilon [D^2u]_{C^\alpha(B_R)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_\varepsilon}{(1-\tau)^{\frac{2}{\alpha}+1} R^{\frac{2}{\alpha}+1}} \left( R^{\frac{2}{\alpha}-1-\alpha} \|u\|_{C^0(B_R)} + R^{\frac{2}{\alpha}+1-\alpha} \|f\|_{C^0(B_R)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Tomando  $t = \tau R$ , defina agora

$$\varphi(t) = [D^2u]_{C^\alpha(B_\varepsilon)}.$$

Então, tomando  $s = R$ , a desigualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) \leq C \left\{ \varepsilon \varphi(s) + [f]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C_\varepsilon}{(s-t)^{\frac{2}{\alpha}+1}} \left( \bar{R}_0^{\frac{2}{\alpha}-1-\alpha} \|u\|_{C^0(B_{\bar{R}_0})} + \bar{R}_0^{\frac{2}{\alpha}+1-\alpha} \|f\|_{C^0(B_{\bar{R}_0})} \right) \right\}$$

para todo  $0 \leq s < t \leq \bar{R}_0$ . Escolha  $\varepsilon = 1/2C$ . Segue agora do Lema 10.2 que para todo  $0 < \rho < R \leq \bar{R}_0$  nós temos

$$[D^2u]_{C^\alpha(B_\rho)} \leq C \left\{ [f]_{C^\alpha(B_R)} + \frac{C}{(R-\rho)^{\frac{2}{\alpha}+1}} \left( \bar{R}_0^{\frac{2}{\alpha}-1-\alpha} \|u\|_{C^0(B_{\bar{R}_0})} + \bar{R}_0^{\frac{2}{\alpha}+1-\alpha} \|f\|_{C^0(B_{\bar{R}_0})} \right) \right\}.$$

Tomando  $R = \bar{R}_0$  e  $\rho = \bar{R}_0/2$ , obtemos

$$\begin{aligned} [D^2u]_{C^\alpha(B_{\bar{R}_0/2})} &\leq C \left\{ [f]_{C^\alpha(B_R)} + 2^{\frac{2}{\alpha}+1} C \left( \frac{1}{\bar{R}_0^{2+\alpha}} \|u\|_{C^0(B_{\bar{R}_0})} + \frac{1}{\bar{R}_0^\alpha} \|f\|_{C^0(B_{\bar{R}_0})} \right) \right\} \\ &\leq C \left( \|u\|_{C^0(B_{\bar{R}_0})} + \|f\|_{C^\alpha(B_{\bar{R}_0})} \right) \\ &\leq C \left( \|u\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de interpolação (Teorema 9.8), segue que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{\bar{R}_0/2})} \leq C \left( \|u\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} \right).$$

Como podemos cobrir  $\Omega'$  por um número finito de bolas de raio  $\bar{R}_0/2$ , concluímos a demonstração do teorema. ■

### 10.3 Estimativas Globais

Estabelecemos agora estimativas a priori globais para soluções do problema de Dirichlet elíptico. Como antes, começamos com a equação de Poisson, procedemos para a equação elíptica com coeficientes constantes e finalmente obtemos resultados locais antes de obter o resultado final.

**Teorema 10.7.** *Suponha que  $f \in C_0^\alpha(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  e que  $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ ,  $0 < \alpha < 1$ , é uma solução para o problema de Dirichlet homogêneo para a equação de Poisson*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \mathbb{R}_+^n, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases} \quad (10.38)$$

Então, existe uma constante  $C = C(n, \alpha)$  tal que

$$[D^2u]_{C^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} \leq C [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}_+^n)}. \quad (10.39)$$

**Prova:** A demonstração deste fato exige conhecimentos de espaços de Sobolev. Por este motivo vamos adiá-la até o capítulo seguinte. ■

**Teorema 10.8.** *Seja  $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ ,  $0 < \alpha < 1$ , uma solução de*

$$\begin{cases} -L_0 u = f & \text{em } \mathbb{R}_+^n, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (10.40)$$

onde  $f \in C_0^\alpha(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ . Então

$$[D^2u]_{C^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} \leq \frac{C}{\lambda} [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}_+^n)}, \quad (10.41)$$

onde  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda)$ .

**Prova.** A extensão do resultado anterior para operadores elípticos com coeficientes constantes é análoga à feita no Teorema 10.1. Os detalhes da demonstração são deixados para o leitor (veja o Exercício 10.3). ■

**Lema 10.9.** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado que tem uma parte  $S \subset \partial\mathbb{R}_+^n$  de sua fronteira plana, e suponha que  $L$  satisfaça (H1) e (H2). Então existe  $R_0 = R_0(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M) \leq 1$  tal que para todo  $0 < R \leq R_0$  com  $B_R^+ \subset \Omega$  e  $B_R^+$  com centro em  $S$ , e para toda solução  $u \in C^{2,\alpha}(B_R^+)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , de*

$$\begin{cases} -Lu = f & \text{em } B_R^+, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_R^+, \end{cases} \quad (10.42)$$

tal que  $u$  se anula em uma vizinhança de  $\partial B_R^+ \cap \{x_n > 0\}$ , a seguinte estimativa é válida:

$$[D^2u]_{C^\alpha(B_R^+)} \leq C \left( \frac{1}{\lambda} [f]_{C^\alpha(B_R^+)} + \frac{1}{R^2} \|u\|_{C^0(B_R^+)} \right), \quad (10.43)$$

com  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M)$ .

**Prova.** A demonstração é a mesma do Lema 10.5. Os detalhes são deixados para o leitor (veja o Exercício 10.4). ■

**Lema 10.10.** *Seja  $\Omega$  um aberto limitado que tem uma parte  $S \subset \partial\mathbb{R}_+^n$  de sua fronteira plana, e suponha que  $L$  satisfaça (H1) e (H2). Seja  $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup S)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , uma solução de*

$$\begin{cases} -Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } S. \end{cases} \quad (10.44)$$

Então para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega \cup S$ , nós temos

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C \left( \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right). \quad (10.45)$$

com  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega \setminus S))$ .

**Prova.** Assuma sem perda de generalidade que  $\lambda = 1$ . Seja  $R_0$  a constante do lema anterior e tome

$$\begin{aligned} \overline{R}_0 &= \min \left\{ R_0, \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega \setminus S) \right\}, \\ \Omega'' &= \Omega' \cap \left\{ x_n > \frac{1}{4} \overline{R}_0 \right\}. \end{aligned}$$

Como  $\Omega'' \subset\subset \Omega$ , podemos aplicar as estimativas interiores de Schauder para obter

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega'')} \leq C \left( [f]_{C^\alpha(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right). \quad (10.46)$$

Agora seja  $B_{\overline{R}_0}$  uma bola com centro em  $\overline{\Omega'} \cup S$ . Seguindo exatamente os mesmos passos da demonstração do Teorema 10.6 (veja Exercício 10.5), obtemos

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{\overline{R}_0/2}^+)} \leq C \left( [f]_{C^\alpha(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right).$$

Cobrindo  $\overline{\Omega'} \setminus \Omega''$  com um número finito de bolas  $B_{R_0/2}^\pm$  com centro em  $\overline{\Omega'} \cup S$ , concluímos que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega' \setminus \Omega'')} \leq C \left( [f]_{C^\alpha(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right). \quad (10.47)$$

Reunindo (10.46) e (10.47), obtemos a estimativa desejada. ■

Para aplicar este resultado a um domínio geral e finalmente obter as estimativas globais de Schauder, é necessário que a fronteira do domínio possua uma certa regularidade. Introduzimos o conceito de fronteiras de classe  $C^{k,\alpha}$ :

**Definição.** Dizemos que um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  possui **fronteira de classe  $C^{k,\alpha}$**  se para todo  $x \in \partial\Omega$  existe uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^n$  de  $x$  e um difeomorfismo  $\phi : V \rightarrow B_1$  tal que  $\phi \in C^{k,\alpha}(\overline{V})$ ,  $\phi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\overline{B_1})$ ,  $\phi(V \cap \Omega) = B_1^+$  e  $\phi(V \cap \partial\Omega) = \partial B_1^+ \cap B_1$ .

**Teorema 10.11.** (Estimativas de Schauder Globais) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado com fronteira de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , e suponha que  $L$  satisfaça (H1) e (H2). Sejam  $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  e  $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Suponha que  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  é uma solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.48)$$

Então  $u$  satisfaz a seguinte estimativa a priori global:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \left( \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \right). \quad (10.49)$$

para alguma constante  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M, \Omega)$ .

**Prova.** Basta provar o resultado para  $g = 0$ , pois o teorema geral decorre da aplicação deste resultado particular à solução  $v = u - g$ .

Mais uma vez, assumimos  $\lambda = 1$ . Seja  $x_0 \in \partial\Omega$  e seja  $\phi : V \rightarrow B_1$  um difeomorfismo satisfazendo as condições da definição que precede este teorema. Façamos a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} y &= \phi(x), \\ v(y) &= u(x) = u(\phi^{-1}(y)), \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\phi(x)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial v}{\partial y_k}(\phi(x)) \right] \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\phi(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right] \\ &= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(\phi(x)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\phi(x)) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \left[ \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(\phi(x)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\phi(x)) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n b_i(x) \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k}(\phi(x)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + c(x)u(x) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}(\phi(x)) \\
&+ \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial y_k}(\phi(x)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \\
&+ c(x)u(x)
\end{aligned}$$

Portanto, a função  $v$  satisfaz o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\tilde{L}v = \tilde{f} & \text{em } B_1^+, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_1^+, \end{cases}$$

onde o operador

$$\tilde{L}v = \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(y) \frac{\partial v}{\partial y_i} + \tilde{c}(y)v$$

tem coeficientes

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{kl}(y) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\phi^{-1}(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \\
\tilde{b}_k(y) &= \sum_{i,j=1}^n \left[ a_{ij}(\phi^{-1}(y)) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(\phi^{-1}(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right], \\
\tilde{c}(y) &= c(\phi^{-1}(y))
\end{aligned}$$

Afirmamos que operador  $\tilde{L}$  é também um operador elíptico. De fato, escrevendo

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y) \xi_k \xi_l = \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_j}(x) \xi_k \xi_l = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x) \xi_k \right) \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j}(x) \xi_l \right)$$

e denotando

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_i(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x) \xi_k, \\
\tilde{\xi}_j(x) &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j}(x) \xi_l,
\end{aligned}$$

temos, pela elipticidade do operador  $L$ ,

$$\lambda \left| \tilde{\xi}(x) \right|^2 \leq \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y) \xi_k \xi_l \leq \Lambda \left| \tilde{\xi}(x) \right|^2.$$

Por outro lado, existe uma constante  $C > 0$  independente de  $x$  tal que

$$\frac{1}{C} |\xi| \leq \left| \tilde{\xi}(x) \right| \leq C |\xi|;$$

de fato, podemos tomar

$$C = \|\phi\|_{C^1(V)}.$$

Combinando as duas desigualdades, provamos que  $\tilde{L}$  é elíptico. O operador  $\tilde{L}$  também satisfaz as hipóteses (H1) e (H2), pois  $\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{V})$  e  $\phi^{-1} \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1})$ . Aplicando o lema anterior a este problema, obtemos

$$\|v\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+)} \leq C \left( \|\tilde{f}\|_{C^\alpha(B_1^+)} + \|v\|_{C^0(B_1^+)} \right).$$

Reescrevendo esta desigualdade em termos da variável original  $x$ , temos

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\phi^{-1}(B_{1/2}^+))} \leq C \left( \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|v\|_{C^0(\Omega)} \right).$$

Aplicando estimativas interiores e cobrindo o complementar do interior por um número finito de vizinhanças como no lema anterior, obtemos o resultado. ■

A aplicação típica das estimativas globais de Schauder consiste em um conjunto de soluções de uma equação ou família de equações, cujas soluções satisfazem a estimativa uniforme do lado direito. A estimativa global de Schauder garante que as soluções são uniformemente limitadas em  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , logo possuem uma subsequência convergente em  $C^2(\overline{\Omega})$ . No caso das estimativas interiores, obtemos uma subsequência convergente em  $C^2(\overline{\Omega'})$  para cada aberto  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .

## 10.4 Estimativas de Schauder para Operadores Elípticos com $c \leq 0$

Um outro ingrediente que usaremos na demonstração da existência de solução para o problema de Dirichlet para operadores elípticos (satisfazendo a condição  $c \leq 0$ ) é o seguinte princípio do máximo, que pode ser entendido como fornecendo estimativas a priori de classe  $C^0$  para soluções do problema de Dirichlet elíptico. Denotamos  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ .

**Lema 10.12.** (Princípio do Máximo) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Seja  $L$  um operador elíptico com  $c \leq 0$  satisfazendo*

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j,$$

para todo  $x \in \Omega$  e para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , e

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{|\mathbf{b}(x)|}{\lambda(x)} < \infty.$$

Então, se  $Lu = f$ , temos

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} \frac{|f|}{\lambda}, \quad (10.50)$$

onde  $C = C(\text{diam } \Omega, \sup_{\Omega} |\mathbf{b}| / \lambda)$ .

**Prova.** Podemos assumir  $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < d\}$ . Denote

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$



e

$$\beta = \sup_{x \in \Omega} \frac{|\mathbf{b}(x)|}{\lambda(x)}.$$

Escolhendo  $\alpha = \beta + 1$ , temos

$$L_0 e^{\alpha x_1} = (\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1) e^{\alpha x_1} \geq \lambda (\alpha^2 - \alpha \beta) e^{\alpha x_1} \geq \lambda$$

para todo  $x \in \Omega$ . Tome

$$v(x) = \sup_{\partial\Omega} u^+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda}.$$

Como

$$Lv = L_0 v + cv \leq L_0 v = \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda} L_0 (-e^{\alpha x_1}) \leq -\lambda \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda},$$

temos

$$L(v - u) \leq -\lambda \left( \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda} + \frac{f}{\lambda} \right) \leq 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (10.51)$$

Além disso,

$$v - u \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (10.52)$$

Segue do princípio da comparação (Corolário 6.4) que

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} v \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda}, \quad (10.53)$$

para  $C = e^{\alpha d} - 1$ . Substituindo  $u$  por  $-u$ , obtemos o resultado desejado. ■

Como conseqüência deste princípio do máximo, as estimativas de Schauder para operadores elípticos satisfazendo  $c \leq 0$  podem ser simplificadas, permitindo eliminar a norma  $\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})}$  no lado direito das estimativas, obtendo uma estimativa  $C^{2,\alpha}$  da solução  $u$  exclusivamente em termos das estimativas de Hölder de  $f$  e  $g$ ; este resultado é extremamente útil na prática.

**Teorema 10.13.** (Estimativas de Schauder para Operadores Elípticos com  $c \leq 0$ ) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado com fronteira de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , e suponha que  $L$  satisfaça (H1), (H2) e  $c \leq 0$ . Sejam  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Suponha que  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  é uma solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.54)$$

Então  $u$  satisfaz a seguinte estimativa a priori global:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \left( \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \right). \quad (10.55)$$

para alguma constante  $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda, M, \Omega)$ .

**Prova.** Pelo princípio do máximo do lema anterior,

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C \left( \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) \leq C \left( \frac{1}{\lambda} \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \right).$$

Esta desigualdade permite substituir a norma  $\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})}$  nas estimativas de Schauder do Teorema 10.11 pelas normas de Hölder de  $f$  e  $g$ , produzindo a estimativa enunciada. ■

## 10.5 Método da Continuidade

Nesta seção revisaremos alguns conceitos e resultados básicos de Análise Funcional que serão usados para demonstrar a existência de solução para o problema de Dirichlet para operadores elípticos.

**Definição.** Seja  $E$  um espaço normado. Uma aplicação  $T : E \rightarrow E$  é chamada uma **contração** se existe uma constante  $q < 1$  tal que

$$\|Tx - Ty\| \leq q \|x - y\| \quad \text{para todos } x, y \in E.$$

Decorre imediatamente da definição que contrações são aplicações contínuas (de fato, uniformemente contínuas). Dizemos que  $x \in E$  é um **ponto fixo** para uma aplicação  $T : E \rightarrow E$  se  $Tx = x$ .

**Teorema 10.14.** (Teorema do Ponto Fixo para Contrações) *Seja  $B$  um espaço de Banach. Se  $T : B \rightarrow B$  é uma contração, então  $T$  possui um único ponto fixo.*

**Prova.** Usando o chamado método das aproximações sucessivas, escolhemos  $x_0 \in B$  e definimos uma seqüência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  por

$$x_n = T^n x_0.$$

Daí, se  $n \geq m$ , temos

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = \sum_{i=m}^{n-1} \|T^i x_1 - T^i x_0\| \leq \sum_{i=m}^{n-1} q^i \|x_1 - x_0\| \\ &= \|x_1 - x_0\| q^m \sum_{i=0}^{n-m-1} q^i \leq \|x_1 - x_0\| q^m \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - q} q^m \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $m \rightarrow \infty$ . Portanto,  $\{x_n\}$  é uma seqüência de Cauchy. Como  $B$  é um espaço de Banach, existe  $x \in B$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Por continuidade, temos

$$Tx = T(\lim x_n) = \lim Tx_n = \lim x_{n+1} = x.$$

Se  $x, y$  são dois pontos fixos de  $T$ , temos

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq q \|x - y\|,$$

onde  $\|x - y\| = 0$  e  $x = y$ . ■

**Definição.** Sejam  $E_1, E_2$  espaços normados. Uma aplicação linear  $T : E_1 \rightarrow E_2$  é **limitada** se existe uma constante  $C$  tal que

$$\|Tx\|_{E_2} \leq C \|x\|_{E_1} \quad \text{para todo } x \in E_1.$$

Neste caso, definimos a **norma** da aplicação  $T$  por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E_1 \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_{E_2}}{\|x\|_{E_1}} = \sup_{\|x\|_{E_1}=1} \|Tx\|_{E_2}.$$

A motivação para esta definição é o fato que um operador linear entre espaços normados é contínuo se e somente se ele for limitado (veja Exercício 10.6). A norma acima transforma o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  das aplicações lineares limitadas de  $E_1$  em  $E_2$  em um espaço normado.

**Teorema 10.15.** (Método da Continuidade) *Seja  $B$  um espaço de Banach e  $E$  um espaço normado. Sejam  $L_0, L_1 : B \rightarrow E$  operadores lineares limitados e para cada  $t \in [0, 1]$  defina*

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1. \quad (10.56)$$

*Suponha que existe uma constante  $c$  independente de  $t \in [0, 1]$  tal que*

$$\|x\|_B \leq C \|L_t x\|_E \quad \text{para todo } x \in B. \quad (10.57)$$

*Então  $L_0$  é sobrejetivo se e somente se  $L_1$  for.*

**Prova.** A condição (10.57) implica que os operadores  $L_t$  são injetivos, para todo  $t \in [0, 1]$ , pois se  $x \neq y$  temos

$$\|L_t x - L_t y\|_E \geq \frac{1}{C} \|x - y\|_B > 0.$$

Suponha que  $L_s$  é sobrejetivo para algum  $s \in [0, 1]$ . Mostraremos que isso implica que  $L_t$  é sobrejetivo para todo  $t \in [0, 1]$ . De fato, em vista da observação anterior, temos que  $L_s$  é bijetivo, logo existe o operador inverso  $L_s^{-1} : E \rightarrow B$ . Observe ainda que

$$\|L_s^{-1}\| \leq C.$$

Agora, para  $t \in [0, 1]$ , dado  $y \in E$ , a equação  $L_t x = y$  é equivalente à equação

$$\begin{aligned} L_s x &= y + (L_s - L_t)x = y + (t - s)L_0 x - (t - s)L_1 x \\ &= y + (t - s)(L_0 - L_1)x, \end{aligned}$$

a qual, por sua vez, é equivalente à equação

$$x = L_s^{-1}y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x.$$

Por outro lado, esta equação possui uma solução  $x \in B$  é equivalente à aplicação  $Tx = L_s^{-1}y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$  possui um ponto fixo. Como

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\| &= |t - s| \|L_s^{-1}\| \|L_0 - L_1\| \|x_1 - x_2\| \\ &\leq |t - s| C (\|L_0\| + \|L_1\|) \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

podemos garantir que  $T$  é uma contração sempre que

$$|t - s| < \frac{1}{C(\|L_0\| + \|L_1\|)} =: \delta.$$

Concluimos que a aplicação  $L_t$  é sobrejetiva para todo  $t \in [0, 1]$  que satisfaz  $|t - s| < \delta$ . Subdividindo o intervalo  $[0, 1]$  em subintervalos de comprimento menor que  $\delta$ , vemos que  $L_t$  é sobrejetiva para todo  $t \in [0, 1]$  se ela for para algum  $t$  fixado, em particular para  $t = 0$  ou  $t = 1$ . ■

## 10.6 O Problema de Dirichlet para Operadores Elípticos com $c \leq 0$

Admitindo o resultado do Teorema de Kellogg (Teorema 9.17) e usando o Método da Continuidade, estamos agora em condições de provar a existência de solução para o problema de Dirichlet para operadores estritamente elípticos com coeficientes de Hölder  $C^\alpha$ -uniformemente limitados com  $c \leq 0$ .

**Lema 10.16.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado de classe  $C^{2,\alpha}$ . Se  $L$  é um operador elíptico satisfazendo (H2), então*

$$L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$$

*é um operador linear limitado.*

**Prova.** Usando a Proposição 9.7 e a norma equivalente do Exercício 9.1, temos

$$\begin{aligned}
\|Lu\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} &= \left\| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \sum_{i=1}^n \left\| b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|cu\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \left( \|a_{ij}\|_{C^0(\bar{\Omega})} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} [a_{ij}]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left( \|b_i\|_{C^0(\bar{\Omega})} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} [b_i]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \right) \\
&\quad + \|c\|_{C^0(\bar{\Omega})} [u]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} [c]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \\
&\leq M \left[ \sum_{i,j=1}^n \left( \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) + \sum_{i=1}^n \left( \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) \right] \\
&\quad + [u]_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \\
&= M \|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}.
\end{aligned}$$

■

**Teorema 10.17.** (Existência de Solução para o Problema de Dirichlet) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado de classe  $C^{2,\alpha}$ . Seja  $L$  um operador elíptico satisfazendo (H1), (H2) e  $c \leq 0$ .*

*Sejam  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*possui uma única solução  $u$  de classe  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .*

**Prova.** Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $g = 0$ . De fato, escrevendo  $v = u - g$ , vemos que o problema considerado é equivalente ao problema

$$\begin{cases} Lv = f - Lg & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $Lg \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  pela hipótese sobre  $g$  e sobre os coeficientes de  $L$ .

Para cada  $t \in [0, 1]$  defina

$$L_t = tL + (1-t)\Delta.$$

Observe que  $L_0 = \Delta$ ,  $L_1 = L$  e que  $L_t$  satisfaz as condições (H1) e (H2) com constantes  $\lambda_t = \min(1, \lambda)$ ,  $\Lambda_t = \max(1, \Lambda)$  e  $M_t = \max(1, M)$  independentes de  $t$ . O subespaço  $B = \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$  é um espaço de Banach porque  $B$  é um subespaço fechado de  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ : se  $u_j \rightarrow u$  em  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  em particular  $u_j \rightarrow u$  uniformemente em  $\bar{\Omega}$ , logo se  $u_j = 0$  em  $\partial\Omega$  para todo  $j$  então  $u = 0$  em  $\partial\Omega$  também. Os operadores

$$L_t : B \longrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

são portanto operadores limitados definidos em espaços de Banach. Pelas estimativas globais de Schauder do Teorema 10.13, temos que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|L_t u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \quad \text{para todo } u \in B,$$

com a constante  $C$  independente de  $t$ . Pelo Teorema de Kellogg, o operador Laplaciano  $L_0 = \Delta$  é sobrejetivo sobre  $C^\alpha(\Omega)$ . Segue do Método da Continuidade que  $L$  também é sobrejetivo, ou seja, o problema de Dirichlet possui solução. Pelo princípio do máximo, esta solução é única. ■

## 10.7 Exercícios

**Exercício 10.1.** *Obtenha uma desigualdade escalada semelhante às do Lema 10.3 para a desigualdade de interpolação do Exercício 9.9.*

**Exercício 10.2.** *Seja  $R > 0$ . Obtenha uma função corte  $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ , tal que para todo  $0 < \tau < 1$  ela satisfaz*

$$\eta \equiv 1 \quad \text{em } B_{\tau R}$$

e

$$[\eta]_{C^k(B_R)} + (1 - \tau)^\alpha R^\alpha [\eta]_{C^{k,\alpha}(B_R)} \leq \frac{C}{(1 - \tau)^k R^k}.$$

**Exercício 10.3.** *Demonstre o Teorema 10.8.*

**Exercício 10.4.** *Prove o Lema 10.9.*

**Exercício 10.5.** *Cheque os detalhes da demonstração do Lema 10.10.*

**Exercício 10.6.** *Sejam  $E_1, E_2$  espaços normados. Mostre que uma aplicação linear  $T : E_1 \rightarrow E_2$  é limitada se e somente se ela for contínua.*

# Capítulo 11

## Espaços de Sobolev

### 11.1 O Princípio de Dirichlet

Vamos considerar novamente o problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.1)$$

para alguma função  $f$  dada. O princípio de Dirichlet afirma que podemos encontrar a solução para o problema acima encontrando a função que minimiza um funcional de energia apropriado:

**Proposição 11.1.** (Princípio de Dirichlet) *Suponha que  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaz  $u = f$  sobre  $\partial\Omega$  e*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \min_{\substack{v \in C^2(\Omega) \\ v=f \text{ sobre } \partial\Omega}} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

*Então  $u$  é uma solução de (11.1).*

**Prova:** Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Por hipótese, a função  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\gamma(t) = \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx$$

possui um mínimo em  $t = 0$ , porque  $u + t\varphi = f$  em  $\partial\Omega$ . Expandindo esta expressão, obtemos

$$\gamma(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

Em particular,  $\gamma$  é diferenciável e

$$\gamma'(t) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + 2t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

Como  $\gamma'(0) = 0$ , segue que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Integrando esta equação por partes (i.e., usando a primeira identidade de Green), obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi dx = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o que implica

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

■

O princípio de Dirichlet sugere então que para resolver o problema de Dirichlet para a equação de Laplace basta encontrar a função que minimiza o funcional (às vezes chamado *funcional* ou *integral de Dirichlet*)

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

na classe de funções de classe  $C^2$  em  $\Omega$  que satisfazem a condição de fronteira especificada. No entanto, não está claro que o funcional de Dirichlet assume o seu ínfimo (note que  $I \geq 0$ ) nesta classe de funções. Esta constitui a dificuldade principal em se aplicar este *método variacional* para encontrar a solução do problema de Dirichlet. Talvez fosse melhor tentar minimizar o funcional de Dirichlet em um espaço maior de funções para aumentar as chances de obter um minimizante naquele espaço. Se formos usar esta estratégia, no entanto, a nova dificuldade passa a ser mostrar que o minimizante obtido é de classe  $C^2$  em  $\Omega$ , satisfazendo os nossos critérios de solução para o problema de Dirichlet. Por exemplo, o funcional de Dirichlet está bem definido para funções em  $C^1(\Omega)$ , que é uma classe maior de funções que  $C^2(\Omega)$ , logo faz sentido procurar um minimizante para o funcional em  $C^1(\Omega)$  (embora nada indique que seja mais fácil encontrá-lo neste espaço do que no espaço  $C^2(\Omega)$ ); por outro lado, mesmo que encontremos um minimizante em  $C^1(\Omega)$ , é necessário provar que ele está também em  $C^2(\Omega)$ . Assim, o que determinará a escolha da estratégia é saber o que é mais fácil: encontrar o minimizante em um espaço maior  $W$  e provar a regularidade  $C^2(\Omega)$  deste minimizante, ou encontrar diretamente o minimizante no espaço  $C^2(\Omega)$ . A experiência mostra que a primeira estratégia é mais promissora. Define-se um *espaço de Sobolev*  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , que é um subespaço de  $L^2(\Omega)$  onde o funcional de Dirichlet está bem definido.  $W_0^{1,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert e tem belas propriedades de compacidade, o que facilita bastante provar a existência de um minimizante para o funcional de Dirichlet. Além disso  $W_0^{1,2}(\Omega)$  contém  $C^2(\Omega)$  e, através da consideração de outros espaços de Sobolev de definição análoga, é possível provar a regularidade do minimizante encontrado usando certos resultados de imersão. Para entender o que leva a definir este espaço, considere o seguinte resultado:

**Lema 11.2.** *O funcional de Dirichlet é convexo, isto é,*

$$I(tu + (1-t)v) \leq tI(u) + (1-t)I(v) \quad (11.2)$$

para todos  $u, v$  e para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Prova:** Isto é uma consequência imediata da convexidade da função  $x \mapsto |x|^2$

$$I(tu + (1-t)v) = \int_{\Omega} |t\nabla u + (1-t)\nabla v|^2 dx \leq \int_{\Omega} [t|\nabla u|^2 + (1-t)|\nabla v|^2] dx = tI(u) + (1-t)I(v).$$

A convexidade da função  $x \mapsto |x|^2$  pode ser provada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} |tx + (1-t)y|^2 - t|x|^2 - (1-t)|y|^2 &= (t^2 - t)|x|^2 + 2t(1-t)x \cdot y + [(1-t)^2 - (1-t)]|y|^2 \\ &= -t(1-t)|x - y|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

■

Seja  $(u_k)$  uma seqüência minimizante para o funcional de Dirichlet em algum espaço de funções  $W$ , isto é,

$$\lim I(u_k) = I_0 := \inf_W I(u).$$

Escreva

$$\begin{aligned} I(u_k - u_l) &= \int_{\Omega} |\nabla(u_k - u_l)|^2 dx = 2 \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla u_l|^2 dx - 4 \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{u_k + u_l}{2} \right) \right|^2 dx \\ &= 2I(u_k) + I(u_l) - 4I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right). \end{aligned}$$

Mas, pela definição do ínfimo  $I_0$ , pela convexidade do funcional de Dirichlet e pelo fato de  $(u_k)$  ser uma seqüência minimizante, temos

$$I_0 \leq I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) \leq \frac{1}{2}I(u_k) + \frac{1}{2}I(u_l) \rightarrow I_0$$

quando  $k, l \rightarrow \infty$ . Isso implica que

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_k - u_l)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } k, l \rightarrow \infty,$$

ou seja,  $(\nabla u_k)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$ . Como  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, portanto completo, segue que  $\nabla u_k$  converge para alguma função  $v \in L^2(\Omega)$ . A questão é se  $v = \nabla u$  para alguma função  $u$ , o que não podemos determinar, já que tudo o que sabemos é que  $v \in L^2(\Omega)$ . De qualquer modo, esta discussão sugere que devemos procurar minimizar o funcional de Dirichlet no espaço das funções cujos gradientes estão em  $L^2(\Omega)$ .

## 11.2 A Derivada Fraca

### 11.2.1 Definição

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que  $u \in C^1(\Omega)$  é uma função real continuamente diferenciável. Como vimos no Capítulo 9, se  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  é uma função suave com suporte compacto em  $\Omega$ , segue da fórmula de integração por partes que

$$\int_{\Omega} u(\partial_i \varphi) dx = - \int_{\Omega} (\partial_i u) \varphi dx \quad (11.3)$$

para  $i = 1, \dots, n$  (aqui denotamos por  $\partial_i$  a derivada parcial de primeira ordem  $D^i = \partial/\partial x_i$ ). Não há termos de fronteira exatamente porque  $\varphi$  tem suporte compacto em  $\Omega$ . Mais geralmente, se  $u \in C^k(\Omega)$  e  $|\alpha| = k$ , então, aplicando a fórmula de integração por partes  $k$  vezes, obtemos

$$\int_{\Omega} u(D^\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u) \varphi dx. \quad (11.4)$$

**Definição.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto,  $\alpha$  um multi-índice e  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . Dizemos que uma função  $v_\alpha \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  é a  $\alpha$ -ésima **derivada fraca** de  $u$ , se

$$\int_{\Omega} u(D^\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi dx, \quad (11.5)$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Se este for o caso, denotamos

$$v_\alpha = D^\alpha u. \quad (11.6)$$

Dizemos que  $u$  é **fracamente diferenciável** se todas as derivadas fracas de primeira ordem de  $u$  existirem, e fracamente diferenciável  $k$  vezes, quando  $D^\alpha u$  existir para todos os multi-índices  $0 \leq |\alpha| \leq k$ . Este último espaço vetorial é freqüentemente denotado por  $W^k(\Omega)$ .

Quando existe,  $v_\alpha$  é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula. Claramente  $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$ : o conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito clássico de derivada que mantém a validade da fórmula de integração por partes.

**Exemplo 11.3.** Sejam  $n = 1$ ,  $\Omega = (0, 2)$  e

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$



Então, se

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

temos  $u'(x) = v(x)$ . De fato, dada  $\varphi \in C_0^\infty((0, 2))$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\varphi' dx &= \int_0^1 x\varphi' dx + \int_1^2 \varphi' dx \\ &= \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi dx + 0 - \varphi(1) \\ &= - \int_0^2 v\varphi dx. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 11.4.** Sejam  $n = 1$ ,  $\Omega = (0, 2)$  e

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Então  $u$  não possui uma derivada fraca. Com efeito, suponha por absurdo que exista uma função  $v \in L_{\text{loc}}^1((0, 2))$  satisfazendo

$$\int_0^2 u\varphi' dx = - \int_0^2 v\varphi dx,$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty((0, 2))$ . Então

$$\begin{aligned} - \int_0^2 v\varphi dx &= \int_0^1 x\varphi' dx + 2 \int_1^2 \varphi' dx = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi dx + 0 - 2\varphi(1) \\ &= -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(1) = - \int_0^1 \varphi dx + \int_0^2 v\varphi dx.$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty((0, 2))$ . Escolhendo uma seqüência de funções-teste  $(\varphi_m) \subset C_0^\infty((0, 2))$  satisfazendo  $\varphi_m(1) = 1$ ,  $0 \leq \varphi_m \leq 1$  e  $\varphi_m(x) \rightarrow 0$  para todo  $x \neq 1$ , obtemos através do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ - \int_0^1 \varphi_m dx + \int_0^2 v\varphi_m dx \right] = 0,$$

uma contradição. □

Estes exemplos não são acidentais. Conforme veremos daqui a pouco, uma função real em uma variável real possui uma derivada fraca se e somente se ela for absolutamente contínua (a menos de modificações em conjuntos de medida nula); lembre-se que neste caso ela é diferenciável no sentido clássico em quase todo ponto. Uma caracterização completa das funções fracamente diferenciáveis, especialmente suas propriedades no que se refere à diferenciabilidade clássica, será considerada após um resultado de aproximação.

### 11.2.2 Um Teorema de Aproximação para Funções Fracamente Diferenciáveis

Para estabelecer algumas das propriedades básicas das funções fracamente diferenciáveis é conveniente aproximá-las por suas regularizações. Como afirmamos no Capítulo 9, as regularizações  $u_\varepsilon$  de  $u$  são aproximações de  $u$  na topologia natural do espaço em que  $u$  se encontra. Em particular, esta afirmação vale também para os espaços  $L^p$ . Apenas devemos observar que os espaços  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  não são espaços vetoriais normados, mas possuem uma topologia definida da seguinte maneira: dizemos que uma seqüência  $\{u_m\} \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  converge para  $u$  na topologia de  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  se  $u_m \rightarrow u$  em  $L^p(\Omega')$  para todo aberto  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .

**Lema 11.5.** *Se  $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  [resp.  $L^p(\Omega)$ ], se  $\Omega$  é um aberto limitado], então  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  [resp.  $L^p(\Omega)$ ], se  $\Omega$  é um aberto limitado] quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**Prova:** Pela desigualdade de Hölder, para qualquer função  $w \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  nós temos

$$\begin{aligned} |w_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B_1(0)} \varphi(z) w(x - \varepsilon z) dz \right| \leq \left( \int_{B_1(0)} |\varphi^{\frac{p-1}{p}}(z)|^{\frac{p}{p-1}} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B_1(0)} |\varphi^{\frac{1}{p}}(z) w(x - \varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |w(x - \varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |w(x - \varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}; \end{aligned}$$

portanto, se  $\Omega' \subset\subset \Omega$  e  $\varepsilon < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)/2$ , segue do Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |w_\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega'} \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |w(x - \varepsilon z)|^p dz \right) dx = \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left( \int_{\Omega'} |w(x - \varepsilon z)|^p dx \right) dz \\ &\leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left( \int_{B_\varepsilon(\Omega')} |w(y)|^p dy \right) dz \\ &= \int_{B_\varepsilon(\Omega')} |w|^p, \end{aligned}$$

onde  $B_\varepsilon(\Omega') = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \partial\Omega') < \varepsilon\}$  é a vizinhança  $\varepsilon$  de  $\Omega'$ . Em outras palavras, nós provamos que para qualquer função  $w \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  vale

$$\|w_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} \leq \|w\|_{L^p(B_\varepsilon(\Omega'))}.$$

Agora, aproxime  $u$  em  $B_\varepsilon(\Omega')$ . Mais precisamente, dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $v \in C^0(B_\varepsilon(\Omega'))$  tal que

$$\|u - v\|_{L^p(B_\varepsilon(\Omega'))} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pelo resultado que acabamos de obter, chamando  $w = u - v$  nós também temos (pois  $(u - v)_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon$ ) que

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u - v\|_{L^p(B_\varepsilon(\Omega'))} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como  $v_\varepsilon \rightarrow v$  uniformemente em  $B_\varepsilon(\Omega')$ , se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno nós temos

$$\|v - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Segue que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u - v\|_{L^p(\Omega')} + \|v - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} + \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon.$$

Para provar o resultado se  $u \in L^p(\Omega)$ , quando  $\Omega$  é um aberto limitado, estendemos  $u$  como sendo 0 fora de  $\Omega$  e aplicamos o resultado acima para  $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Lema 11.6.** *Seja  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  $\alpha$  um multi-índice, e suponha que  $D^\alpha u$  existe. Então*

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha u)_\varepsilon(x) \quad (11.7)$$

para todo  $x \in \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega : \text{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ .

**Prova:** Observe que

$$D_x^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Derivando sob o sinal de integral, como para  $x \in \Omega_\varepsilon$  a função  $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_0^\infty(\Omega)$ , podemos usar a definição de derivada fraca para obter

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon(x) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^n} \int_\Omega D_y^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D^\alpha u(y) dy \\ &= (D^\alpha u)_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

■

Observe que, mesmo que tenhamos  $u \in L^1(\Omega)$  e  $D^\alpha u \in L^1(\Omega)$  (e, conseqüentemente,  $u_\varepsilon \in L^1(\Omega)$  e  $(D^\alpha u)_\varepsilon \in L^1(\Omega)$  pelo Lema 11.5) não podemos concluir que  $D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha u)_\varepsilon(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , já que para  $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$  a função  $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \notin C_0^\infty(\Omega)$  e portanto não podemos usar a definição de derivada fraca.

Agora estamos em condições de provar o seguinte teorema básico de aproximação para derivadas fracas.

**Teorema 11.7.** *Sejam  $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  e  $|\alpha| = k$ . Então  $v = D^\alpha u$  se e somente se existe uma seqüência de funções  $(u_m) \subset C^k(\Omega)$  tal que  $u_m \rightarrow u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  e  $D^\alpha u_m \rightarrow v$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ .*

**Prova:** Suponha que existe uma seqüência de funções  $(u_m) \subset C^k(\Omega)$  satisfazendo  $u_m \rightarrow u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  e  $D^\alpha u_m \rightarrow v$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Então, para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , temos

$$\int_\Omega u(D^\alpha \varphi) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega u_m(D^\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega (D^\alpha u_m) \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx,$$

e portanto  $v = D^\alpha u$ .

Agora assumamos  $v = D^\alpha u$ . Temos então  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  e  $(D^\alpha u)_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u = v$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como  $(D^\alpha u)_\varepsilon = D^\alpha u_\varepsilon$ , segue a recíproca. ■

### 11.2.3 Caracterização das Funções Fracamente Diferenciáveis

Em geral, temos a seguinte caracterização das funções fracamente diferenciáveis, que tem como conseqüência o fato de que as derivadas parciais de uma função fracamente diferenciável existem em quase todo ponto. [Consulte o apêndice desta seção para uma breve revisão do conceito de função absolutamente contínua e suas propriedades principais.]

**Teorema 11.8.** *Uma função  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  é fracamente diferenciável se e somente se ela é igual, a menos de um conjunto de medida nula, a uma função que*

- (i) *é absolutamente contínua em quase todos os segmentos em  $\Omega$  paralelos aos eixos coordenados e*
- (ii) *as derivadas parciais (clássicas) de primeira ordem de  $u$  são localmente integráveis.*

**Prova:** Assuma primeiro  $u \in W^1(\Omega)$ . Obviamente, pela definição de função fracamente diferenciável, temos  $\partial_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Tome um bloco retangular  $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \Omega$  e fixe uma coordenada  $i$ . Escrevemos um ponto  $x \in R$  na forma  $x = (x', x_i)$ , onde  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $x_i \in [a_i, b_i]$ ; denotaremos também  $R' = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_i, b_i] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Temos que provar que para quase todo  $x' \in R'$  a função  $u(x', \cdot)$  é absolutamente contínua em  $[a_i, b_i]$ . Pelo Teorema 11.7, existe uma seqüência de funções  $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$  satisfazendo  $u_m \rightarrow u$  e  $\partial_i u_m \rightarrow \partial_i u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  para todo  $i$ . Pelo Teorema de Fubini, podemos então escrever para quase todo  $x' \in R'$

$$\int_{R'} \left[ \int_{a_i}^{b_i} |u_m(x', x_i) - u(x', x_i)| dx_i \right] dx' = \int_R |u_m(x) - u(x)| dx \rightarrow 0 \quad (11.8)$$

$$\int_{R'} \left[ \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| dx_i \right] dx' = \int_R |\partial_i u_m(x) - \partial_i u(x)| dx \rightarrow 0 \quad (11.9)$$

quando  $m \rightarrow \infty$ . Como convergência em  $L^1$  implica convergência q.t.p. a menos de uma subsequência, podemos assumir que

$$\int_{a_i}^{b_i} |u_m(x', x_i) - u(x', x_i)| dx_i \rightarrow 0 \quad (11.10)$$

$$\int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i) - \partial_i u(x', x_i)| dx_i \rightarrow 0 \quad (11.11)$$

para quase todo  $x' \in R'$  (por exemplo, definindo  $F_m(x') = \int_{a_i}^{b_i} |u_m(x', x_i) - u(x', x_i)| dx_i$ , temos por (11.8) que  $F_m \rightarrow 0$  em  $L^1(R')$ ). Em outras palavras, para quase todo  $x' \in R'$ , temos que  $u_m(x', \cdot) \rightarrow u(x', \cdot)$  em  $L^1([a_i, b_i])$  e  $\partial_i u_m(x', \cdot) \rightarrow \partial_i u(x', \cdot)$  em  $L^1([a_i, b_i])$ . Fixe qualquer um  $x'$  com esta propriedade.

Verificaremos agora que a seqüência  $\{u_m(x', \cdot)\}$  cumpre as condições do Teorema de Arzelà-Ascoli. De fato, como as funções  $u_m$  são pelo menos continuamente diferenciáveis, nós temos que, dado  $\eta > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $t \in [a_i, b_i]$  e  $m > N$  vale

$$\begin{aligned} |u_m(x', t) - u_m(x', a_i)| &= \left| \int_{a_i}^t \partial_i u_m(x', x_i) dx_i \right| \\ &\leq \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i \\ &< \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i + \eta. \end{aligned}$$

Logo, a seqüência  $\{u_m(x', \cdot)\}$  é uniformemente limitada em  $[a_i, b_i]$ . Além disso, a seqüência  $\{u_m(x', \cdot)\}$  também é uniformemente absolutamente equicontínua, porque a convergência de uma seqüência em  $L^1([a_i, b_i])$  implica que a seqüência é uniformemente integrável: dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $m \in \mathbb{N}$

$$\int_E |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i < \varepsilon$$

para qualquer conjunto  $E \subset [a_i, b_i]$  satisfazendo  $|E| < \delta$ ; assim, se  $|t - s| < \delta$ , segue que

$$|u_m(x', t) - u_m(x', s)| \leq \int_s^t |\partial_i u_m(x', x_i)| dx_i < \varepsilon$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que  $u_m(x', \cdot)$  converge uniformemente em  $[a_i, b_i]$  para uma função absolutamente contínua que coincide em quase todo ponto com  $u$ .

Suponha agora que  $u$  é absolutamente contínua em quase todos os segmentos de reta em  $\Omega$  paralelos aos eixos coordenados e que as primeiras derivadas parciais de  $u$  são localmente integráveis. Então isso vale também para  $u\varphi$  para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , logo temos

$$\int_L u (\partial_i \varphi) dx = - \int_L (\partial_i u) \varphi dx$$

em quase todo segmento de reta  $L$  paralelo ao  $i$ -ésimo eixo coordenado cujos extremos estão em  $\Omega \setminus \text{supp } \varphi$ . Pelo Teorema de Fubini, segue que

$$\int_\Omega u (\partial_i \varphi) dx = - \int_\Omega (\partial_i u) \varphi dx,$$

e portanto  $u \in W^1(\Omega)$ . ■

**Corolário 11.9.** *Seja  $u \in W^1(\Omega)$ . Se  $Du = 0$  q.t.p. em algum subconjunto conexo de  $\Omega$ , então  $u$  é constante neste subconjunto.*

### 11.2.4 Apêndice: Funções Absolutamente Contínuas

**Definição.** Dizemos que uma função real em uma variável real  $F$  é **absolutamente contínua** no intervalo  $[a, b]$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer seqüência finita

$$a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots \leq x_n < y_n \leq b$$

$$\text{tal que } \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) < \delta \text{ nós temos } \sum_{j=1}^n |F(y_j) - F(x_j)| < \varepsilon.$$

Uma demonstração para o seguinte resultado pode ser encontrado em qualquer livro-texto de Análise; uma boa referência é [Royden], capítulo 5.

**A.1 Teorema.** (Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral de Lebesgue) *Seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real a uma variável real. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $F$  é absolutamente contínua;
- (ii) para alguma função  $f \in L^1([a, b])$  nós temos

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt.$$

- (iii)  $F$  é diferenciável em quase todo ponto,  $F' \in L^1([a, b])$  e  $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt$ .

**A.2 Corolário.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Lipschitz com constante de Lipschitz igual a  $M$ , então  $f$  é absolutamente contínua e  $|f'| \leq M$  em quase todo ponto.*

**Prova:** Que funções de Lipschitz são absolutamente contínuas segue imediatamente das definições. O resto do corolário é uma consequência do item (iii) do teorema. Com efeito, suponha por absurdo que  $|f'(t)| > M$  para todo  $t$  em um conjunto  $E \subset \mathbb{R}$  de medida não-nula; podemos tomar  $E$  limitado. Então,

$$\left| \int_E f'(t) dt \right| > M |E|.$$

Por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um aberto  $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}$  contendo  $E$  tal que  $|U_\varepsilon \setminus E| < \varepsilon$ . Todo aberto da reta se escreve como uma união enumerável de intervalos dois a dois disjuntos. Logo, escrevendo  $U_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ ,

onde  $I_j = (a_j, b_j)$  (e convencionando que  $I_j = \emptyset$  para  $j > N$  se  $U_\varepsilon$  se escreve como uma união finita de  $N$  intervalos), temos

$$\int_{U_\varepsilon} f'(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_j}^{b_j} f'(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} (f(b_j) - f(a_j)) \leq M \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) = M |U_\varepsilon|.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos

$$\int_E f'(t) dt \leq M |E|,$$

uma contradição. ■

**Definição.** Sejam  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real. Dizemos que  $u$  é **absolutamente contínua em quase todos os segmentos de reta de  $\Omega$  paralelos aos eixos coordenados**, se para quase todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ , todo  $i = 1, \dots, n$  e todos  $a < x_i < b$  tais que o segmento de reta

$$\{(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n), t \in [a, b]\} \subset \Omega,$$

a função  $t \mapsto u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$  é absolutamente contínua em  $[a, b]$ .

### 11.2.5 Regra da Cadeia

Sob hipóteses razoáveis, a regra da cadeia vale para funções fracamente diferenciáveis. Veja a Proposição 11.14 para um enfraquecimento das hipóteses.

**Lema 11.10.** *Sejam  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$  e  $u \in W^1(\Omega)$ . Então a função composta  $f \circ u \in W^1(\Omega)$  e*

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

**Prova:** Pelo Teorema 11.7, para provar este resultado basta encontrar uma seqüência de funções continuamente diferenciáveis convergindo para  $f \circ u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , tais que suas derivadas convergem para  $f'(u)\partial_i u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Em vista do mesmo teorema, como  $u \in W^1(\Omega)$ , sabemos que existe uma seqüência  $(u_m) \subset C^1(\Omega)$  tal que  $u_m \rightarrow u$  e  $\partial_i u_m \rightarrow \partial_i u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  para todo  $i$ . Então, se  $\Omega' \subset \subset \Omega$ , nós temos

$$\int_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)| \leq \sup |f'| \int_{\Omega'} |u_m - u| \rightarrow 0$$

quando  $m \rightarrow \infty$ , ou seja,  $f \circ u_m \rightarrow f \circ u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Pela regra da cadeia para funções diferenciáveis  $\partial_i(f \circ u_m) = f'(u_m)\partial_i u_m$  e nós temos

$$\int_{\Omega'} |f'(u_m)\partial_i u_m - f'(u)\partial_i u| \leq \sup |f'| \int_{\Omega'} |\partial_i u_m - \partial_i u| + \int_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)| |\partial_i u|.$$

A primeira integral do lado direito desta desigualdade converge para 0 porque  $\partial_i u_m \rightarrow \partial_i u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos assumir que  $u_m \rightarrow u$  q.t.p. em  $\Omega$ ; como  $f'$  é contínua, segue que  $f'(u_m) \rightarrow f'(u)$  q.t.p. em  $\Omega$ . Como  $|f'(u_m) - f'(u)| |\partial_i u| \leq 2 \sup |f'| |\partial_i u| \in L^1(\Omega')$ , segue do teorema da convergência dominada que a segunda integral também converge para 0 e portanto que  $\partial_i(f \circ u_m) \rightarrow f'(u)\partial_i u$  em  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . ■

As partes positiva e negativa de uma função são as funções definidas respectivamente por

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = \min\{u(x), 0\}.$$

Segue que

$$u = u^+ + u^- \quad \text{e} \quad |u| = u^+ - u^-.$$

**Lema 11.11.** *Seja  $u \in W^1(\Omega)$ . Então  $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$  e*

$$\begin{aligned} Du^+(x) &= \begin{cases} Du(x) & \text{se } u(x) > 0, \\ 0 & \text{se } u(x) \leq 0, \end{cases} \\ Du^-(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } u(x) \geq 0, \\ Du(x) & \text{se } u(x) < 0, \end{cases} \\ D|u|(x) &= \begin{cases} Du(x) & \text{se } u(x) > 0, \\ 0 & \text{se } u(x) = 0, \\ -Du(x) & \text{se } u(x) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Prova:** Para cada  $\varepsilon > 0$  defina

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Então

$$f'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

de modo que  $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$  e  $f'_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Segue do lema anterior que para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  nós temos

$$\int_{\Omega} f_\varepsilon(u) \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \partial_i u \, dx.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue do teorema da convergência dominada (pois  $0 \leq f_\varepsilon(u) \leq u^+$  e  $0 \leq f'_\varepsilon(u) \leq 1$ ) que

$$\int_{\Omega} u^+ \partial_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \partial_i u \, dx,$$

e portanto o lema é provado para  $u^+$ . Os outros resultados seguem imediatamente de  $u^- = -(-u)^+$  e  $|u| = u^+ - u^-$ . ■

**Corolário 11.12.** *Seja  $u \in W^1(\Omega)$ . Se  $u$  é constante q.t.p. em algum subconjunto de  $\Omega$ , então  $Du = 0$  neste subconjunto.*

**Prova:** Sem perda de generalidade, podemos assumir  $u \equiv 0$  neste subconjunto. O resultado segue então imediatamente de  $Du = Du^+ + Du^-$ . ■

**Corolário 11.13.** *Seja  $u \in W^1(\Omega)$ . Então*

$$|D|u|| = |Du|.$$

A hipótese de que  $f$  seja de classe  $C^1$  na Regra da Cadeia (Lema 11.10) pode ser removida:

**Proposição 11.14.** *Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lipschitz e  $u \in W^1(\Omega)$ . Se  $f \circ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  então a função composta  $f \circ u \in W^1(\Omega)$  e*

$$D(f \circ u) = f'(u)Du.$$

**Prova:** A demonstração deste resultado requer um pouco mais de teoria de medida do que a assumida aqui. Veja [Ziemer], Teorema 2.1.11. ■

Observe, porém, que não removemos a hipótese de que  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$  do Lema 11.10, já que toda função de Lipschitz tem derivada limitada.

## 11.3 Espaços de Sobolev em Abertos de $\mathbb{R}^n$

### 11.3.1 Definição e Propriedades Básicas

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \geq 1$  e  $k \geq 0$  um inteiro. Definimos

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Estes espaços são de um certo modo análogos aos espaços  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ : nos espaços  $W^{k,p}(\Omega)$ , diferenciabilidade contínua é substituída por diferenciabilidade fraca e continuidade de Hölder por  $p$ -integrabilidade.  $W^{k,p}(\Omega)$  é claramente um espaço vetorial. Ele é munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p},$$

que é equivalente à norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left( \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

(veja Exercício 11.3).

Definimos ainda

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \text{fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

**Teorema 11.15.**  $W^{k,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach, separável se  $1 \leq p < \infty$ , e reflexivo e uniformemente convexo se  $1 < p < \infty$ .

**Prova:** Seja  $\{u_m\} \subset W^{k,p}(\Omega)$  uma seqüência de Cauchy. Então, para cada  $|\alpha| \leq k$ ,  $\{D^\alpha u_m\}$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^p(\Omega)$ ; como  $\{u_m\}$  é um espaço de Banach, para cada  $|\alpha| \leq k$  existem funções  $v_\alpha \in L^p(\Omega)$  tais que

$$D^\alpha u_m \rightarrow v_\alpha \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Denote  $u := v_0$ , de modo que  $u_m \rightarrow u$  em  $L^p(\Omega)$ . Para provar que  $W^{k,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach, basta então provar que  $D^\alpha u = v_\alpha$  para todo  $|\alpha| \leq k$ , pois isso automaticamente implicará por definição que  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  e que  $u_m \rightarrow u$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ . E, de fato, como convergência em  $L^p(\Omega)$  implica em convergência em  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , temos para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u(D^\alpha \varphi) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m(D^\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (D^\alpha u_m) \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi dx.$$

Para provar a separabilidade e a reflexividade (quando  $p > 1$ ) de  $W^{k,p}(\Omega)$ , basta considerar a imersão natural de  $W^{k,p}(\Omega)$  em  $N_k$  cópias de  $L^p(\Omega)$ , onde  $N_k$  é o número de multi-índices  $\alpha$  satisfazendo  $|\alpha| \leq k$ ,

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \underbrace{L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega)}_{N_k \text{ vezes}} \\ u \mapsto (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq k}$$

e usar o fato de que produtos finitos e subespaços fechados de espaços de Banach separáveis [resp. reflexivos; resp. uniformemente convexos] são também separáveis [resp. reflexivos; resp. uniformemente convexos]. ■

Quanto à  $W^{k,p}(\Omega)$  ser uma álgebra de Banach ou não, deve-se observar que dadas funções  $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$  em geral não é verdade que o produto  $uv \in W^{k,p}(\Omega)$ . Como veremos mais adiante, no entanto, é uma aplicação direta do teorema da imersão de Sobolev que isso ocorre se  $kp > n$  e  $\Omega$  satisfaz a condição do cone interior. No caso geral, o seguinte resultado mais fraco é válido.



**Proposição 11.16.** (Regra de Leibnitz) Se  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  e  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , então  $\psi u \in W^{k,p}(\Omega)$  e

$$D^\alpha(\psi u)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi(x) D^{\alpha-\beta} u(x).$$

**Prova:** Lembramos que, por definição, se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  são multi-índices de mesmo comprimento, então  $\beta \leq \alpha$  significa que  $\beta_j \leq \alpha_j$  para cada índice  $j = 1, \dots, n$ . Neste caso, denotando  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ , definimos

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

A demonstração da regra de Leibnitz é feita por indução em  $|\alpha|$ . Se  $|\alpha| = 1$ , nós temos, para todo  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , usando a regra de Leibnitz para funções diferenciáveis no sentido clássico e a definição de derivada fraca (pois  $\psi \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\psi u)(D^\alpha \varphi) dx &= \int_{\Omega} u[\psi(D^\alpha \varphi)] dx = \int_{\Omega} u[D^\alpha(\psi \varphi) - \varphi(D^\alpha \psi)] dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u) \psi \varphi dx - \int_{\Omega} u(D^\alpha \psi) \varphi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} [(D^\alpha u) \psi + u(D^\alpha \psi)] \varphi dx. \end{aligned}$$

Agora, suponha que a regra de Leibnitz é válida para todos os multi-índices  $|\alpha| \leq k$  e todos  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Fixe um multi-índice  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = k + 1$ . Então  $\alpha = \beta + \gamma$  para algum  $|\beta| = k$  e para algum  $|\gamma| = 1$ . Então, para todo  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , usando a hipótese de indução repetidamente, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\psi u)(D^\alpha \varphi) dx &= \int_{\Omega} (\psi u) D^\beta (D^\gamma \varphi) dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} \left[ \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma} u \right] D^\gamma \varphi dx \\ &= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma [D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma} u] \varphi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} [D^{\sigma+\gamma} \psi D^{\beta-\sigma} u + D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma+\gamma} u] \varphi dx. \end{aligned}$$

Chamando  $\eta = \sigma + \gamma$ , de modo que  $\beta - \sigma = \beta + \gamma - (\sigma + \gamma) = \alpha - \eta$ , escrevemos

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} [D^{\sigma+\gamma} \psi D^{\beta-\sigma} u + D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma+\gamma} u] \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[ \sum_{\eta \leq \alpha} \binom{\alpha-\gamma}{\eta-\gamma} D^\eta \psi D^{\alpha-\eta} u + \sum_{\sigma \leq \alpha-\gamma} \binom{\alpha-\gamma}{\sigma} D^\sigma \psi D^{\alpha-\sigma} u \right] \varphi dx. \end{aligned}$$

Usando a identidade

$$\binom{\alpha-\gamma}{\eta-\gamma} + \binom{\alpha-\gamma}{\eta} = \binom{\alpha}{\eta},$$

obtemos

$$\int_{\Omega} (\psi u)(D^\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left[ \sum_{\eta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\eta} D^\eta \psi D^{\alpha-\eta} u \right] \varphi dx.$$

■

### 11.3.2 Teoremas de Densidade

Dos Lemas 11.5 e 11.6, segue que para cada  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  existe uma seqüência de funções em  $C^\infty(\Omega)$  que converge para  $u$  em  $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ :

**Lema 11.17.** *Se  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , então  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ , isto é,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $W^{k,p}(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .*

**Prova:** Se  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , então  $D^\alpha u \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  para cada  $0 \leq |\alpha| \leq k$ . Para cada  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , pelo Lema 11.5 nós temos que  $(D^\alpha u)_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  em  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e pelo Lema 11.6, dado  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , temos  $(D^\alpha u)_\varepsilon = D^\alpha u_\varepsilon$  em  $\Omega'$ , para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. ■

Por causa do caráter local do Lema 11.6, não podemos obter de imediato convergência em  $W^{k,p}(\Omega)$ , apenas em  $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$ . No entanto, com apenas um pouco mais de trabalho, usando um argumento de partição da unidade, podemos provar que um resultado análogo existe para todo o aberto  $\Omega$  e não apenas para subconjuntos compactos de  $\Omega$ :

**Teorema 11.18.**  *$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  é denso em  $W^{k,p}(\Omega)$ .*

**Prova:** Seja  $\{\Omega_m\}$  uma seqüência crescente de subconjuntos abertos de  $\Omega$  satisfazendo  $\Omega_m \subset\subset \Omega_{m+1}$  e  $\cup \Omega_m = \Omega$ . Seja  $\{\psi_m\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{\Omega_{m+1} - \overline{\Omega_{m-1}}\}$ ,  $\Omega_0$  e  $\Omega_{-1}$  sendo definidos como sendo o conjunto vazio. Então, dados  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  e  $\varepsilon > 0$ , usando o Lema 11.17 podemos escolher  $\varepsilon_m \leq \min\{\text{dist}(\Omega_{m+1}, \partial\Omega_{m+2}), \text{dist}(\Omega_{m-2}, \partial\Omega_{m-1})\}$  satisfazendo

$$\|(\psi_m u)_{\varepsilon_m} - \psi_m u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Definindo  $v_m = (\psi_m u)_{\varepsilon_m}$ , notamos que, à exceção de um número finito, todos os  $v_m$  se anulam em qualquer  $\Omega' \subset\subset \Omega$  dado (de fato,  $\text{supp}(\psi_m u) \subset \Omega_{m+1} - \Omega_{m-1}$  e  $\text{supp} v_m \subset \Omega_{m+2} - \Omega_{m-2}$ ). Conseqüentemente, a função  $v = \sum v_m$  está definida e pertence a  $C^\infty(\Omega)$ . Além disso,

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\| \sum (\psi_m u)_{\varepsilon_m} - \left( \sum \psi_m \right) u \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum \|(\psi_m u)_{\varepsilon_m} - \psi_m u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

■

O espaço  $C^\infty(\Omega)$  admite funções que não são suaves até a fronteira de  $\Omega$  (isto é, não admitem uma extensão local diferenciável passando pela fronteira de  $\Omega$ ); estas são as funções que não são limitadas em  $\Omega$  ou tais que alguma de suas derivadas parciais não é limitada em  $\Omega$ . É natural indagar se é possível aproximar funções em  $W^{k,p}(\Omega)$  por funções em  $C^\infty(\overline{\Omega})$ . O próximo contra-exemplo mostra que isso não é possível para todo aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 11.19.** Seja  $\Omega = B_1(0) \setminus \{x_n = 0\}$ , isto é,  $\Omega$  é uma bola  $n$ -dimensional sem o seu plano equatorial  $(n-1)$ -dimensional; denotando o hemisfério superior por  $B_1^+(0)$  e o hemisfério inferior por  $B_1^-(0)$ , temos  $\Omega = B_1^+(0) \cup B_1^-(0)$ . A função

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_1^+(0), \\ 0 & \text{se } x \in B_1^-(0), \end{cases}$$

pertence a  $W^{k,p}(\Omega)$  para qualquer  $k$  (suas derivadas parciais de todas as ordens são identicamente nulas), mas ela não pode ser aproximada por elementos em  $C^\infty(\overline{\Omega})$  (veja Exercício 11.4). □

No entanto, é possível substituir  $C^\infty(\Omega)$  por  $C^\infty(\overline{\Omega})$  para uma grande classe de abertos que incluem abertos de classe  $C^1$ . O obstáculo que deu origem ao contra-exemplo anterior foi o fato do aberto estar localizado em ambos os lados de seu bordo.

**Definição.** Um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  satisfaz a **condição do segmento** se, para todo  $x \in \partial\Omega$ , existe  $\varepsilon > 0$  e um vetor não-nulo  $v_x \in \mathbb{R}^n$  tais que se  $y \in B_\varepsilon(x) \cap \overline{\Omega}$ , então  $y + tv_x \in \Omega$  para todo  $0 < t < 1$ .

Note que se  $z \in \partial\Omega \cap B_\varepsilon(x)$  e  $z + tv_x \in \Omega$  para todo  $0 < t < 1$ , então  $z - tv_x \notin \Omega$  para  $t$  suficientemente pequeno. De fato, se tivéssemos  $z - tv_x \in \Omega$  para todo tal  $t$ , então teríamos  $z - tv_x \in \Omega \cap B_\varepsilon(x)$  para  $t$  suficientemente pequeno e então teríamos, pela condição do segmento, que  $(z - tv_x) + tv_x = z \in \Omega$ , contradizendo  $z \in \partial\Omega$ . Um aberto que satisfaz a condição do segmento não pode portanto estar simultaneamente em ambos os lados de qualquer porção considerada de sua fronteira. Abertos com fronteira de classe  $C^1$  satisfazem a condição do segmento (veja Exercício 11.5).

**Teorema 11.20.** *Seja  $\Omega$  um aberto que satisfaz a condição do segmento. Então  $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$  é denso em  $W^{k,p}(\Omega)$ .*

**Prova:** Para mostrar isso, basta provar que o conjunto das restrições a  $\Omega$  das funções de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $W^{k,p}(\Omega)$ .

Em primeiro lugar, mostraremos que qualquer função  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  pode ser aproximada por funções em  $W^{k,p}(\Omega)$  com suporte limitado (é claro que se  $\Omega$  já é limitado, não há nada a fazer). Com efeito, fixe uma função  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  satisfazendo  $f \equiv 1$  in  $B_1(0)$ ,  $f \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ ; seja  $M > 0$  uma constante tal que  $|D^\alpha f| \leq M$  para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k$ . Tome  $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ , de modo que  $f_\varepsilon \equiv 1$  in  $B_{1/\varepsilon}(0)$  e  $|D^\alpha f| \leq M\varepsilon^{|\alpha|} \leq M$ , se  $\varepsilon \leq 1$ . Se  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , então  $u_\varepsilon = f_\varepsilon u \in W^{k,p}(\Omega)$  e tem suporte limitado. Além disso, para  $\varepsilon \leq 1$  e  $|\alpha| \leq k$ ,

$$|D^\alpha u_\varepsilon(x)| = \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} f_\varepsilon(x) \right| \leq M \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^\beta u(x)|,$$

ou seja,

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde  $C = C(M, k)$ . Portanto, denotando  $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_{1/\varepsilon}(0))$ , nós temos

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)} + \|u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Em vista disso, podemos assumir que o conjunto  $K = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$  é limitado.

Seja  $F = \bar{K} \setminus \bigcup_{x \in \partial\Omega} U_x$ , onde  $U_x$  são bolas abertas com a propriedade mencionada na definição da condição do segmento.  $F$  é compacto e  $F \subset \Omega$ , logo existe um aberto  $\Omega_0$  tal que  $F \subset \subset \Omega_0 \subset \subset \Omega$ . Como  $\bar{K}$  é compacto, podemos escolher um número finito dos abertos  $U_x$  e escrever  $\bar{K} \subset U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_N$ . Além disso, podemos encontrar outros abertos  $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_N$  tais que  $\tilde{U}_j \subset \subset U_j$  para  $j = 0, \dots, N$  e ainda  $\bar{K} \subset \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_N$ .

Seja  $\{\psi_j\}$  uma partição da unidade de classe  $C^\infty$  subordinada a  $\{\tilde{U}_j\}_{0 \leq j \leq N}$ . Seja  $u_j = \psi_j u$ . Suponha que para cada  $j$  nós podemos encontrar  $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|u_j - \varphi_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{N+1}.$$

Então, se  $\varphi = \sum_{j=0}^N \varphi_j$ , nós obteríamos

$$\|u - \varphi\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{j=0}^N \|u_j - \varphi_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon,$$

provando o teorema.

Para encontrar  $\varphi_0$ , basta usar o Lema 11.17, já que  $\text{supp } u_0 \subset \tilde{U}_0 \subset \subset \Omega$ . Para encontrar as funções  $\varphi_j$  restantes, fixe  $j = 1, \dots, N$ . Estenda  $u_j$  como sendo identicamente nula fora de  $\Omega$ . Logo,  $u_j \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ , onde  $\Gamma = \tilde{U}_j \cap \partial\Omega$ . Seja  $v$  o vetor não-nulo associado à bola  $U_j$  na definição da condição do segmento. Defina

$$\Gamma_t = \Gamma - tv,$$

onde  $t$  satisfaz  $0 < t < \min \left\{ 1, \frac{\text{dist}(\tilde{U}_j, \mathbb{R}^n \setminus U_j)}{\|v\|} \right\}$ . Então  $\Gamma_t \subset U_j$  e, devido à condição do segmento,

$$\Gamma_t \cap \bar{\Omega} = \emptyset.$$

Defina  $u_{j,t}(x) = u_j(x + tv)$ , de modo que  $u_{j,t} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_t)$ . Como o operador translação é contínuo em  $L^p(\Omega)$ , segue que  $u_{j,t} \rightarrow u_j$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ , quando  $t \rightarrow 0^+$ , logo basta encontrar  $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\|u_{j,t} - \varphi_j\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  é suficientemente pequeno. Para isso, como  $\Omega \cap U_j \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_t$ , é suficiente usar o Lema 11.17 novamente. ■

**Corolário 11.21.**  $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova:** O resultado segue imediatamente da demonstração do teorema anterior, em que na verdade mostramos que o conjunto das restrições a  $\Omega$  das funções de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $W^{k,p}(\Omega)$ , o que vale em particular para  $\Omega = \mathbb{R}^n$  e neste caso o conjunto das restrições é simplesmente  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Vamos considerar uma outra maneira, mais direta, de provar este resultado (o argumento a seguir é mais geral, podendo ser utilizado com pequenas modificações para provar o mesmo resultado para espaços de Sobolev em variedades Riemannianas completas quando  $k = 1$ ). Tome uma função decrescente  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , tal que

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq 0, \\ 0 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Como  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ , basta provar que toda função  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  pode ser aproximada em  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  por funções em  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Afirmamos que as funções suaves de suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$

$$u_m(x) = u(x)f(|x| - m)$$

convergem para  $u$  em  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Vamos verificar primeiro o caso  $p = 1$ . Quando  $m \rightarrow \infty$ , nós temos que  $u_m(x) \rightarrow u(x)$  para todo ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ ; como  $|u_m(x)| \leq |u(x)|$  e  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que  $u_m \rightarrow u$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Além disso, como

$$\nabla u_m(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{se } |x| \leq m, \\ \nabla u(x)f(|x| - m) + u(x)f'(|x| - m)\frac{x}{|x|} & \text{se } |x| \leq m, \end{cases}$$

temos que, quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $\nabla u_m(x) \rightarrow \nabla u(x)$  para todo ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $|\nabla u_m(x)| \leq |\nabla u(x)| + |u(x)| \sup_{t \in [0,1]} |f'| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Portanto, novamente concluímos do Teorema da Convergência Dominada que  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Como a convergência dos gradientes em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  implica na convergência de todas as derivadas parciais de primeira ordem em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , concluímos que  $u_m \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Para  $k \geq 2$ , usamos a fórmula de Leibnitz. ■

### 11.3.3 Os espaços $H^{k,p}(\Omega)$

Pode-se também definir

$$H^{k,p}(\Omega) = \text{o completamento de } \left\{ u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{k,p} < \infty \right\} \text{ sob a norma } \|u\|_{k,p}.$$

Durante muitos anos havia confusão sobre a relação entre os espaços  $H^{k,p}(\Omega)$  e  $W^{k,p}(\Omega)$ . O próximo resultado, devido a Meyers e Serrin ([Meyers-Serrin]), mostra que eles são a mesma coisa.

**Teorema 11.22.**  $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$  para todo aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e para todos  $k, p$ .

**Prova:** Como  $W^{k,p}(\Omega)$  é completo, temos imediatamente a inclusão  $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ . A inclusão recíproca  $W^{k,p}(\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega)$  segue da densidade de  $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ . ■

### 11.3.4 Caracterização dos Espaços $W_0^{k,p}(\Omega)$

As funções  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  são, a grosso modo, as funções  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  que se anulam na fronteira  $\partial\Omega$ . É necessário dar um sentido preciso a esta noção, já que as funções em  $W^{k,p}(\Omega)$  são definidas somente a menos de conjuntos de medida nula e a fronteira  $\partial\Omega$  é um conjunto de medida nula.

**Lema 11.23.** *Se  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  satisfaz  $\text{supp } u \subset\subset \Omega$ , então  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ .*

**Prova:** Seja  $\Omega_0$  um aberto que satisfaz a condição do segmento tal que  $\text{supp } u \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \Omega$ . Escolha uma função corte  $\eta \in C_0^\infty(\Omega_0)$  tal que  $\eta \equiv 1$  em  $\text{supp } u$ ; logo,  $\eta u = u$ . Pelo Teorema 11.20, existe uma seqüência de funções  $(u_m) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $u_m|_{\Omega} \rightarrow u$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ . Logo  $\eta u_m \rightarrow \eta u$  em  $W^{k,p}(\Omega)$  e portanto  $\eta u = u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ . ■

**Teorema 11.24.** *Seja  $\Omega$  um aberto de classe  $C^1$ . Se  $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , então  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  se e somente se  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ .*

**Prova:** Suponha que  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ . Para obter uma seqüência de funções em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  que converge para  $u$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ , assumamos inicialmente que  $\text{supp } u \subset\subset \Omega$ . Fixe uma função  $f \in C^1(\mathbb{R})$  tal que  $|f(t)| \leq |t|$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \leq 1, \\ t & \text{se } |t| \geq 2, \end{cases}$$

e defina a seqüência de funções

$$u_j = \frac{1}{j} f(ju). \quad (11.12)$$

Pela regra da cadeia  $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$  e pelo teorema da convergência dominada temos que  $u_j \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ . Com efeito,  $u_j(x) \rightarrow u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ , porque se  $u(x) = 0$ , então  $u_j(x) = 0$  para todo  $j$ , e se  $u(x) \neq 0$ , então  $u_j(x) = \frac{1}{j} ju(x) = u(x)$  para todo  $j$  suficientemente grande; além disso,

$$|u_j(x)| = \frac{1}{j} |f(ju(x))| \leq \frac{1}{j} |ju(x)| = |u(x)| \in L^p(\Omega).$$

Isso prova que  $u_j \rightarrow u$  em  $L^p(\Omega)$ . Analogamente,  $\partial_i u_j(x) \rightarrow \partial_i u(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ , pois  $\partial_i u_j(x) = f'(ju(x)) \partial_i u(x)$  e  $f'(ju(x)) = 1$  se  $u(x) \neq 0$ , para todo  $j$  suficientemente grande, enquanto que  $f'(ju(x)) = 0$  se  $u(x) = 0$ , mas o conjunto dos pontos  $x \in \Omega$  tais que  $u(x) = 0$  e  $\partial_i u(x) \neq 0$  tem medida nula (Corolário 11.12). Finalmente,  $|\partial_i u_j(x)| \leq (\sup_{\mathbb{R}} |f'|) |\partial_i u(x)| \in L^p(\Omega)$ , o que prova que  $\partial_i u_j \rightarrow \partial_i u$  em  $L^p(\Omega)$  para todo índice  $i$ . Como  $\text{supp } u_j \subset \{x \in \Omega : |u(x)| \geq 1/j\} \subset \text{supp } u \subset\subset \Omega$ , segue do lema anterior que  $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e, portanto,  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Se não valer  $\text{supp } u \subset\subset \Omega$ , consideramos os truncamentos  $\eta_k u$ , onde  $\eta_k$  é definida por  $\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right)$  para uma função  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  que satisfaz  $0 \leq \eta \leq 1$  e

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Os truncamentos  $\eta_k u$  satisfazem  $\text{supp } (\eta_k u) \subset\subset \Omega$ , logo podemos aplicar o argumento anterior para concluir que  $\eta_k u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Como  $\eta_k u \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(\Omega)$ , segue que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Reciprocamente, suponha  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Usando cartas locais, é suficiente considerar o semicilindro superior

$$Q_+ = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \text{ e } 0 < x_n < 1\},$$

e provar que toda  $u \in W^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$  que é o limite em  $W^{1,p}(Q_+)$  de uma seqüência  $(u_j) \subset C^\infty(Q_+)$  tal que  $u_j = 0$  em  $Q_0 = \overline{Q}_+ \cap \partial\mathbb{R}_+^n$  satisfaz  $u = 0$  em  $Q_0$ .

Sejam  $u \in W^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$  e  $(u_j) \subset C^\infty(Q_+)$  uma tal seqüência. Como  $u_j = 0$  em  $Q_0$ , para todo  $(x', x_n) \in Q_+$  nós temos

$$|u_j(x', x_n)| \leq \int_0^{x_n} |\partial_n u_j(x', t)| dt.$$

Integrando com respeito a  $x_n$ , de 0 a  $\varepsilon > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)| dx_n &\leq \int_0^\varepsilon \left[ \int_0^{x_n} |\partial_n u_j(x', t)| dt \right] dx_n \\ &\leq \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j(x', t)| dt dx_n \\ &= \varepsilon \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j(x', t)| dt. \end{aligned}$$

Integrando agora com respeito a  $x'$ , temos

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \leq 1} \int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)| dx' dx_n \leq \int_{|x'| \leq 1} \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j(x', x_n)| dx' dx_n.$$

Mantendo  $\varepsilon$  fixo e fazendo  $j \rightarrow \infty$ , segue pelo teorema de Fubini e do fato de  $u_j \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(Q_+)$  que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \leq 1} \int_0^\varepsilon |u(x', x_n)| dx' dx_n \leq \int_{|x'| \leq 1} \int_0^\varepsilon |\partial_n u_j| dx' dx_n.$$

Agora, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , como  $u \in C(\overline{Q}_+)$ , obtemos pelo teorema do valor médio para integrais que

$$\int_{|x'| \leq 1} |u(x', 0)| dx' = 0,$$

e portanto  $u = 0$  em  $Q_0$ . ■

**Corolário 11.25.** *Seja  $\Omega$  um aberto de classe  $C^1$ . Se  $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^{k-1}(\overline{\Omega})$ , então  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  se e somente se  $D^\alpha u = 0$  em  $\partial\Omega$  para todo multi-índice  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$ .*

**Prova:** Se  $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^{k-1}(\overline{\Omega})$ , então  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  se e somente se existe uma seqüência  $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\Omega)$  para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k$ . Portanto, se  $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^{k-1}(\overline{\Omega})$  e  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ , então  $D^\alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$ , e o teorema anterior implica que  $D^\alpha u = 0$  em  $\partial\Omega$  para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$ . Reciprocamente, se  $D^\alpha u = 0$  em  $\partial\Omega$  para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$ , o teorema anterior implica que  $D^\alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$ , logo, para cada multi-índice  $0 \leq |\alpha| \leq k-1$ , existe uma seqüência  $(u_m^{|\alpha|}) \subset C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $D^\alpha u_m^{|\alpha|} \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\Omega)$ . Vamos mostrar que isso implica que  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ .

De fato, se

$$\begin{aligned} u_m^0 &\rightarrow u && \text{em } L^p(\Omega), \\ Du_m^0 &\rightarrow Du && \text{em } L^p(\Omega), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Du_m^1 &\rightarrow Du && \text{em } L^p(\Omega), \\ D^2 u_m^1 &\rightarrow D^2 u && \text{em } L^p(\Omega), \end{aligned}$$

então

$$u_m^1 \rightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Isso segue da desigualdade de Poincaré que será vista adiante no capítulo, pois

$$\|u_m^1 - u_m^0\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du_m^1 - Du_m^0\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Aplicando este fato indutivamente às seqüências  $(u_m^{|\alpha|})$ , concluímos que  $D^\alpha u_m^{k-1} \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\Omega)$ , para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , logo  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ . ■

Mesmo que tenhamos apenas  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  é possível dar um sentido a  $u|_{\partial\Omega}$  como veremos no final deste capítulo, quando considerarmos o traço de funções em espaços de Sobolev.

### 11.3.5 Extensões de Funções em Espaços de Sobolev

Sob certas hipóteses no domínio  $\Omega$ , funções nos espaços de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  podem ser estendidas a funções em  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . Note que simplesmente estender  $u$  como sendo 0 fora de  $\Omega$  não vai funcionar em geral (considere o Exemplo 11.4). É preciso inventar um método de estender  $u$  que preserve as derivadas fracas no cruzamento da fronteira  $\partial\Omega$ . O método que vamos considerar é o método da reflexão, que tem a desvantagem de funcionar apenas em abertos limitados com fronteiras suaves ou em um semi-espaço. É possível definir extensões em domínios muito menos regulares (veja [Adams]).

**Teorema 11.26.** *Existe um operador linear contínuo*

$$E : W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que  $Eu|_{\Omega} = u$ , ou seja,

$$\|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, k, p) \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

com  $C = C(n, k, p)$ . Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado de classe  $C^1$ , então para todo  $\Omega' \supset \supset \Omega$  existe um operador linear contínuo

$$E : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{k,p}(\Omega')$$

tal que  $Eu|_{\Omega} = u$ , ou seja,

$$\|Eu\|_{W_0^{k,p}(\Omega')} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

com  $C = C(n, k, p, \Omega)$ .

**Prova:** Caso  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ .

Dada uma função  $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , defina

$$Eu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x_n > 0, \\ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u(x', -ix_n) & \text{se } x_n \leq 0, \end{cases}$$

sendo que os coeficientes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$  são as únicas soluções do sistema linear de  $k+1$  equações em  $k+1$  incógnitas

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-i)^j \lambda_i = 1, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Então  $Eu \in C^k(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . Para verificar isso, note que se  $x_n \leq 0$ , para todo  $j = 0, \dots, k$  temos

$$\frac{\partial^j [Eu]}{\partial x_n^j}(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i (-i)^j \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x', -ix_n),$$

de modo que

$$\frac{\partial^j [Eu]}{\partial x_n^j}(x', 0^-) = \sum_{i=1}^{k+1} (-i)^j \lambda_i \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x', 0^+) = \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x', 0^+);$$

em geral, para um multi-índice  $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ , temos

$$D^\alpha(Eu)(x) = \frac{\partial^{\alpha_n} \partial^{|\alpha'|} [Eu]}{\partial x_n^{\alpha_n} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i (-i)^{\alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_n} \partial^{|\alpha'|} u}{\partial x_n^{\alpha_n} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}(x', -ix_n),$$

de modo que

$$D^\alpha(Eu)(x', 0^-) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i (-i)^{\alpha_n} D^\alpha u(x', 0^+) = D^\alpha u(x', 0^+).$$

Além disso, para todo  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , se  $x_n \leq 0$  vale

$$|D^\alpha(Eu)(x', x_n)| \leq \sum_{i=1}^{k+1} |\lambda_i| i^{|\alpha|} |D^\alpha u(x', -ix_n)|,$$

usando uma estimativa grosseira; denotando

$$C_k = (k+1)^{1+1/p} \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sum_{i=1}^{k+1} |\lambda_i| i^{|\alpha|-1/p},$$

e tomando  $C = (k+1)^p C_k + 1$ , segue que

$$\|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)},$$

pois

$$\|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)} + \|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}_-^n)}$$

e, usando a desigualdade elementar  $\left| \sum_{i=1}^N a_i \right|^p \leq N^p \sum_{i=1}^N |a_i|^p$ ,

$$\begin{aligned} \|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}_-^n)} &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left( \int_{\mathbb{R}_-^n} |D^\alpha(Eu)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left( \sum_{i=1}^{k+1} \int_{\mathbb{R}_-^n} (k+1)^p |\lambda_i|^p i^{p|\alpha|} |D^\alpha u(x', -ix_n)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq (k+1) \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left[ (k+1)^{1/p} \sum_{i=1}^{k+1} |\lambda_i| i^{|\alpha|} \left( \int_{\mathbb{R}_-^n} |D^\alpha u(x', -ix_n)|^p dx \right)^{1/p} \right] \\ &= (k+1)^{1+1/p} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sum_{i=1}^{k+1} |\lambda_i| i^{|\alpha|-1/p} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} |D^\alpha u(y', y_n)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq C_k \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} |D^\alpha u(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por aproximação, podemos estender  $E$  continuamente a todo  $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . De fato, se  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , pelo Teorema 11.20 existe uma seqüência  $(u_m) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  tal que  $u_m \rightarrow u$  em  $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . Como o operador de extensão  $E$  é linear, temos

$$\|Eu_k - Eu_l\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_k - u_l\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)},$$



para todos os inteiros  $k, l$ , ou seja,  $(Eu_m)$  é uma seqüência de Cauchy em  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ , e portanto converge para algum elemento em  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  que nós definimos como sendo  $Eu$ . Claramente,  $Eu$  não depende da seqüência  $u_m$  escolhida e satisfaz todas as condições do enunciado deste teorema.

*Caso  $\Omega$  é um aberto limitado de classe  $C^1$ .*

Denote por

$$E_0 : W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

o operador extensão obtido anteriormente.

Dado  $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ , existe uma cobertura finita  $\{\Omega_j\}_{j=1,\dots,N}$  de  $\partial\Omega$  por abertos  $\Omega_j \subset \Omega'$ , e  $C^1$ -difeomorfismos  $\psi_j : \Omega_j \rightarrow B_1(0)$  satisfazendo  $\psi_j(\Omega_j \cap \Omega) = B_1(0) \cap \mathbb{R}_+^n$  e  $\psi_j(\Omega_j \cap \partial\Omega) = B_1(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ . Tome  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  de modo que  $\{\Omega_j\}_{j=0,1,\dots,N}$  seja uma cobertura aberta de  $\Omega$  e seja  $\eta_j$  uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Então, pela Proposição 11.13, e porque  $\eta_j u$  tem suporte compacto,

$$(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1} \in W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n),$$

donde, para  $j = 1, \dots, N$ ,

$$E_0[(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}] \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n),$$

e daí,

$$E_0[(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}] \circ \psi_j \in W_0^{k,p}(\Omega_j).$$

Logo, definindo

$$Eu = \eta_0 u + \sum_{j=1}^N E_0[(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}] \circ \psi_j,$$

temos  $Eu \in W_0^{k,p}(\Omega')$ ,  $Eu = u$  em  $\Omega$  e

$$\|Eu\|_{W_0^{k,p}(\Omega')} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

■

## 11.4 Teoremas de Imersão

São principalmente as características de imersão dos espaços de Sobolev que os fazem tão úteis no estudo de EDPs.

### 11.4.1 Teoremas de Imersão Contínua: O Caso $k < n/p$

Se  $kp < n$ , denotaremos

$$p^* = \frac{np}{n - kp}.$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Note que  $p^* > p$ .

A maior parte dos resultados sobre imersões dos espaços de Sobolev é devida ao próprio Sobolev, com alguns refinamentos de Gagliardo e Morrey (este estendeu as imersões a espaços de Hölder). A seguinte demonstração é devida a Nirenberg [Nirenberg]. Ela usa simplesmente o teorema fundamental do cálculo, a desigualdade de Hölder generalizada e o teorema de Fubini. Lembre-se que se  $p_1, \dots, p_m \geq 1$  são números tais que

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

e  $u_1, \dots, u_m$  são funções tais que  $u_j \in L^{p_j}(\Omega)$  para  $j = 1, \dots, m$ , a desigualdade de Hölder generalizada diz que

$$\int_{\Omega} u_1 \dots u_m \, dx \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \dots \|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}.$$

**Lema 11.27.** (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Se  $1 \leq p < n$ , então existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que para todo  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Prova:** Como por definição  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , basta provar o resultado acima para funções  $u \in C_0^1(\Omega)$ . De fato, se o resultado é válido para tais funções, dada  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , podemos tomar uma seqüência  $\{u_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $u_k \rightarrow u$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ; aplicando o resultado a  $u_k - u_l$ , obtemos

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du_k - Du_l\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u_k - u_l\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

o que prova que  $\{u_k\}$  também é uma seqüência de Cauchy em  $L^{p^*}(\Omega)$  e portanto  $u_k \rightarrow u$  em  $L^{p^*}(\Omega)$ . Daí segue que a desigualdade é válida para todo  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Caso  $p = 1$ .*

Como  $u$  tem suporte compacto, para cada  $i = 1, \dots, n$  nós temos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \, dy_i,$$

logo

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i,$$

de modo que

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Esta desigualdade é agora integrada sucessivamente em cada uma das variáveis  $x_1, \dots, x_n$  e a desigualdade de Hölder generalizada é aplicada depois de cada integração para  $m = p_1 = \dots = p_m = n-1$ . Assim, integrando na primeira variável  $x_1$ , nós obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \, dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \, dx_1 \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \, dx_1 \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_i \, dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Integrando em seguida com respeito à variável  $x_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_2 \\ & = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \right] dx_2 \\ & \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Continuando desta maneira, finalmente obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

donde

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \|Du\|_{L^1},$$

que é a desigualdade de Sobolev para  $p = 1$ .

*Caso*  $1 < p < n$ .

O caso geral pode ser obtido usando a desigualdade acima para  $p = 1$  substituindo  $u$  por uma potência de  $|u|$  e usando a desigualdade de Hölder. Com efeito, se  $\gamma > 1$ , temos

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma \frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \leq \gamma \| |u|^{\gamma-1} \|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \|Du\|_{L^p}.$$

Escolhemos então  $\gamma$  de tal modo que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1) \frac{p}{p-1},$$

ou seja,  $\gamma = p \frac{n-1}{n-p}$ , e portanto  $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1) \frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p}$ . Daí

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq p \frac{n-1}{n-p} \|Du\|_{L^p}.$$

■

O expoente  $p^*$  na desigualdade acima não é arbitrário. De fato, se  $1 \leq p < n$ , para que uma desigualdade da forma

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

seja válida para todo  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos que ter necessariamente  $q = p^*$ . Para ver isso, fixe qualquer  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  não-nula e defina para  $\lambda > 0$

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Nós temos

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx \right)^{1/q} = \left( \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy \right)^{1/q} = \lambda^{-n/q} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \\ \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p dx \right)^{1/p} = \left( \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy \right)^{1/p} = \lambda^{1-n/p} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Como  $\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ , segue que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Se  $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} \neq 0$ , fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  ou  $\lambda \rightarrow \infty$ , conforme o sinal deste expoente, obtemos  $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0$ , uma contradição. Portanto, necessariamente  $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} = 0$ , ou seja,  $q = \frac{np}{n-p}$ .

Usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, obtemos o nosso primeiro resultado de imersão contínua:

**Teorema 11.28.** (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Se  $1 \leq p < n$ , então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Usando interpolação de espaços  $L^p$ , este resultado pode ser ligeiramente melhorado.

**Corolário 11.29.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Se  $1 \leq p < n$ , então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo  $p \leq q \leq p^*$ .

**Prova:** Por definição, vale a imersão  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , enquanto que pelo Teorema 11.28 vale a imersão  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ . A propriedade de interpolação dos espaços  $L^p$  implica que para todo  $p < q < p^*$  nós temos

$$L^p(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

e

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\lambda \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\lambda},$$

onde  $\lambda$  é definido por  $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{p^*}$ . Logo,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\lambda+1-\lambda} = C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

■

**Teorema 11.30.** (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

**Prova:** Este resultado é obtido através de iteração do Teorema 11.28. Defina para cada  $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{p_j^*} = \frac{1}{p} - \frac{j}{n},$$

ou seja,

$$p_j^* = \frac{np}{n-jp}.$$

Então

$$(p_j^*)^* = p_{j+1}^*.$$

De fato,

$$(p_j^*)^* = \frac{np_j^*}{n-p_j^*} = \frac{n \frac{np}{n-jp}}{n - \frac{np}{n-jp}} = \frac{np}{n-jp-p} = \frac{np}{n-(j+1)p} = p_{j+1}^*.$$

Seja  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ . Então  $D^\alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k-1$ , e pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg temos

$$\|D^\alpha u\|_{L^{p_1^*}(\Omega)} \leq C(n,p) \|D^\alpha u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C(n,p) \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)},$$

de modo que obtemos a imersão

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-1,p_1^*}(\Omega).$$

Usando o mesmo argumento, segue que

$$W_0^{k-1,p_1^*}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-2,(p_1^*)^*}(\Omega) = W_0^{k-2,p_2^*}(\Omega).$$

Continuando desta maneira, após  $k$  iterações obtemos

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p_{k-1}^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(p_{k-1}^*)^*}(\Omega) = L^{p_k^*}(\Omega) = L^{p^*}(\Omega).$$

■

**Corolário 11.31.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo  $p \leq q \leq p^*$ .

**Prova:** É idêntica à do Corolário 11.29. ■

**Corolário 11.32.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo  $1 \leq q \leq p^*$ .

**Prova:** Como  $\Omega$  é limitado, vale a imersão contínua  $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  para qualquer  $1 \leq q \leq p^*$ . Compondo esta imersão com a imersão contínua do corolário anterior, obtemos o resultado desejado. ■

Em geral,  $W_0^{k,p}(\Omega)$  não pode ser substituído por  $W^{k,p}(\Omega)$  no Teorema 11.30, se  $\Omega$  é um aberto qualquer de  $\mathbb{R}^n$ . Esta substituição pode ser feita, contudo, para a grande classe de abertos que satisfazem a condição do cone interior, incluindo abertos com fronteiras de Lipschitz, o que inclui abertos de classe  $C^1$ :

**Teorema 11.33.** (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $p \leq q \leq p^*$ .

**Prova:** Nós provaremos o resultado apenas para o caso em que  $\Omega$  é um aberto limitado de classe  $C^1$ . A demonstração para o caso geral pode ser vista em [Adams].

Usando o Teorema 11.26, o Corolário 11.21 e o Teorema 11.31, obtemos

$$W^{k,p}(\Omega) \xrightarrow{E} W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, existe uma constante  $C = C(n,p,k,\Omega)$  tal que

$$\|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Como  $Eu|_{\Omega} = u$ , temos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|Eu\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

donde segue o resultado. ■

Se  $\Omega$  é um aberto ilimitado de  $\mathbb{R}^n$  com volume finito (em particular, não satisfaz a condição do cone interior), então não existe a imersão  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  para nenhum  $q > p$ . Para uma demonstração deste fato, veja [Adams], Teorema 5.30.

**Corolário 11.34.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo  $1 \leq q \leq p^*$ .

**Prova:** É idêntica à do Corolário 11.32. ■

Vale a recíproca deste corolário, no sentido de que se  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  tal que existe a imersão contínua

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para  $1 \leq q < p$ , então  $\Omega$  tem necessariamente volume finito. Para uma demonstração deste fato, veja [Adams], Teorema 6.38.

Nós terminamos esta seção com um teorema de imersão de espaços de Sobolev em espaços de Sobolev. Este resultado é extremamente útil em argumentos de “bootstrapping” usados, por exemplo, na demonstração da regularidade de soluções de equações diferenciais parciais.

**Teorema 11.35.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$$

para todo  $p \leq q \leq p^*$ . Se substituirmos  $W$  por  $W_0$ , o resultado é válido para abertos arbitrários.

**Prova:** Este resultado segue do caso  $m = 0$ . Se  $u \in W^{k+m,p}(\Omega)$ , então  $D^\alpha u \in W^{k,p}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq m$ . Logo,  $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq m$ , e portanto  $u \in W^{m,q}(\Omega)$ . Além disso,

$$\|u\|_{W^{m,q}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{W^{k+m,p}(\Omega)}.$$

■

## 11.4.2 Teoremas de Imersão Contínua: O Caso $k = n/p$

Em vista do fato que

$$p^* = \frac{np}{n - kp} \rightarrow \infty \quad \text{quando } k \rightarrow \frac{n}{p},$$

poderia-se esperar que se  $u \in W^{\frac{n}{p},p}(\Omega)$ , então  $u \in L^\infty(\Omega)$ . Isto é falso, no entanto, se  $n > 1$  (se  $n = 1$ , já sabemos que as funções fracamente diferenciáveis são absolutamente contínuas).

**Exemplo 11.36.** Se  $\Omega = (0, 1)$ , a função

$$u(t) = \log \log \left( 1 + \frac{1}{t} \right)$$

pertence a  $W^{1,n}(\Omega)$ , mas não a  $L^\infty(\Omega)$ . □

O máximo que podemos obter é  $W^{\frac{n}{p}, p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  para todo  $q \geq p$ .

**Teorema 11.37.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$  e  $k = \frac{n}{p}$ , então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

onde  $p \leq q < \infty$ . Se substituirmos  $W$  por  $W_0$ , o resultado é válido para abertos arbitrários.

**Prova:** Mais uma vez provaremos apenas o caso em que  $\Omega$  é um aberto limitado e referimos o estudante a [Adams] para uma prova do caso geral.

Consideremos primeiro o caso

$$q \geq p' = \frac{p}{p-1}.$$

Neste caso, podemos escrever  $q = \frac{nr}{n-kr}$ , onde  $r = \frac{pq}{p+q}$  satisfaz  $1 \leq r < p$ . Usando o fato de que  $\Omega$  é limitado (e, por conseguinte,  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ ) e o Teorema 11.33, obtemos

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

O caso  $p \leq q \leq p'$  segue, então, por interpolação das imersões  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  e  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$ , como na demonstração do Corolário 11.29. ■

### 11.4.3 Teoremas de Imersão Contínua: O Caso $k > n/p$

**Lema 11.38.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p > n$ , então existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que para todo  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C_{n,p} |\Omega|^{-1/p^*} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Prova:** Basta provar o resultado para funções  $u \in C_0^1(\Omega)$ , pois se  $(u_m) \subset C_0^1(\Omega)$  é uma seqüência de Cauchy em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  convergindo para  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , a desigualdade do lema implica que  $(u_m)$  é também uma seqüência de Cauchy em  $C^0(\bar{\Omega})$ , logo a função limite  $u$  estará neste espaço e também satisfazerá a mesma desigualdade.

Para simplificar os cálculos, assuma  $|\Omega| = 1$  e defina

$$v = \frac{|u|}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}},$$

de modo que

$$\sup_{\Omega} |v| = \frac{1}{\|Du\|_{L^p(\Omega)}} \sup_{\Omega} |u|.$$

Devemos, então, mostrar que

$$\sup_{\Omega} |v| \leq C,$$

para alguma constante positiva  $C$  dependendo apenas de  $n$  e  $p$ . Para isso, usaremos o fato que

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

(isto é válido porque  $\Omega$  tem medida finita) e mostraremos que o limite do lado direito é limitado por uma constante  $C = C(n, p)$  através do uso do Lema 11.8 e da desigualdade de Hölder.

De fato, segue do Lema 11.8 e Corolário 11.14 que, para qualquer  $\gamma > 1$ , nós temos

$$\|v^\gamma\|_{L^{\frac{p}{\gamma-1}}(\Omega)} \leq \|D(v^\gamma)\|_{L^1(\Omega)} = \gamma \|v^{\gamma-1} Dv\|_{L^1(\Omega)} \leq \gamma \|v^{\gamma-1}\|_{L^{\frac{p}{\gamma-1}}(\Omega)} \|Dv\|_{L^p(\Omega)} = \gamma \|v^{\gamma-1}\|_{L^{\frac{p}{\gamma-1}}(\Omega)}.$$

Pela desigualdade de Hölder (usando  $|\Omega| = 1$ ) segue, portanto, que

$$\|v\|_{L^{\gamma \frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq \gamma^{1/\gamma} \|v\|_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{p-1}}(\Omega)} \leq \gamma^{1/\gamma} \|v\|_{L^{\frac{\gamma}{\gamma} \frac{p}{p-1}}(\Omega)}.$$

Esta é uma *desigualdade de Hölder reversa*. Agora, tome

$$\delta = \frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{p}{p-1}} > 1$$

e substitua  $\gamma$  por  $\delta^j$  para  $j = 1, 2, \dots$ . Então a desigualdade acima toma a forma

$$\|v\|_{L^{\delta^j \frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq \delta^{\frac{j}{\delta^j}} \|v\|_{L^{\delta^{j-1} \frac{n}{n-1}}(\Omega)}.$$

Iterando, começando com  $j = 1$ , segue novamente do Lema 11.8 e da desigualdade de Hölder que para qualquer inteiro  $k$  nós temos

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{\delta^k}(\Omega)} &\leq \|v\|_{L^{\delta^k \frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leq \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)}^{\prod (1 - \frac{1}{\delta^j})} \leq \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} \|Dv\|_{L^1(\Omega)}^{\prod (1 - \frac{1}{\delta^j})} \\ &\leq \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} \left( |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \|Dv\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\prod (1 - \frac{1}{\delta^j})} = \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}}. \end{aligned}$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v\|_{L^{\delta^k}(\Omega)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \delta^{\sum \frac{j}{\delta^j}} =: C_{n,p}.$$

Portanto,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C(n, p),$$

como queríamos.

Para eliminar a restrição  $|\Omega| = 1$ , basta considerar a transformação  $y = |\Omega|^{1/n} x$ . Desta forma, obtemos

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C(n, p) |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

■

Para referência, reescrevemos o resultado acima na forma seguinte:

**Teorema 11.39.** (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p > n$ , então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

**Teorema 11.40.** (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p \geq 1$  e  $k > \frac{n}{p}$ , então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$$

para todo  $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ .

**Prova:** Suponha primeiro que  $\frac{n}{p}$  não é um inteiro. Seja  $l$  o maior inteiro menor que  $\frac{n}{p}$ , ou seja,

$$l < \frac{n}{p} < l + 1.$$



Então, raciocinando como no Teorema 11.28, ou diretamente, pelo Teorema 11.35 (escrevendo  $W_0^{k,p} = W_0^{l+(k-l),p}$ ), temos

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-l,p_l^*}(\Omega)$$

onde

$$p_l^* = \frac{np}{n-lp} > p.$$

Logo  $D^\alpha u \in W_0^{1,p_l^*}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k-l-1$ , isto é, para todo  $|\alpha| < k - \frac{n}{p}$ . Como  $p_l^* > p$ , pelo Lema 11.38 concluímos que

$$D^\alpha u \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } |\alpha| < k - \frac{n}{p},$$

e que existe uma constante  $C > 0$  independente de  $u$  e  $\alpha$  tal que

$$\|D^\alpha u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto,  $u \in C^m(\overline{\Omega})$  e

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

para uma constante  $C > 0$  independente de  $u$ .

Se  $\frac{n}{p}$  é um inteiro, tome

$$l = \frac{n}{p} - 1$$

de modo que  $p_l^* = n$ . Como no argumento acima,  $D^\alpha u \in W_0^{1,n}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k-l-1 = k - \frac{n}{p}$ . Pelo Teorema 11.37,

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $q \geq n$ , portanto  $D^\alpha u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k - \frac{n}{p} - 1$  e todo  $q \geq n$ . Pelo Lema 11.36, escolhendo  $q > n$ , segue que

$$D^\alpha u \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } |\alpha| = k - \frac{n}{p},$$

portanto,  $u \in C^m(\overline{\Omega})$  e a continuidade da imersão é obtida do mesmo modo como no argumento anterior. ■

A seguinte estimativa do tipo potencial pode ser usada para obter imersões de espaços de Sobolov em espaços de Hölder. Se  $u \in L^1(\Omega)$  e  $A \subset \Omega$  é um subconjunto mensurável, definimos a média de  $u$  em  $A$  por

$$\bar{u}_A = \frac{1}{|A|} \int_A u.$$

**Lema 11.41.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado convexo e  $u \in W^{1,1}(\Omega)$ . Então, para todo subconjunto mensurável  $A \subset \Omega$ , vale*

$$|u(x) - \bar{u}_A| \leq \frac{(\text{diam } \Omega)^n}{n|A|} \int_\Omega \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\frac{1}{|A|} \int_A |u(x) - u(y)| dy \leq \frac{(\text{diam } \Omega)^n}{n|A|} \int_\Omega \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Mais geralmente, para toda bola  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$  existe uma constante  $C = C(n)$  tal que para todo  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  vale

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| dy \leq C_n \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

**Prova:** Basta provar o resultado para  $u \in C^1(\Omega)$ , pois se  $(u_m) \subset C^1(\Omega)$  é uma seqüência de Cauchy em  $W^{1,1}(\Omega)$  convergindo para  $u \in W^{1,1}(\Omega)$ , então

$$\overline{u_{m_A}} \rightarrow \overline{u_A},$$

e podemos assumir que

$$u_m(x) \rightarrow u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e que

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_m(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \rightarrow \int_{\Omega} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

O último decorre do fato de que o operador linear  $V : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$  definido por

$$(Vf)(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy$$

ser contínuo, pois, se  $R = \text{diam } \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} dy dx \right| &\leq \left( \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy \right) \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq \left( \sup_{x \in \Omega} \int_{B_R(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy \right) \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \int_{B_R(0)} \frac{1}{|z|^{n-1}} dz \|f\|_{L^1(\Omega)} = n\omega_n R \|f\|_{L^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

logo, se  $Du_m \rightarrow Du$  em  $L^1(\Omega)$ , então  $V(Du_m) \rightarrow V(Du)$  em  $L^1(\Omega)$  e, portanto, podemos assumir que  $V(Du_m)(x) \rightarrow V(Du)(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Para todos  $x, y \in \Omega$ , denotando

$$\omega = \frac{x-y}{|x-y|},$$

temos

$$u(x) - u(y) = - \int_0^{|x-y|} \frac{du}{dr}(x+r\omega) dr.$$

Integrando com respeito a  $y$  em  $A$ , obtemos

$$|A|(u(x) - \overline{u_A}) = - \int_A dy \int_0^{|x-y|} \frac{du}{dr}(x+r\omega) dr.$$

Denotando

$$V(x) = \begin{cases} \left| \frac{du}{dr}(x) \right| & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} |u(x) - \overline{u_A}| &\leq \frac{1}{|A|} \int_{|x-y| < \text{diam } \Omega} dy \int_0^{\infty} V(x+r\omega) dr \\ &= \frac{1}{|A|} \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\text{diam } \Omega} V(x+r\omega) \rho^{n-1} d\rho d\omega dr \\ &= \frac{(\text{diam } \Omega)^n}{n|A|} \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} V(x+r\omega) d\omega dr \\ &= \frac{(\text{diam } \Omega)^n}{n|A|} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} \frac{V(x+r\omega)}{r^{n-1}} r^{n-1} dr d\omega \\ &= \frac{(\text{diam } \Omega)^n}{n|A|} \int_{\Omega} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy. \end{aligned}$$

A segunda desigualdade é provada através de uma pequena modificação na demonstração acima. Escrevemos

$$|u(x) - u(y)| = \int_0^{|x-y|} \left| \frac{du}{dr} \right| (x + r\omega) dr,$$

$$\frac{1}{|A|} \int_A |u(x) - u(y)| dy = \frac{1}{|A|} \int_A dy \int_0^{|x-y|} \left| \frac{du}{dr} \right| (x + r\omega) dr,$$

e o resto segue como antes.

Para provar a terceira desigualdade, escreva

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(ty + (1-t)x) dt = (y-x) \cdot \int_0^1 Du(ty + (1-t)x) dt,$$

de modo que

$$|u(y) - u(x)| \leq |y-x| \int_0^1 |Du(ty + (1-t)x)| dt.$$

Para  $0 < s \leq r$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_s(x)} |u(y) - u(x)| ds_y &\leq \int_{\partial B_s(x)} s \int_0^1 |Du(ty + (1-t)x)| dt ds_y \\ &= \int_0^1 \int_{\partial B_s(x)} s |Du(ty + (1-t)x)| ds_y dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} z &= ty + (1-t)x, \\ \tau &= st, \end{aligned}$$

segue que  $ds_z = t^{n-1} ds_y$ ,  $d\tau = s dt$ , e  $|z-x| = t|y-x| = ts = \tau$ , de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_s(x)} |u(y) - u(x)| ds_y &\leq \int_0^s \int_{\partial B_\tau(x)} s^{n-1} \frac{|Du(z)|}{\tau^{n-1}} ds_z d\tau \\ &= \int_{B_s(x)} s^{n-1} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz. \end{aligned}$$

Daí, integrando com relação a  $s$  de 0 a  $r$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy &\leq \int_{B_r(x)} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}} \left( \int_0^r s^{n-1} \right) ds dz \\ &= \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \\ &= \frac{|y-x|^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz. \end{aligned}$$

■

Note que no caso particular em que  $\Omega = A = B_r(x)$ , temos

$$|u(x) - \bar{u}_{B_r(x)}| \leq \frac{2^n}{n\omega_n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

e

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| dy \leq \frac{2^n}{n\omega_n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

**Lema 11.42.** (Desigualdade de Morrey) *Seja  $p > n$ . Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado, então existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que para todo  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega})} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Mais geralmente, para todo  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que

$$\|u\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Prova:** Pelo Lema 11.38, já sabemos que  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  e que existe uma constante  $C$  independente de  $u$  tal que

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Sejam  $x, y \in \Omega$ ,  $r = |x - y|$  e  $A = B_r(x) \cap B_r(y)$  de modo que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \frac{1}{|A|} \int_A |u(x) - u(y)| dz \\ &\leq \frac{1}{|A|} \int_A |u(x) - u(z)| dz + \frac{1}{|A|} \int_A |u(y) - u(z)| dz. \end{aligned}$$

Segue da segunda desigualdade do lema anterior (e da observação logo após o lema) e da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|} \int_A |u(x) - u(z)| dz &\leq \frac{|B_r(x)|}{|A|} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(z)| dz \\ &\leq C_n \|Du\|_{L^p(\Omega)} \left( \int_{B_r(x)} \frac{1}{|x - z|^{\frac{(n-1)p}{p-1}}} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C_n (r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C_n r^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$|u(y) - \bar{u}_A| \leq C_n r^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-\frac{n}{p}}} \leq C_n \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Vamos agora provar a segunda desigualdade. Fixe  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tomando  $A = B_1(x)$  no lema anterior, temos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{|B_1(x)|} \int_{B_1(x)} |u(x) - u(y)| dy + \frac{1}{|B_1(x)|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy \\ &\leq C_n \int_{B_1(x)} \frac{|Du(y)|}{|x - y|^{n-1}} dy + C_{n,p} \|u\|_{L^p(B_1(x))} \\ &\leq C_n \|Du\|_{L^p(B_1(x))} \left( \int_{B_1(x)} \frac{1}{|x - z|^{\frac{(n-1)p}{p-1}}} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} + C_{n,p} \|u\|_{L^p(B_1(x))} \\ &\leq C_{n,p} \|u\|_{W^{1,p}(B_1(x))}. \end{aligned}$$

Como  $x$  é arbitrário, concluímos que

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Em particular, por um argumento de densidade segue desta desigualdade que  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^n)$  e portanto que

$$\|u\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Além disso, imitando o argumento usado no início deste lema para o caso de um aberto limitado e usando a terceira desigualdade do lema anterior, obtemos

$$[u]_{C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

■

**Teorema 11.43.** (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p \geq 1$  e  $k > \frac{n}{p}$ , então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$$

para todo  $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ , onde

$$0 < \beta < \left[ \frac{n}{p} \right] + 1 - \frac{n}{p} \quad \text{se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro,}$$

e

$$0 < \beta < 1 \quad \text{se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.}$$

**Prova:** Como na demonstração do Teorema 11.40, se  $\frac{n}{p}$  não é um inteiro, nós obtemos

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-l,p_l^*}(\Omega)$$

onde  $l = \left[ \frac{n}{p} \right]$  e  $p_l^* = \frac{np}{n-lp}$ . Logo  $D^\alpha u \in W_0^{1,p_l^*}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k-l-1$ , isto é, para todo  $|\alpha| \leq k - \left[ \frac{n}{p} \right] - 1$ . Como  $p_l^* > p$ , segue do Lema 11.42 que

$$D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{p_l^*}}(\overline{\Omega}) \quad \text{para todo } |\alpha| < k - \left[ \frac{n}{p} \right] - 1,$$

e que existe uma constante  $C > 0$  independente de  $u$  e  $\alpha$  tal que

$$\|D^\alpha u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p_l^*}}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Como

$$1 - \frac{n}{p_l^*} = 1 - \frac{n}{p} + l = \left[ \frac{n}{p} \right] + 1 - \frac{n}{p},$$

segue que

$$u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1, \left[\frac{n}{p}\right]+1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$$

e existe uma constante  $C$  independente de  $u$  tal que

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1, \left[\frac{n}{p}\right]+1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Para terminar a demonstração deste caso, use as imersões contínuas de espaços de Hölder

$$\begin{aligned} C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}), \\ C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega}) \end{aligned}$$

sempre que  $k \geq m$  e  $\alpha \geq \beta$ .

Se  $\frac{n}{p}$  é um inteiro, tome

$$l = \frac{n}{p} - 1$$

de modo que  $p_l^* = n$ . Logo, como no argumento acima,  $D^\alpha u \in W_0^{1,n}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k - l - 1 = k - \frac{n}{p}$ .

Pelo Teorema 11.35,

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $q \geq n$ , portanto  $D^\alpha u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k - \frac{n}{p} - 1$  e todo  $q \geq n$ . Segue então da desigualdade de Morrey que

$$D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{q}}(\overline{\Omega})$$

para todo  $q > n$  e, portanto,

$$u \in C^{k-\frac{n}{p}-1,\beta}(\overline{\Omega})$$

para qualquer  $0 < \beta < 1$ . A continuidade da imersão segue compondo as várias imersões contínuas como no primeiro caso e o resultado final segue da imersão contínua de espaços de Hölder. ■

Resultados análogos valem para os espaços  $W^{k,p}$  com a necessária hipótese sobre a regularidade da fronteira:

**Teorema 11.44.** (Desigualdade de Morrey) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Se  $p > n$ , então existe uma constante  $C = C(n,p)$  tal que para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  nós temos*

$$\|u\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Prova:** Como  $\Omega$  é um aberto limitado de classe  $C^1$ , dada  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  existe uma extensão  $Eu = \tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  satisfazendo

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde  $C > 0$  independe de  $u$ . Pelo Corolário 11.21, existe uma seqüência  $(u_m) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $u_m \rightarrow \tilde{u}$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . De acordo com o Lema 11.42, nós temos

$$\|u_m - \tilde{u}\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - \tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

logo  $u_m \rightarrow \tilde{u}$  em  $C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ . Portanto, usando o Lema 11.42 novamente,  $\|u_m\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$  implica

$$\|\tilde{u}\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Daí, como  $\tilde{u}$  é uma extensão de  $u$ , segue imediatamente que

$$\|u\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

■

De modo análogo à demonstração do Teorema 11.43, segue então o seguinte resultado:

**Teorema 11.45.** (Teorema de Imersão de Sobolev) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Se  $p \geq 1$  e  $k > \frac{n}{p}$ , então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$$

para todo  $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ , onde

$$0 < \beta < \left[ \frac{n}{p} \right] + 1 - \frac{n}{p} \quad \text{se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro,}$$

e

$$0 < \beta < 1 \quad \text{se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.}$$

### 11.4.4 Teoremas de Imersão Compacta

Denotaremos a imersão compacta de um espaço vetorial normado  $E$  em um espaço vetorial normado  $F$  por

$$E \hookrightarrow F.$$

Lembre-se que isso equivale a dizer que toda seqüência limitada em  $(E, \|\cdot\|_E)$  possui uma subseqüência convergente em  $(F, \|\cdot\|_F)$ .

**Teorema 11.46.** (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $1 \leq p < n$ , então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $1 \leq q < p^*$ .

**Prova:** Pelo Corolário 11.32, temos a imersão contínua

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $1 \leq q \leq p^*$ . É suficiente estabelecer o caso  $q = 1$ , pois o caso geral segue deste através de um argumento de interpolação: se  $1 < q < p^*$ , podemos escrever

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\lambda \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\lambda},$$

onde  $\lambda$  é definido por  $\frac{1}{q} = \lambda + \frac{1-\lambda}{p^*}$ , logo

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\lambda \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-\lambda};$$

assim, se  $(u_m)$  é uma seqüência limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  que possui uma subseqüência de Cauchy em  $L^1(\Omega)$ , segue desta desigualdade que a subseqüência é de Cauchy também em  $L^q(\Omega)$ .

Vamos provar o caso  $q = 1$ . Seja  $(u_m)$  uma seqüência limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , e para cada  $\varepsilon > 0$  considere a seqüência  $(u_m^\varepsilon)$ , onde  $u_m^\varepsilon = [u_m]_\varepsilon$  é a regularização de  $u_m$ . Afirmamos que para cada  $\varepsilon > 0$  a seqüência  $(u_m^\varepsilon)$  é uniformemente limitada e equicontínua. De fato,

$$|u_m^\varepsilon(x)| = \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \right| \leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u_m(x-\varepsilon z)| dz \leq \frac{1}{\varepsilon^n} \left( \max_{B_1(0)} \varphi \right) \|u_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n},$$

pois, como  $\Omega$  é limitado, vale a imersão contínua  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$  e  $(u_m)$  é portanto uma seqüência limitada em  $L^1(\Omega)$ , também. Isso prova que  $(u_m^\varepsilon)$  é uniformemente limitada. Analogamente,

$$\begin{aligned} |Du_m^\varepsilon(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} D\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_1(0)} |D\varphi(z)| |u_m(x-\varepsilon z)| dz \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \left( \max_{B_1(0)} |D\varphi| \right) \|u_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}}, \end{aligned}$$

e segue do Teorema do Valor Médio que  $(u_m^\varepsilon)$  é equicontínua. Portanto, concluímos do Teorema de Arzelá-Ascoli que uma subseqüência de  $u_m^\varepsilon$  é uma seqüência de Cauchy em  $C^0(\overline{\Omega})$  e, portanto, em  $L^1(\Omega)$ .

Agora, pelo Lema 11.5, sabemos que  $u_m^\varepsilon \rightarrow u_m$  em  $L^1(\Omega)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Afirmamos que no nosso caso, mais que isso, esta convergência é uniforme em  $m$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) [u(y) - u(x)] dy \right| \\ &\leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u_m(x - \varepsilon z) - u_m(x)| dz \\ &\leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_0^1 \left| \frac{du_m}{dt}(x - \varepsilon z t) \right| dt dz \\ &\leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_0^1 |Du_m(x - \varepsilon z t)| |z| dt dz, \end{aligned}$$

logo, integrando com respeito a  $x$ ,

$$\begin{aligned} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_{\Omega} |Du_m(x - t\varepsilon z)| dx dz dt \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \int_{B_1(0)} \varphi(z) \int_{\Omega} |Du_m(y)| dy dz dt \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} |Du_m(y)| dy \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, para cada  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon_\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\|u_m^{\varepsilon_\delta} - u_m\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\delta}{2}$$

para todo  $m$ . Para este  $\varepsilon_\delta$  existe uma subsequência  $(u_{m_j}^{\varepsilon_\delta})$  de Cauchy em  $L^1(\Omega)$ ; pela desigualdade triangular

$$\|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_{m_k}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_k}\|_{L^1(\Omega)} + \|u_{m_k}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_l}^{\varepsilon_\delta}\|_{L^1(\Omega)} + \|u_{m_l}^{\varepsilon_\delta} - u_{m_l}\|_{L^1(\Omega)}$$

segue que

$$\limsup_{k,l \rightarrow \infty} \|u_{m_k} - u_{m_l}\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta.$$

Escolhendo sucessivamente  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots$  e usando o argumento da diagonal, obtemos uma subsequência de Cauchy de  $(u_m)$  em  $L^1(\Omega)$ . ■

**Corolário 11.47.** (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Para todo  $p \geq 1$  vale*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

**Prova:** Se  $p \geq n$ , escreva

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

onde  $r < n$  é suficientemente próximo de  $n$  de tal modo que  $r^* > p$ . ■

**Teorema 11.48.** (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $1 \leq q < p^*$ .



**Prova:** Este resultado é obtido através de iteração do Teorema 11.46.

Seja  $(u_m) \subset W_0^{k,p}(\Omega)$  uma seqüência limitada. Então  $(D^\alpha u_m)$  é uma seqüência limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq k-1$ , logo possui uma subseqüência convergente em  $L^q(\Omega)$  para todo  $1 \leq q < p_1^*$  fixado. Portanto, concluímos que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-1,q}(\Omega)$$

para todo  $1 \leq q < p_1^*$ . Utilizando o mesmo argumento, concluímos que

$$W_0^{k-1,q}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-2,r}(\Omega)$$

para todo  $1 \leq r < q_1^*$ . Mas, se  $1 \leq q < p_1^*$ , então  $q_1^* = \frac{nq}{n-q} < \frac{n \frac{np}{n-p}}{n - \frac{np}{n-p}} = \frac{np}{n-2p} = p_2^*$ , logo, concluímos que

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k-2,r}(\Omega)$$

para todo  $1 \leq r < p_2^*$ . Continuando desta maneira, após  $k$  iterações obtemos o resultado desejado. ■

**Teorema 11.49.** (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo  $1 \leq q < p^*$ .

**Prova:** Usando o mesmo argumento iterativo do Teorema 11.48, vemos que é suficiente provar este resultado para  $k = 1$ . Mais uma vez, nos limitaremos a demonstrar este resultado no caso em que  $\Omega$  é um aberto limitado de classe  $C^1$  e referimos o leitor a [Adams] para a demonstração do caso geral. Neste caso, pelo Teorema 11.26, para algum aberto limitado  $\Omega' \supset \supset \Omega$  existe uma extensão contínua

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{k,p}(\Omega')$$

enquanto que pelo Teorema 11.46 temos a imersão compacta

$$W_0^{k,p}(\Omega') \hookrightarrow L^q(\Omega'),$$

para todo  $1 \leq q < p^*$ . Portanto, se  $(u_m)$  é uma seqüência limitada em  $W^{k,p}(\Omega)$ , então  $(Eu_m)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^q(\Omega')$ , logo a restrição  $(Eu_m|_\Omega) = (u_m)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^q(\Omega)$ . ■

A imersão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),$$

nenca é compacta. Por este motivo, o expoente  $p^*$  é chamado **expoente crítico**. No exemplo seguinte, construímos uma seqüência limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  que não possui nenhuma subseqüência convergente em  $L^{p^*}(\Omega)$ .

**Exemplo 11.50.** (Perda de Compacidade no Expoente Crítico) *Seja  $\Omega$  um aberto qualquer de  $\mathbb{R}^n$  e tome uma função não nula  $\phi \in C_0^\infty(B_1(0))$ . Seja  $\{a_m\}$  uma seqüência de pontos distintos de  $\Omega$  tais que  $a_m \rightarrow x_0 \in \Omega$ . Seja  $0 < r_m < 1$  uma seqüência de números positivos tais que  $B_{r_m}(a_m) \subset \Omega$  e todas as bolas  $B_{r_m}(a_m)$  são mutualmente disjuntas; em particular, devemos ter  $r_m \rightarrow 0$ . Definimos então funções  $u_m \in C_0^\infty(B_{r_m}(a_m))$  por*

$$u_m(x) = r_m^{-\frac{n-p}{p}} \phi\left(\frac{x - a_m}{r_m}\right).$$

Note que  $u_m \rightarrow 0$  exceto em  $x_0$ , e que  $u_m(x_0) \rightarrow \infty$ . Esta é exatamente a mudança de escala sob a qual as normas  $\|\cdot\|_{L^{p^*}}$  e  $\|\nabla(\cdot)\|_{L^p}$  são invariantes, isto é,

$$\begin{aligned}\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} &= \|\phi\|_{L^{p^*}(B_1(0))}, \\ \|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} &= \|\nabla\phi\|_{L^p(B_1(0))}.\end{aligned}$$

Com efeito, nós temos

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \left[ r_m^{-n} \int_{\Omega} \left| \phi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right) \right|^{p^*} dx \right]^{1/p^*} = \left[ r_m^{-n} \int_{B_1(0)} |\phi(y)|^{p^*} r_m^n dy \right]^{1/p^*} = \|\phi\|_{L^{p^*}(\Omega)},$$

e

$$\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)} = \left[ r_m^{-n+p} \int_{\Omega} \left| r_m^{-1} \nabla \phi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right) \right|^p dx \right]^{1/p} = \left[ r_m^{-n} \int_{B_1(0)} |\nabla\phi(y)|^p r_m^n dy \right]^{1/p} = \|\nabla\phi\|_{L^p(\Omega)},$$

Segue, em particular, que a seqüência  $(u_m)$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Pelo Teorema de Rellich–Kondrachov, nós temos que  $u_m \rightarrow u$  em  $L^p(\Omega)$ . E, de fato, nós podemos calcular explicitamente

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = \left[ r_m^{-n+p} \int_{\Omega} \left| \phi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right) \right|^p dx \right]^{1/p} = \left[ r_m^{-n+p} \int_{B_1(0)} |\phi(y)|^p r_m^n dy \right]^{1/p} = r_m \|\phi\|_{L^p(\Omega)},$$

de modo que  $u_m \rightarrow 0$  em  $L^p(\Omega)$ . Por outro lado, como as funções  $u_m$  tem suportes disjuntos, para todos inteiros  $k, l$  nós temos

$$\|u_k - u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \left( \|u_k\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} + \|u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} \right)^{1/p^*} = 2^{1/p^*} \|\phi\|_{L^{p^*}(B_1(0))},$$

portanto  $(u_m)$  não possui nenhuma subsequência de Cauchy em  $L^{p^*}(\Omega)$ .  $\square$

Para a maioria dos abertos ilimitados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  as imersões contínuas de Sobolev

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para  $p \leq q < p^*$  não são compactas, como o contraexemplo a seguir ilustra. Existem, no entanto, certos domínios ilimitados de  $\mathbb{R}^n$  para os quais a imersão

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta. Uma caracterização de tais domínios é dada em [Adams], Teorema 6.16; em particular, nesta classe estão incluídos os domínios *quasilimitados*, isto é, que satisfazem a condição

$$\lim_{\substack{x \in \Omega \\ |x| \rightarrow \infty}} \text{dist}(x, \partial\Omega) = 0,$$

o que inclui domínios de volume infinito. Da mesma forma, existe uma classe ainda mais restrita de domínios ilimitados de  $\mathbb{R}^n$  para os quais a imersão

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta. Tais domínios tem necessariamente volume finito. Veja [Adams], Teoremas 6.37 e 6.47.

**Exemplo 11.51.** (Perda de Compacidade em Abertos Ilimitados) Se  $\Omega$  é um aberto ilimitado de  $\mathbb{R}^n$  que possui um conjunto enumerável de bolas disjuntas  $B_R(x_m)$  de mesmo raio  $R > 0$  (por exemplo, isso vale para  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ), então não pode haver uma imersão compacta

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para nenhum  $q$ . De fato, tomando uma função não nula  $\phi \in C_0^\infty(B_R(x_1))$ , defina  $u_m$  como sendo a translação de  $\phi$  com suporte compacto em  $B_R(x_m)$ . Como

$$\|u_m\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \|\phi\|_{W_0^{k,p}(\Omega)},$$

a seqüência  $(u_m)$  é limitada em  $W_0^{k,p}(\Omega)$ , mas para qualquer  $q \geq 1$  e para quaisquer inteiros  $k, l$ , nós temos

$$\|u_k - u_l\|_{L^q(\Omega)} = \left( \|u_k\|_{L^q(\Omega)}^q + \|u_l\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{1/q} = 2^{1/q} \|\phi\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

Analogamente ao Teorema 11.35, nós temos também o seguinte resultado de imersão compacta de espaços de Sobolev em espaços de Sobolev.

**Teorema 11.52.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$  e  $k < \frac{n}{p}$ , então*

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$$

onde  $1 \leq q < \frac{np}{n-kp}$ . Se substituirmos  $W$  por  $W_0$ , o resultado é válido para abertos limitados arbitrários.

**Prova:** Este resultado segue do caso  $m = 0$ . Seja  $(u_m) \subset W^{k+m,p}(\Omega)$  uma seqüência limitada. Então  $(D^\alpha u_m)$  é uma seqüência limitada em  $W^{k,p}(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq m$ . Logo, utilizando o Teorema 11.49 e um processo de indução finita, podemos selecionar uma subseqüência  $(u_{m_j})$  de  $(u_m)$  tal que  $(D^\alpha u_{m_j})$  é uma seqüência convergente em  $L^q(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq m$ , e portanto  $(u_{m_j})$  é uma seqüência convergente em  $W^{m,q}(\Omega)$ . ■

**Teorema 11.53.** (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p > n$ , então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}).$$

**Prova:** Segue imediatamente da desigualdade de Morrey e do Teorema de Arzelá–Ascoli. ■

**Teorema 11.54.** (Teorema de Rellich–Kondrakhov) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $p \geq 1$  e  $k > \frac{n}{p}$ , então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega})$$

para todo  $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ .

## 11.5 Desigualdades de Poincaré e Desigualdades de Interpolação

Se  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , então vale a desigualdade de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Como as funções constantes estão em  $W^{1,p}(\Omega)$ , esta desigualdade não pode valer neste espaço. Mas a hipótese “ $u = 0$  em  $\partial\Omega$ ” pode ser substituída por outras hipóteses para que a desigualdade seja válida, tais como “ $\int_{\Omega} u = 0$ ” ou “ $u = 0$  em um subconjunto de  $\Omega$  de medida positiva”. Esta desigualdade e similares são conhecidas como desigualdades do tipo Poincaré.

Se  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  com volume finito, definimos a média de  $u$  em  $\Omega$  como sendo o número

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, dx.$$

**Teorema 11.55.** (Desigualdade de Poincaré) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado conexo que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

**Prova:** Suponha por absurdo que existe uma sequência  $(u_m)$  em  $W^{1,p}(\Omega)$  tal que

$$\|u_m - \bar{u}_m\|_{L^p(\Omega)} > m \|Du_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Defina

$$v_m = \frac{u_m - \bar{u}_m}{\|u_m - \bar{u}_m\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Então  $\bar{v}_m = 0$ ,  $\|v_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$  e

$$\|Dv_m\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{m}.$$

Em particular,  $(v_m)$  é limitada em  $W^{1,p}(\Omega)$ . Pela reflexividade de  $W^{1,p}(\Omega)$  e pelo Teorema de Rellich-Kondrakhov, podemos portanto assumir, a menos de uma subsequência, que  $v_m \rightharpoonup v$  em  $W^{1,p}(\Omega)$  e  $v_m \rightarrow v$  em  $L^p(\Omega)$ . Segue que  $\bar{v} = 0$  e  $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ . Além disso,  $v_m \rightharpoonup v$  em  $W^{1,p}(\Omega)$  implica que

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf \|v_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 1 + \liminf \|Dv_m\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

Como  $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|Dv\|_{L^p(\Omega)} = 1 + \|Dv\|_{L^p(\Omega)}$ , segue que

$$Dv = 0.$$

Portanto,  $v$  é constante. A condição  $\bar{v} = 0$  implica então que  $v = 0$  em  $\Omega$ , contradizendo  $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ . ■

Como uma aplicação das imersões de Sobolev e da desigualdade de Poincaré, temos a desigualdade de Sobolev-Poincaré:

**Teorema 11.56.** (Desigualdade de Sobolev-Poincaré) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado conexo que satisfaz a condição do cone interior. Se  $1 \leq p < n$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

**Prova:** Como  $D(u - \bar{u}) = Du$ , segue do Teorema de Imersão de Sobolev que existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \left( \|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} + \|Du\|_{L^p(\Omega)} \right)$$

para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Por outro lado, pelo teorema anterior, existe uma constante  $C_2 > 0$  tal que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Juntando estas duas desigualdades, obtemos o resultado desejado. ■

**Corolário 11.57.** (Desigualdade de Sobolev-Poincaré) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $1 \leq p < n$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

para todo  $u \in \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0\}$ .

A desigualdade de Poincaré que usaremos principalmente no resto do livro é a seguinte:

**Corolário 11.58.** (Desigualdade de Poincaré) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Se  $1 \leq p < n$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{1/n} \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

para todo  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Prova:** Veja [Gilbarg-Trudinger]. ■

Para mais desigualdades do tipo Poincaré, recomendamos [Ziemer], Capítulo 4, onde, entre outras coisas, uma forma abstrata do argumento utilizado acima para provar o Teorema 11.55 é usada para obter a forma geral da desigualdade de Poincaré (um resultado devido a Meyers).

O argumento utilizado no Teoremas 11.55 também pode ser usado para obter desigualdades de interpolação para os espaços de Sobolev. Denotamos

$$\|D^k u\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Teorema 11.59.** (Desigualdade de Interpolação) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz a condição do cone interior. Se  $p \geq 1$ , então para qualquer  $\varepsilon > 0$  e para qualquer inteiro  $1 \leq |\alpha| \leq k-1$ , existe uma constante  $C_\varepsilon = C(n, k, p, |\alpha|, \Omega, \varepsilon) > 0$  tal que*

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \|D^k u\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Se substituirmos  $W$  por  $W_0$ , o resultado é válido para abertos arbitrários.

**Prova:** Suponha por absurdo que existe  $\varepsilon > 0$ , um multi-índice  $\alpha$  e uma seqüência  $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$  satisfazendo

$$\|D^\alpha u_m\|_{L^p(\Omega)} > \varepsilon \|D^k u_m\|_{L^p(\Omega)} + m \|u_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Podemos assumir  $\|u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 1$  para todo  $m$  (substituindo  $u_m$  por  $\frac{u_m}{\|u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$ , se necessário). Então, em particular  $\|D^\alpha u_m\|_{L^p(\Omega)}, \|D^k u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$  e portanto, pela desigualdade acima, devemos ter necessariamente  $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Além disso,  $(u_m)$  é uma seqüência limitada em  $W^{k,p}(\Omega)$  e, pelo Teorema 11.52, podemos assumir que  $u_m \rightarrow u$  em  $W^{k-1,p}(\Omega)$ . Em particular,  $u_m \rightarrow u$  em  $L^p(\Omega)$  e portanto concluímos que  $u = 0$ . Mas então  $u_m \rightarrow 0$  em  $W^{k-1,p}(\Omega)$ , o que implica, em particular que  $\|D^\alpha u_m\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Mas então, a desigualdade acima força  $\|D^k u_m\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$  também, e, portanto,  $u_m \rightarrow 0$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ , contradizendo  $\|u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 1$ . ■

**Corolário 11.60.** *A norma*

$$\|u\| := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^k u_m\|_{L^p(\Omega)}$$

*é uma norma equivalente à norma usual em  $W^{k,p}(\Omega)$ , se  $\Omega$  é um aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz a condição do cone interior, e à norma usual em  $W_0^{k,p}(\Omega)$  se  $\Omega$  é um aberto arbitrário de  $\mathbb{R}^n$ .*

Em  $W_0^{k,p}(\Omega)$ , quando  $\Omega$  é um aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$ , nós temos na verdade uma norma equivalente ainda mais simples. Da desigualdade de Poincaré (ou seja, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, seguida da desigualdade de Hölder  $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ ) segue que

$$\|u\| := \|D^k u_m\|_{L^p(\Omega)}$$

é uma norma equivalente em  $W_0^{k,p}(\Omega)$ .

A dependência da constante  $C_\varepsilon$  na desigualdade de interpolação com relação a  $\varepsilon$  pode ser obtida de maneira precisa:

**Teorema 11.61.** (Desigualdade de Interpolação) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Se  $p \geq 1$  e  $\varepsilon_0 > 0$ , então para qualquer  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  e para qualquer inteiro  $1 \leq l \leq k-1$ , existe uma constante  $C = C(\varepsilon_0, k, p, \Omega) > 0$  tal que*

$$\|D^l u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \|D^k u\|_{L^p(\Omega)} + C\varepsilon^{\frac{1}{l-k}} \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Se substituirmos  $W$  por  $W_0$ , o resultado é válido para abertos arbitrários e  $C = C(k, p)$ .

**Prova:** Basta provar o teorema para  $W_0^{k,p}(\Omega)$ , pois o resultado para  $W^{k,p}(\Omega)$  quando  $\Omega$  é um aberto limitado de classe  $C^1$  segue do teorema de extensão (Teorema 11.26). Obviamente, basta também considerar  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Considere inicialmente o caso  $n = 1, k = 2$  e  $l = 1$ .

Seja  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  e considere um intervalo  $(a, b)$  de comprimento  $b - a = \delta$ . Para  $y \in \left(a, a + \frac{\delta}{3}\right)$  e  $z \in \left(b - \frac{\delta}{3}, b\right)$ , o teorema do valor médio implica que existe algum  $x \in (a, b)$  tal que

$$|u'(x)| = \left| \frac{u(z) - u(y)}{z - y} \right| \leq \frac{|u(z)| + |u(y)|}{|b - a| - |b - z| - |y - a|} \leq \frac{3}{\delta} (|u(z)| + |u(y)|).$$

Logo, podemos escrever

$$|u'(x)| \leq \int_a^b |u''| + \frac{3}{\delta} (|u(z)| + |u(y)|).$$

Integrando com respeito a  $y$  e  $z$ , sucessivamente, nos intervalos  $\left(a, a + \frac{\delta}{3}\right)$  e  $\left(b - \frac{\delta}{3}, b\right)$ , respectivamente, obtemos

$$\frac{\delta^2}{9} |u'(x)| \leq \frac{\delta^2}{9} \int_a^b |u''| + \frac{3}{\delta} \left( \frac{\delta}{3} \int_{b-\frac{\delta}{3}}^b |u| + \frac{\delta}{3} \int_a^{a+\frac{\delta}{3}} |u| \right) \leq \frac{\delta^2}{9} \int_a^b |u''| + 2 \int_a^b |u|,$$

ou

$$|u'(x)| \leq \int_a^b |u''| + \frac{18}{\delta^2} \int_a^b |u|.$$

Daí, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |u'(x)|^p &\leq 2^{p-1} \left[ \left( \int_a^b 1 \cdot |u''| \right)^p + \frac{18^p}{\delta^{2p}} \left( \int_a^b 1 \cdot |u| \right)^p \right] \\ &\leq 2^{p-1} \left[ \left( \delta^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_a^b |u''|^p \right)^{1/p} \right)^p + \frac{18^p}{\delta^{2p}} \left( \delta^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_a^b |u|^p \right)^{1/p} \right)^p \right] \\ &= 2^{p-1} \left[ \delta^{p-1} \int_a^b |u''|^p + \frac{18^p}{\delta^{p+1}} \int_a^b |u|^p \right]. \end{aligned}$$

Integrando com respeito a  $x$  no intervalo  $(a, b)$ , obtemos

$$\int_a^b |u'(x)|^p \leq 2^{p-1} \left[ \delta^p \int_a^b |u''|^p + \frac{18^p}{\delta^p} \int_a^b |u|^p \right].$$

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , se subdividirmos  $\mathbb{R}$  em intervalos disjuntos de comprimento  $\delta = \frac{\varepsilon^{1/p}}{2^{\frac{p-1}{p}}}$  e adicionarmos a desigualdade obtida acima em cada um destes intervalos, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^p \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |u''|^p + \frac{2^{2p-1} 3^{2p}}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |u|^p,$$

que é a desigualdade de interpolação desejada para  $n = 1$ .

Se  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $1 \leq i \leq n$ , aplicamos a desigualdade encontrada no caso  $n = 1$  à função de uma variável  $v(x_i) = u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  para  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  fixo, obtendo

$$\int_{\mathbb{R}} |D_i u(x)|^p dx_i \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |D_{ii} u(x)|^p dx_i + \frac{2^{2p-1} 3^{2p}}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p dx_i,$$

para cada  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Daí, integrando com respeito às variáveis  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u(x)|^p dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |D_{ii} u(x)|^p dx + \frac{2^{2p-1} 3^{2p}}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx.$$

O resultado geral para  $k$  e  $1 \leq l < k$  arbitrários segue por indução dupla. Em primeiro lugar, provamos a desigualdade de interpolação para qualquer  $k$  e  $l = k - 1$  por indução em  $k$ . O caso  $k = 2$  já foi provado. Assuma, portanto, como hipótese de indução, que a desigualdade de interpolação seja válida para  $k - 1$  e para  $l = k - 2$ , isto é, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $C = C(n, p, k - 1)$  tal que

$$\|D^{k-2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|D^{k-1}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C\varepsilon^{-(k-2)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Temos que provar que isso implica que a desigualdade de interpolação vale para  $k$  e para  $l = k - 1$ . E, com efeito, segue do caso  $k = 2$  e da hipótese de indução que existem constantes  $C_1 = C_1(p)$  e  $C_2 = C_2(k - 1, p)$  tais que

$$\begin{aligned} \|D^{k-1}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|D(D^{k-2}u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|D_{ii} D^{k-2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{2C_1}{\varepsilon} \|D^{k-2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{2C_1}{\varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon}{4C_1} \|D^{k-1}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \left( \frac{\varepsilon}{4C_1} \right)^{-(k-2)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2} \|D^{k-1}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 2^{2k-3} C_1^{k-1} C_2 \varepsilon^{-(k-1)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

donde

$$\|D^{k-1}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_3 \varepsilon^{-(k-1)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

onde  $C_3 = C_3(k, p)$ .

Agora provamos a desigualdade de interpolação para qualquer  $k$  e  $1 \leq l < k - 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , escolhendo

$\delta = \varepsilon^{\frac{1}{k-l}}$ , existe, pelo passo anterior, uma constante  $C_3 = C_3(l, p)$

$$\begin{aligned} \|D^l u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \delta \|D^{l+1} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_3 \delta^{-l} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \delta \left[ \varepsilon \|D^{l+2} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_3 \delta^{-(l+1)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right] + C_3 \delta^{-l} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \delta^2 \|D^{l+2} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 2C_3 \delta^{-l} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\dots \\ &\leq \delta^{k-l} \|D^{l+k-l} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + (k-l)C_3 \delta^{-l} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \varepsilon \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_4 \varepsilon^{\frac{l}{k-l}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

onde  $C_4 = C_4(k, l, p)$ . ■

## 11.6 O dual de $W^{k,p}(\Omega)$

Investigaremos algumas propriedades do espaço dual de  $W^{k,p}(\Omega)$ ; para maiores informações e detalhes, veja [Adams], seções 3.6 a 3.13. No que se segue,  $p'$  é o expoente conjugado de  $p$ , isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Denotamos  $L^p(\Omega)^N = L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega)$ , o espaço produto de  $N$  cópias de  $L^p(\Omega)$ . A norma neste espaço é definida para um elemento  $u = (u_i)_{i=1, \dots, N}$  por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)^N} = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{i=1, \dots, N} \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^{p'}(\Omega)$ , nós também denotamos

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

**Lema 11.62.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$  e  $N \in \mathbb{N}$ . Para todo funcional linear  $f \in (L^p(\Omega)^N)^*$  existe um único  $v = (v_i)_{i=1, \dots, N} \in L^{p'}(\Omega)^N$  tal que*

$$f(u) = \sum_{i=1}^N \langle u_i, v_i \rangle$$

para todo  $u = (u_i)_{i=1, \dots, N} \in L^p(\Omega)^N$ . Além disso,

$$\|f\|_{(L^p(\Omega)^N)^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}.$$

Conseqüentemente, temos um isomorfismo isométrico  $(L^p(\Omega)^N)^* \cong L^{p'}(\Omega)^N$ .

**Prova:** Dado  $w \in L^p(\Omega)$ , denote por  $I_i w = (0, \dots, 0, w, 0, \dots, 0) \in L^p(\Omega)^N$  o elemento cuja  $i$ -ésima componente é  $w$  e cujas outras componentes são nulas. Defina  $f_i \in (L^p(\Omega))^*$  por  $f_i(w) = f(I_i w)$ . Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único  $v_i \in L^{p'}(\Omega)$  tal que

$$f(I_i w) = f_i(w) = \langle w, v_i \rangle$$



para todo  $w \in L^p(\Omega)$ . Portanto, para todo  $u = (u_i)_{i=1, \dots, N} \in L^p(\Omega)^N$ , nós temos

$$f(u) = \sum_{i=1}^N f(I_i u) = \sum_{i=1}^N f_i(u_i) = \sum_{i=1}^N \langle u_i, v_i \rangle.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$|f(u)| \leq \sum_{i=1}^N |\langle u_i, v_i \rangle| \leq \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^p(\Omega)} \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N} \|u\|_{L^p(\Omega)^N},$$

logo,

$$\|f\|_{(L^p(\Omega)^N)^*} \leq \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}.$$

Vamos provar a desigualdade no sentido contrário. Considere primeiro o caso  $1 < p < \infty$  e defina um elemento  $u \in L^p(\Omega)^N$  por

$$u_i(x) = \begin{cases} |v_i(x)|^{p'-2} v_i(x) & \text{se } v_i(x) \neq 0, \\ 0 & \text{se } v_i(x) = 0. \end{cases}$$

Note que

$$\|u_i\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |v_i(x)|^{p(p'-1)} = \int_{\Omega} |v_i(x)|^{p'} = \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'},$$

de modo que

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}^{p'} = \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} = \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^p = \|u\|_{L^p(\Omega)^N}^p,$$

donde

$$\frac{\|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}^{p'}}{\|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}^p} = \left(\|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}^{p'}\right)^{1-\frac{1}{p'}} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)^N}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)^N}.$$

Então,

$$|f(u)| = \left| \sum_{i=1}^N \langle |v_i|^{p'-2} v_i, v_i \rangle \right| = \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}^{p'} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N} \|u\|_{L^p(\Omega)^N}.$$

Se  $p = 1$ , escolha  $j$  tal que

$$\|v_j\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{i=1, \dots, N} \|v_i\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Por definição, dado  $\varepsilon > 0$ , existe um conjunto mensurável  $A \subset \Omega$  de medida finita não-nula tal que

$$|v_j(x)| \geq \|v_j\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon.$$

Defina  $w \in L^1(\Omega)$  por

$$w(x) = \begin{cases} \frac{|v_j(x)|}{v_j(x)} & \text{se } x \in A \text{ e } v_j(x) \neq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que  $|w(x)| \leq 1$  em  $A$ . Então,

$$f(I_j w) = \langle w, v_j \rangle = \int_A |v_j| \geq \left(\|v_j\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon\right) \|I_j w\|_{L^1(\Omega)^N} = \left(\|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon\right) \|I_j w\|_{L^1(\Omega)^N}.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, concluímos que

$$f(I_j w) \geq \|I_j w\|_{L^1(\Omega)^N}.$$

Dado  $v \in L^{p'}(\Omega)^N$ , a equação  $f(u) = \sum_{i=1}^N \langle u_i, v_i \rangle$  define claramente um funcional linear  $f \in (L^p(\Omega)^N)^*$ , logo concluímos que  $(L^p(\Omega)^N)^* \cong L^{p'}(\Omega)^N$ . ■

Sempre que escrevermos  $(u_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq k}$ , convencionamos que os  $N$  multi-índices  $\alpha$  satisfazendo  $0 \leq |\alpha| \leq k$  foram ordenados de alguma forma consistente fixa.

**Teorema 11.63.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $N$  o número de multi-índices  $\alpha$  satisfazendo  $0 \leq |\alpha| \leq k$ . Para todo funcional linear  $f \in (W^{k,p}(\Omega))^*$  existe um elemento  $v = (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq k} \in L^{p'}(\Omega)^N$  tal que*

$$f(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Além disso,

$$\|f\|_{(W^{k,p}(\Omega))^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}.$$

Se  $1 < p < \infty$ , existe um único elemento que satisfaz estas duas condições.

**Prova:** Defina  $P : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)^N$  por  $Pu = (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq k}$ . Como  $\|Pu\|_{L^p(\Omega)^N} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ , o operador linear  $P$  é um isomorfismo isométrico de  $W^{k,p}(\Omega)$  e um subespaço  $W \subset L^p(\Omega)^N$ . Defina um funcional linear  $g$  em  $W = P(W^{k,p}(\Omega))$  por

$$g(Pu) = f(u).$$

Então  $\|g\|_{W^*} = \|f\|_{(W^{k,p}(\Omega))^*}$  e, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão  $\tilde{g} \in (L^p(\Omega)^N)^*$  de  $g$  satisfazendo  $\|\tilde{g}\|_{(L^p(\Omega)^N)^*} = \|g\|_{W^*}$ . Pelo lema anterior, existe um único  $v = (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq k} \in L^{p'}(\Omega)^N$  tal que

$$\tilde{g}(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle z_\alpha, v_\alpha \rangle$$

para todo  $z = (z_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq k} \in L^p(\Omega)^N$  e, além disso,  $\|\tilde{g}\|_{(L^p(\Omega)^N)^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}$ . Logo, para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  segue que

$$f(u) = g(Pu) = \tilde{g}(Pu) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle (Pu)_\alpha, v_\alpha \rangle = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

e

$$\|f\|_{(W^{k,p}(\Omega))^*} = \|g\|_{W^*} = \|\tilde{g}\|_{(L^p(\Omega)^N)^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^N}.$$

Em geral,  $w \in L^p(\Omega)^N$  define um funcional  $h \in (L^p(\Omega)^N)^*$  através da equação

$$h(z) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle z_\alpha, w_\alpha \rangle$$

para todo  $z \in L^p(\Omega)^N$ . Se, além disso,  $h(Pu) = g(Pu)$  para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , isto é,

$$f(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, w_\alpha \rangle$$

para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , então  $h$  é uma extensão de  $g$  e portanto, por definição da norma de funcionais lineares,

$$\|w\|_{L^{p'}(\Omega)^N} = \|h\|_{(L^p(\Omega)^N)^*} \geq \|g\|_{W^*} = \|f\|_{(W^{k,p}(\Omega))^*}.$$

Assim, segue que

$$\|f\|_{(W^{k,p}(\Omega))^*} = \inf \|w\|_{L^{p'}(\Omega)^N} = \min \|w\|_{L^{p'}(\Omega)^N}$$

onde o ínfimo é tomado no conjunto dos  $w \in L^{p'}(\Omega)^N$  tais que  $f(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, w_\alpha \rangle$ . Que o mínimo é atingido segue precisamente do argumento acima. Que este mínimo é único quando  $1 < p < \infty$ , segue da convexidade uniforme de  $L^p(\Omega)^N$ , isto é, funcionais lineares definidos em subespaços fechados de  $L^p(\Omega)^N$  têm uma única extensão que preserva a norma. ■

Seja  $1 < p < \infty$ . Cada elemento  $v \in L^{p'}(\Omega)$  determina um elemento  $f \in (W^{k,p}(\Omega))^*$  por

$$f_v(u) = \langle u, v \rangle,$$

pois

$$|f_v(u)| \leq \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Definimos a norma  $W^{-k,p'}(\Omega)$  de  $v$  como sendo a norma do funcional linear  $f_v$ , isto é,

$$\|v\|_{W^{-k,p'}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in W^{k,p}(\Omega) \\ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq 1}} |f_v(u)| = \sup_{\substack{u \in W^{k,p}(\Omega) \\ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq 1}} |\langle u, v \rangle|.$$

O conjunto dos funcionais lineares  $W = \{f_v : v \in L^{p'}(\Omega)\}$  é denso em  $(W^{k,p}(\Omega))^*$ . O espaço dual  $W^{-k,p'}(\Omega)$  pode ser caracterizado como sendo isomorfo ao completamento de  $L^{p'}(\Omega)$  com respeito à norma  $W^{-k,p'}(\Omega)$  definida acima. As mesmas considerações valem para  $W_0^{-k,p'}(\Omega)$ .

Embora o espaço  $L^2(\Omega)$  seja identificado com o seu dual, o espaço  $W^{1,2}(\Omega)$  não é identificado com o seu dual. De fato, nós temos

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow W^{-k,p}(\Omega)$$

e todas estas imersões são próprias, contínuas e densas, pois

$$\|v\|_{W^{-k,p'}(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

## 11.7 Traços

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$ . Como as funções em  $W^{1,p}(\Omega)$  estão definidas a menos de conjuntos de medida nula, não faz sentido, em princípio, atribuir valores a estas funções na fronteira  $\partial\Omega$ . Contudo, se  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , então a restrição  $u|_{\partial\Omega}$  existe, e como funções em  $W^{1,p}(\Omega)$  podem ser aproximadas por funções em  $C^1(\overline{\Omega})$ , como vimos no Teorema 11.18, podemos nos perguntar se o operador linear

$$T : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

possui uma extensão a  $W^{1,p}(\Omega)$ . Se isso acontecer, podemos definir para uma função  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  sua restrição a  $\partial\Omega$  por  $u|_{\partial\Omega} = Tu$ . Em outras palavras,  $u|_{\partial\Omega}$  é o limite em  $L^p(\partial\Omega)$  de  $u_m|_{\partial\Omega}$  onde  $(u_m)$  é uma seqüência em  $C^1(\overline{\Omega})$  que converge para  $u$  na norma de  $W^{1,p}(\Omega)$ . O operador  $T$  é chamado o *operador traço* e  $Tu$  é chamado o *traço* de  $u$ .

**Teorema 11.64.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então existe um operador linear contínuo*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

*tal que  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  se  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .*

**Prova:** Seja  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ . Suponha em primeiro lugar que  $\Omega = B_1^+(0) := B_1(0) \cap \mathbb{R}_+^n$ . Escolha  $\varphi \in C_0^\infty(B_1^+(0))$  satisfazendo  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  em  $B_{1/2}^+(0)$ . Denote  $\Gamma = \partial B_{1/2}^+(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ . Então, pelo Teorema da Divergência

de Gauss e pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} |u|^p dx' &\leq \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \varphi |u|^p dx' \\
&= - \int_{B_1^+(0)} \frac{\partial}{\partial x_n} (\varphi |u|^p) dx \\
&= - \int_{B_1^+(0)} |u|^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx - p \int_{B_1^+(0)} \varphi |u|^{p-2} u \frac{\partial u}{\partial x_n} dx \\
&\leq C \int_{B_1^+(0)} |u|^p dx + C \|u^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(B_1^+(0))} \|Du\|_{L^p(B_1^+(0))} \\
&= C \int_{B_1^+(0)} |u|^p dx + C \|u\|_{L^p(B_1^+(0))}^{p-1} \|Du\|_{L^p(B_1^+(0))} \\
&\leq C \left( \int_{B_1^+(0)} |u|^p dx + \int_{B_1^+(0)} |Du|^p dx \right).
\end{aligned}$$

Como  $\partial\Omega$  é compacto, existe uma cobertura finita  $\{\Omega_j\}_{j=1,\dots,N}$  de  $\partial\Omega$  por abertos  $\Omega_j$  em  $\overline{\Omega}$ , e  $C^1$ -difeomorfismos  $\psi_j : \Omega_j \rightarrow B_1^+(0)$  satisfazendo  $\psi_j(\Omega_j \cap \Omega) = B_1^+(0)$  e  $\psi_j(\Omega_j \cap \partial\Omega) = \partial B_1(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ . Denote  $\Gamma_j = \psi_j^{-1}(\partial B_{1/2}^+(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^n)$ ; podemos assumir que  $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j$ , escolhendo a cobertura desde o início de modo que isso se verifique. Então, fazendo uma mudança de variáveis, podemos usar o resultado conseguido acima para obter

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_j)} \leq C_j \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde a constante  $C_j$  não depende de  $u$ . Tomando  $C = \max_{1 \leq j \leq N} C_j$ , segue que

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \sum_{j=1}^N \|u\|_{L^p(\Gamma_j)} \leq C \sum_{j=1}^N \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = CN \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, o operador linear  $T : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  é contínuo, quando  $C^1(\overline{\Omega})$  está sob a norma  $W^{1,p}(\Omega)$ . Como  $C^1(\overline{\Omega})$  é denso em  $W^{1,p}(\Omega)$ , ele possui uma única extensão a um operador linear contínuo definido em  $W^{1,p}(\Omega)$ . ■

Para obter outros operadores traço, precisaremos dos seguintes resultados.

**Lema 11.65.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto que satisfaz a condição do cone interior. Denote por  $\Omega^k$  a interseção de  $\Omega$  com algum plano  $m$ -dimensional,  $1 \leq m \leq n-1$ . Se  $k \leq \frac{n}{p}$  e  $n-kp < m \leq n-1$ , então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega^k)$$

$$\text{para } p \leq q \leq \frac{mp}{n-kp} \text{ se } k < \frac{n}{p}, \text{ e para } p \leq q < \infty \text{ se } k = \frac{n}{p}.$$

O caso que nos interessa é quando  $m = n-1$ , isto é, a interseção de  $\Omega$  com um hiperplano. Isso nos leva a definir o número

$$\bar{p}^* = p \frac{n-1}{n-kp}.$$

Segue imediatamente que

**Corolário 11.66.** *Seja  $k \leq \frac{n}{p}$ . Então*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\partial\mathbb{R}_+^n)$$

$$\text{para } p \leq q \leq \bar{p}^* \text{ se } k < \frac{n}{p}, \text{ e para } p \leq q < \infty \text{ se } k = \frac{n}{p}.$$

Usando o operador extensão, podemos melhorar o resultado do Teorema 11.64:

**Teorema 11.67.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então existe um operador linear contínuo*

$$T : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

para  $p \leq q \leq \bar{p}^*$  se  $k < \frac{n}{p}$ , e para  $p \leq q < \infty$  se  $k = \frac{n}{p}$ , tal que  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  se  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

**Prova:** Considere uma cobertura finita  $\{\Omega_j\}_{j=1,\dots,N}$  de  $\partial\Omega$  por abertos  $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ , e  $C^1$ -difeomorfismos  $\psi_j : \Omega_j \rightarrow B_1(0)$  satisfazendo  $\psi_j(\Omega_j \cap \Omega) = B_1^+(0)$  e  $\psi_j(\Omega_j \cap \partial\Omega) = B_1(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ . Seja  $E : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  o operador de extensão. Temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |Eu(x)|^q d\sigma &\leq \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j \cap \partial\Omega} |Eu(x)|^q d\sigma \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \int_{B_1(0) \cap \partial\mathbb{R}_+^n} |Eu \circ \psi_j^{-1}(y)|^q dy' \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \|Eu \circ \psi_j^{-1}\|_{W^{k,p}(B_1(0))}^q \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \|Eu\|_{W^{k,p}(\Omega_j)}^q \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \left( \|Eu\|_{W^{k,p}(\Omega_j)}^p \right)^{q/p} \\ &\leq C \left( \sum_{j=1}^N \|Eu\|_{W^{k,p}(\Omega_j)}^p \right)^{q/p} \\ &\leq C \|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^q \\ &\leq C \|u\|_{W^{k,p}(\not\Omega)}^q. \end{aligned}$$

■

De fato, o operador traço  $T : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$  é compacto para  $1 < q < \bar{p}^*$  e contínuo para  $q = \bar{p}^*$ . Para obter estes resultados de compacidade, é necessário considerar os espaços de Sobolev de ordem fracionária.

## 11.8 Os Espaços $D^{k,p}$

De importância fundamental para o estudo de EDPs em domínios ilimitados são os espaços  $D^{k,p}(\Omega)$ .

Se  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $p > 1$ , o espaço  $D^{k,p}(\not\Omega)$  é definido como sendo o complemento de  $C_0^\infty(\not\Omega)$  sob a norma

$$\|u\|_{D^{k,p}(\not\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \int_{\not\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Por conveniência, denotaremos

$$|D^k u|^p = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p.$$

Em vista da desigualdade de Poincaré, se  $\Omega$  é um aberto limitado, então  $D^{k,p}(\Omega) = W_0^{k,p}(\Omega)$ . Por outro lado,  $D^{k,p}(\mathbb{R}^n) \neq W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . De fato, no caso  $k = 1$ , por exemplo, já vimos anteriormente (veja discussão que se segue à demonstração da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) que para que uma desigualdade da forma

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{se } 1 \leq p < n,$$

seja válida para todo  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos que ter necessariamente  $q = p^*$ . Isso implica em particular que a norma

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

em  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  não pode ser equivalente à seminorma  $\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . Na verdade, temos a seguinte caracterização para os espaços  $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ :

**Proposição 11.68.** *Se  $k < \frac{n}{p}$  e  $p > 1$ , então*

$$D^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } |\alpha| = k\}$$

*Além disso,*

$$D^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

**Prova:** Em primeiro lugar, vamos provar que existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . O caso  $k = 1$  é simplesmente a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Para provar o caso geral, em primeiro lugar usamos o fato de que  $\|D^k \cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  é uma norma equivalente em  $W_0^{k,p}(\Omega)$ , se  $\Omega$  é um aberto limitado, para obter uma constante  $C = C(n, p, \Omega)$  tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Em seguida, usamos a invariância das normas  $\|\cdot\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}$  e  $\|D^k \cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  sob um escalamento apropriado para eliminar a dependência da constante  $C$  com relação a  $\Omega$ . Com efeito, seja  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  e suponha que  $\Omega \subset B_R(0)$ . Defina o reescalamento  $v \in C_0^\infty(B_1(0))$  de  $u$  por

$$v(x) = R^{\frac{n}{p^*}} u(Rx).$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha v(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} R^n |R^k D^\alpha u(Rx)|^p dx = R^n \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(y)|^p R^{-n} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(y)|^p dy, \end{aligned}$$

para  $|\alpha| = k$ , e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^{p^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} R^n |u(Rx)|^{p^*} dx = R^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^{p^*} R^{-n} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^{p^*} dy, \end{aligned}$$

de modo que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p, B_1(0)) \|D^k v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C(n, p) \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim, em particular, se  $(u_m) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  é uma seqüência de Cauchy na norma  $\|\cdot\|_{D^{k,p}}$ , então  $(u_m)$  é também uma seqüência de Cauchy em  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ , logo o limite é uma função em  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ . Denotando esta função limite por  $u$ , afirmamos que  $u$  tem derivadas fracas de ordem  $k$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . De fato,

$$D^\alpha u = \lim_{m \rightarrow \infty} D^\alpha u_m,$$

pois se  $D^\alpha u_m \rightarrow v$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , temos, para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(D^\alpha \varphi) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_m(D^\alpha \varphi) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u_m) \varphi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v \varphi dx. \end{aligned}$$

Tomando o limite, segue também que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p) \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C(n, p) \|u\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

para toda  $u \in D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Reciprocamente, seja  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $|\alpha| = k$ . Vamos construir uma seqüência  $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $D^\alpha u_j \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $|\alpha| = k$ . Em primeiro lugar, usando os Lemas A2 e A3 a seguir, note que podemos assumir que  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $|\alpha| = k$ . Para fixar idéias, consideraremos os casos  $k = 1$  e  $k = 2$  em separado.

Considere primeiro o caso  $k = 1$ . Tome  $\eta_j(x) = \eta\left(\frac{x}{j}\right)$ , onde  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  satisfaz  $0 \leq \eta \leq 1$  e

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Então  $\eta_j u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (de fato,  $\text{supp } \eta_j u = \text{supp } \eta_j = B_{2j}(0)$ ) e  $\eta_j u \rightarrow u$  em  $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , pois

$$\begin{aligned} \|\eta_j u - u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|D(\eta_j u) - Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|uD\eta_j + \eta_j Du - Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|uD\eta_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|(\eta_j - 1)Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D\eta_j|^p |u|^p \right)^{1/p} + \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_j(0))} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D\eta_j|^{p \frac{p^*}{p^* - p}} \right)^{\frac{p^* - p}{p p^*}} \left( \int_{B_{2j}(0) \setminus B_j(0)} |u|^{p \frac{p^*}{p}} \right)^{\frac{p}{p^*}} + o(1) \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D\eta_j(x)|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \|u\|_{L^{p^*}(B_{2j}(0) \setminus B_j(0))} + o(1) \\ &= \frac{1}{j} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| D\eta\left(\frac{x}{j}\right) \right|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \|u\|_{L^{p^*}(B_{2j}(0) \setminus B_j(0))} + o(1) \\ &= \frac{1}{j} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D\eta(y)|^n j^n dy \right)^{\frac{1}{n}} \|u\|_{L^{p^*}(B_{2j}(0) \setminus B_j(0))} + o(1) \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D\eta(y)|^n dy \right)^{\frac{1}{n}} \|u\|_{L^{p^*}(B_{2j}(0) \setminus B_j(0))} + o(1) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Considera agora  $k = 2$ . Defina os anéis

$$A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : j < |x| < 2j\}.$$

Usando as funções  $\eta_j$  definidas acima, temos que existe uma constante  $C$  que depende apenas de  $\eta$  tal que

$$|D\eta_j| \leq \frac{C}{j},$$

$$|D^2\eta_j| \leq \frac{C}{j^2}.$$

Como  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , segue que  $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ ; em particular,  $u \in W^{2,p}(A_j)$  para todo  $j$ . Pela desigualdade de Poincaré, para todo  $v \in W^{2,p}(A_j)$  que satisfaz

$$\int_{A_j} v = \int_{A_j} \partial_k v = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, n,$$

temos que existe uma constante  $C$  dependendo apenas de  $n, p$  tal que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(A_j)} &\leq Cj^2 \|D^2v\|_{L^p(A_j)}, \\ \|Dv\|_{L^p(A_j)} &\leq Cj \|D^2v\|_{L^p(A_j)}. \end{aligned}$$

A segunda segue diretamente da desigualdade de Poincaré, enquanto que a primeira é obtida através de iteração desta; a dependência em  $j$  pode ser obtida através de escalamento.

Agora, considere os polinômios  $p_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  de grau 1 em  $n$  variáveis, (de modo que  $D^2p_j = 0$ )

$$p_j(x_1, \dots, x_n) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k x_k,$$

com

$$c_0 = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} u \quad \text{e} \quad c_k = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \partial_k u.$$

Então

$$v_j = u - p_j \in W^{2,p}(A_j)$$

satisfaz  $\partial_{kl}v_j = \partial_{kl}u$  e

$$\int_{A_j} v_j = \int_{A_j} \partial_k v_j = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

Seja

$$\tilde{u}_j = \eta_j v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Vamos mostrar que  $\tilde{u}_j \rightarrow u$  em  $D^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ . Pela Regra de Leibnitz,

$$\partial_{kl}\tilde{u}_j = \eta_j \partial_{kl}v_j + \partial_k \eta_j \partial_l v_j + \partial_l \eta_j \partial_k v_j + v_j \partial_{kl}\eta_j.$$

Temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_j - u\|_{D^{2,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{k,l=1}^n \|\partial_{kl}\tilde{u}_j - \partial_{kl}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sum_{k,l=1}^n \left( \|(\eta_j - 1)\partial_{kl}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial_k \eta_j \partial_l v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_j \partial_{kl}\eta_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \end{aligned}$$



com

$$\|(\eta_j - 1)\partial_{kl}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial_{kl}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_j(0))} \rightarrow 0$$

quando  $j \rightarrow \infty$ ; da mesma forma, usando as desigualdades de Poincaré obtidas acima, obtemos

$$\|\partial_k \eta_j \partial_l v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{j} \|\partial_l v_j\|_{L^p(A_j)} \leq C \|D^2 v_j\|_{L^p(A_j)} \rightarrow 0,$$

$$\|v_j \partial_{kl} \eta_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{j} \|v_j\|_{L^p(A_j)} \leq C \|D^2 v_j\|_{L^p(A_j)} = C \|D^2 u\|_{L^p(A_j)} \rightarrow 0.$$

Para o caso geral, existe uma constante  $C$  que depende apenas de  $\eta$  tal que

$$|D^i \eta_j| \leq \frac{C}{j^i},$$

para  $i = 1, \dots, k$ . Como  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , segue que  $u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  e, em particular,  $u \in W^{k,p}(A_j)$  para todo  $j$ . Pela desigualdade de Poincaré (obtida através de iteração repetida do Corolário 11.57) e escalamento, para todo  $v \in W^{k,p}(A_j)$  que satisfaz

$$\int_{A_j} \partial_\alpha v = 0 \quad \text{para todo multi-índice } 0 \leq |\alpha| \leq k-1,$$

existe uma constante  $C$  dependendo apenas de  $n, p$  tal que

$$\|D^i v\|_{L^p(A_j)} \leq C j^{k-i} \|D^k v\|_{L^p(A_j)},$$

para  $i = 0, \dots, k$ . Considere os polinômios  $p_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  de grau  $k-1$  em  $n$  variáveis, (de modo que  $D^k p_j = 0$ ) definidos por

$$p_j(x_1, \dots, x_n) = c_0 + \sum_{|\alpha|=1}^{k-1} c_\alpha x_\alpha$$

onde  $c_\alpha x_\alpha = c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n}$  com

$$c_0 = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} u \quad \text{e} \quad c_\alpha = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \partial_\alpha u.$$

Então

$$v_j = u - p_j \in W^{k,p}(A_j)$$

satisfaz  $D^k v_j = D^k u$  e

$$\int_{A_j} \partial_\alpha v = 0 \quad \text{para todo multi-índice } 0 \leq |\alpha| \leq k-1,$$

Seja

$$\tilde{u}_j = \eta_j v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Vamos mostrar que  $\tilde{u}_j \rightarrow u$  em  $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . Pela Regra de Leibnitz,

$$D^\alpha(\eta_j v_j) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta_j D^{\alpha-\beta} v_j.$$

Temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_j - u\|_{D^{2,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{|\alpha|=k} \|\partial_\alpha \tilde{u}_j - \partial_\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=k} \left( \|(\eta_j - 1)\partial_\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta \eta_j D^{\alpha-\beta} v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_j \partial_\alpha \eta_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \end{aligned}$$

com

$$\|(\eta_j - 1)\partial_\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_j(0))} \rightarrow 0$$

quando  $j \rightarrow \infty$ ; analogamente, usando as desigualdades de Poincaré obtidas acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|D^\beta \eta_j D^{\alpha-\beta} v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{C}{j^{|\beta|}} \|D^{\alpha-\beta} v_j\|_{L^p(A_j)} \leq \frac{C}{j^{|\beta|}} j^{k-|\alpha-\beta|} \|D^{\alpha-\beta} v_j\|_{L^p(A_j)} \\ &= \frac{C}{j^{|\beta|}} j^{k-|\alpha|+|\beta|} \|D^{\alpha-\beta} v_j\|_{L^p(A_j)} \\ &= C \|D^k v_j\|_{L^p(A_j)} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

enquanto que

$$\|v_j \partial_\alpha \eta_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{j^k} \|v_j\|_{L^p(A_j)} \leq C \|D^k v_j\|_{L^p(A_j)} = C \|D^k u\|_{L^p(A_j)} \rightarrow 0.$$

■

**Lema 11.69.** *Se  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , então  $u_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\varepsilon > 0$  e, além disso,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**Prova:** Como já vimos, usando o fato que  $\text{supp } \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = B_\varepsilon(x)$ , podemos usar uma mudança de coordenadas para escrever

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy = \int_{B_1(0)} \varphi(z) u(x-\varepsilon z) dz,$$

e daí, como vimos no Lema 11.3, usar a desigualdade de Hölder para escrever

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)| &\leq \left( \int_{B_1(0)} \left| \varphi^{\frac{p-1}{p}}(z) \right|^{\frac{p}{p-1}} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B_1(0)} \left| \varphi^{\frac{1}{p}}(z) u(x-\varepsilon z) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x-\varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x-\varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}; \end{aligned}$$

Logo,

$$|u_\varepsilon(x)|^p \leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x-\varepsilon z)|^p dz.$$

Segue do Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z)|^p dz \right) dx = \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - \varepsilon z)|^p dx \right) dz \\ &\leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p dy \end{aligned}$$

e portanto  $u_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Para provar a convergência em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , use o fato que  $\int_{B_1(0)} \varphi(z) dz = 1$  e escreva

$$u(x) = \int_{B_1(0)} \varphi(z) u(x) dz.$$

Então, usando os mesmos argumentos acima, temos

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{B_1(0)} \varphi(z) [u(x - \varepsilon z) - u(x)] dz \right| \leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)| dz \\ &\leq \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

donde

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)|^p \leq \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)|^p dz,$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{B_1(0)} \varphi(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)|^p dz \right) dx \\ &= \int_{B_1(0)} \varphi(z) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - \varepsilon z) - u(x)|^p dx \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y) - u(x)|^p dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) \phi(y) dy, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(y) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \\ \phi(y) &= \|u(x - y) - u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $y \rightarrow 0$  (esta é a assim chamada propriedade de continuidade da norma  $L^p$ ); note também que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) dz = 1, \\ \|\phi\|_\infty &\leq 2^p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\delta > 0$  tal que  $\phi(y) < \epsilon$  quando  $|y| < \delta$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(y) \phi(y) dy &= \int_{|y| < \delta} \varphi_\epsilon(y) \phi(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} \varphi_\epsilon(y) \phi(y) dy \\ &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(y) dy + \|\phi\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} \varphi_\epsilon(y) dy \\ &= \epsilon + \|\phi\|_\infty \int_{|z| \geq \frac{\delta}{\epsilon}} \varphi(z) dz \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno, pois  $\text{supp } \varphi = B_1(0)$ . ■

**Lema 11.70.** *Seja  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  e suponha que  $D^\alpha u$  existe para algum multi-índice  $\alpha$ . Então*

$$D^\alpha u_\epsilon(x) = (D^\alpha u)_\epsilon(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e para todo  $\epsilon > 0$ . Em particular, se  $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , então  $D^\alpha u_\epsilon \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Prova:** Observe que

$$D_x^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right).$$

Derivando sob o sinal de integral, como para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  a função  $\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (de fato,  $\text{supp } \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) = B_\epsilon(x)$ ), podemos usar a definição de derivada fraca para obter

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\epsilon(x) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_y^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) D^\alpha u(y) dy \\ &= (D^\alpha u)_\epsilon(x). \end{aligned}$$

$D^\alpha u_\epsilon \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}^n)$  segue imediatamente do lema anterior. ■

Vamos agora caracterizar os espaços  $D^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . Observe que  $\mathbb{R}_+^n$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , diferente de  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ ; podemos considerar  $D^{k,p}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ , mas este espaço tem características completamente diferentes de  $D^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , semelhantes à diferença entre  $W_0^{k,p}(\Omega)$  e  $W^{k,p}(\Omega)$ . Por exemplo, existe uma imersão não trivial  $D^{k,p}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \hookrightarrow L^{p^*}(\partial\mathbb{R}_+^n)$ ; no caso de  $D^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , esta é simplesmente a imersão nula.

**Proposição 11.71.** *Se  $k < \frac{n}{p}$  e  $p > 1$ , então*

$$D^{k,p}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n).$$

Além disso, se  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n) \cap C^k(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  e  $D^k u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$ , então  $u \in D^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$  se e somente se  $u = Du = \dots = D^{k-1}u = 0$  em  $\partial\mathbb{R}_+^n$ .

**Prova:** A primeira parte desta proposição é demonstrada de maneira análoga à da primeira parte da Proposição A1. Como naquela demonstração, basta provar que existem constantes  $C = C(n, p)$  tais que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)},$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ . Para isso, em primeiro lugar usamos o lema de Poincaré que diz que  $\|D^k \cdot\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}$  é uma norma equivalente em  $W_0^{k,p}(\Omega)$ , se  $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$  é um aberto limitado, para obter uma constante  $C = C(n, p, \Omega)$  tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\not\subseteq)$ . Em seguida, usamos a invariância das normas  $\|\cdot\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)}$  e  $\|D^k \cdot\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}$  sob um escalamento apropriado para eliminar a dependência da constante  $C$  com relação a  $\Omega$ : se  $u \in C_0^\infty(\not\subseteq)$  e  $\Omega \subset B_R^+(0) := \mathbb{R}_+^n \cap B_R(0)$ , definimos o reescalamto  $v \in C_0^\infty(B_1^+(0))$  de  $u$  por

$$v(x) = R^{\frac{n}{p^*}} u(Rx).$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |D^\alpha v(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} |D^\alpha u(y)|^p dy, \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} |v(x)|^{p^*} dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} |u(y)|^{p^*} dy, \end{aligned}$$

para  $|\alpha| = k$ , logo

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)} = \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C(n, p, B_1(0)) \|D^k v\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} = C(n, p) \|D^k u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Vamos demonstrar a segunda parte. Considere primeiro uma função  $u \in D^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ ; então, como vimos acima, necessariamente temos que  $D^k u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$  e  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)$ . Se, além disso,  $u \in C^k(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ , mostraremos que  $u = Du = \dots = D^{k-1}u = 0$  em  $\partial\mathbb{R}_+^n$ . Por definição de  $D^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , existe uma seqüência  $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  tal que  $D^k u_j \rightarrow D^k u$  em  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$  e, conseqüentemente,  $u_j \rightarrow u$  em  $L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)$ . Em particular, temos  $u_j = 0$  em  $\partial\mathbb{R}_+^n$ , logo podemos escrever

$$|u_j(x', x_n)| = |u_j(x', x_n) - u_j(x', 0)| \leq \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t) \right| dt$$

para todo  $(x', x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Integrando com respeito a  $x_n$ , de 0 a  $\varepsilon > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)| dx_n &\leq \int_0^\varepsilon \left[ \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t) \right| dt \right] dx_n \\ &\leq \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t) \right| dt dx_n \\ &= \varepsilon \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', t) \right| dt; \end{aligned}$$

integrando agora com respeito a  $x'$  em  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  para  $R > 0$  fixo, temos

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \leq R} \int_0^\varepsilon |u_j(x', x_n)| dx' dx_n \leq \int_{|x'| \leq R} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x', x_n) \right| dx' dx_n.$$

Mantendo  $\varepsilon$  fixo e fazendo  $j \rightarrow \infty$ , como  $Du_j \rightarrow Du$  e  $u_j \rightarrow u$  em  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^n)$ , segue que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \leq R} \int_0^\varepsilon |u(x', x_n)| dx' dx_n \leq \int_{|x'| \leq R} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| dx' dx_n.$$

Agora, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , como  $u \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ , obtemos

$$\int_{|x'| \leq R} |u(x', 0)| dx' = 0,$$

e portanto, como  $R > 0$  é arbitrário, concluímos que  $u = 0$  em  $\partial\mathbb{R}_+^n$ .

Reciprocamente, seja  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n) \cap C^k(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  tal que  $D^k u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$  e  $u = D^k u = 0$  em  $\partial\mathbb{R}_+^n$ . Vamos construir uma seqüência  $(v_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  tal que  $D^\alpha v_j \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$  para todo  $|\alpha| = k$ . Consideraremos primeiro o caso  $k = 1$ .

Para  $\varepsilon > 0$ , denote  $\mathbb{E}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_n > \varepsilon\}$ . Usando os Lemas 11.72 e 11.73 a seguir, escolhendo  $\varepsilon_j = \frac{1}{2j}$ , construímos uma seqüência  $u_j := u_{\varepsilon_j} \in L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  tal que

$$D^\alpha u_{\varepsilon_j} = (D^\alpha u)_{\varepsilon_j}$$

em  $\mathbb{E}_j := \mathbb{E}_{\varepsilon_j}$  para todo  $|\alpha| \leq k$ . Além disso,  $\chi_{\mathbb{E}_j} D^\alpha u_{\varepsilon_j} \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$  quando  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ .

Tome  $\eta_j(x) = \eta\left(\frac{x - x_j}{j}\right)$ , onde  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  satisfaz  $0 \leq \eta \leq 1$  e

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2, \end{cases}$$

e

$$x_j = \left(0, \dots, 0, 2j + \frac{1}{j}\right).$$

Então  $\eta_j u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  (de fato,  $\text{supp } \eta_j u_j \subset \text{supp } \eta_j = B_{2j}(x_j)$ ) e  $\eta_j u_j \rightarrow u$  em  $D^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , pois

$$\begin{aligned} & \|\eta_j u_j - u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \\ &= \|D(\eta_j u_j) - Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} = \|u_j D\eta_j + \eta_j Du_j - Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \\ &\leq \|u_j D\eta_j\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} + \|\eta_j Du_j - Du\|_{L^p(B_{2j}(x_j))} + \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n \setminus B_{2j}(x_j))} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |D\eta_j|^p |u_j|^p\right)^{1/p} + \|\eta_j Du_j - Du\|_{L^p(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} + \|Du_j - Du\|_{L^p(B_j(x_j))} + o(1) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D\eta_j|^{p \frac{p^*}{p^* - p}}\right)^{\frac{p^* - p}{pp^*}} \left(\int_{B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j)} |u_j|^{p \frac{p^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p^*}} + \|Du_j\|_{L^p(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} + \|Du\|_{L^p(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} + o(1) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D\eta_j(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \|u_j\|_{L^{p^*}(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} + o(1) \\ &= \frac{1}{j} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|D\eta\left(\frac{x - x_j}{j}\right)\right|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \|u_j\|_{L^{p^*}(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} + o(1) \\ &= \frac{1}{j} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D\eta(y)|^n j^n dy\right)^{\frac{1}{n}} \|u_j\|_{L^{p^*}(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} + o(1) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D\eta(y)|^n dy\right)^{\frac{1}{n}} \|u_j\|_{L^{p^*}(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} + o(1) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

pois

$$\|u_j\|_{L^{p^*}(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))} \leq \|u_j - u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}_+^n)} + \|u\|_{L^{p^*}(B_{2j}(x_j) \setminus B_j(x_j))}.$$

■

**Lema 11.72.** Se  $u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$ , então  $u_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$  para todo  $\varepsilon > 0$  e, além disso,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  em  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Prova:** O resultado segue imediatamente do Lema 11.67 estendendo  $u = 0$  em  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+^n$ . De fato, se denotarmos esta extensão por  $\bar{u}$ , basta notar que para todo  $x \in \mathbb{R}_+^n$  temos

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \bar{u}(y) dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy = u_\varepsilon(x).$$

■

**Lema 11.73.** Seja  $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^n)$  e suponha que  $D^\alpha u$  existe para algum multi-índice  $\alpha$ . Então

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha u)_\varepsilon(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}_+^n$  tal que  $\text{dist}(x, \partial\mathbb{R}_+^n) \geq \varepsilon$ . Em particular, se  $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$ , então  $\chi_{\mathbb{E}_\varepsilon} D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ , onde  $\mathbb{E}_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}_+^n : y_n > \varepsilon\}$ .

**Prova:** Observe que

$$D_x^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Derivando sob o sinal de integral, observe que a função  $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  se e somente se  $\text{dist}(x, \partial\mathbb{R}_+^n) \geq \varepsilon$ , pois  $\text{supp } \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = B_\varepsilon(x)$ , e somente neste caso podemos usar a definição de derivada fraca para obter

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon(x) &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} D_y^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D^\alpha u(y) dy \\ &= (D^\alpha u)_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Como  $(D^\alpha u)_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ , segue o resultado. Como  $D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha u)_\varepsilon(x)$  apenas para  $x$  pertencente ao semiplano  $\mathbb{E}_\varepsilon$ , nós não temos convergência  $D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  em  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ . ■

## 11.9 Exercícios

**Exercício 11.1.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo contendo a origem. Mostre que a função

$$f(x) = |x|^\alpha$$

está em  $W^k(\Omega)$  se  $k - \alpha < n$ .

**Exercício 11.2.** Sejam

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \\ \Omega_2 &= \mathbb{R}^n \setminus B_1(0). \end{aligned}$$

Para que valores de  $n, k, p, \alpha$  a função

$$f(x) = |x|^\alpha$$

está em  $W^{k,p}(\Omega_1)$  ou em  $W^{k,p}(\Omega_2)$ ?

**Exercício 11.3.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo. Mostre que  $u \in C^{0,1}(\Omega)$  se e somente se  $u$  é fracamente diferenciável com derivadas fracas localmente limitadas.

**Exercício 11.4.** Sejam  $u, v \in W^{1,1}(\Omega)$  com  $uv, uDv + vDu \in L^1(\Omega)$ . Mostre que  $uv \in W^{1,1}(\Omega)$  e que

$$D(uv) = uDv + vDu.$$

**Exercício 11.5.** Prove a equivalência das normas

$$\|u\|_1 = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p \right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \|u\|_2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left( \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p \right)^{1/p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}$$

em  $W^{k,p}(\Omega)$ .

**Exercício 11.6.** Mostre que a função  $u$  definida no Exemplo 11.19 não pode ser aproximada em  $W^{k,p}(\Omega)$  por funções em  $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ .

**Exercício 11.7.** Verifique que abertos com fronteira de classe  $C^1$  satisfazem a condição do segmento.



# Capítulo 12

## Métodos Variacionais e Teoria da Regularidade

### 12.1 Existência de Soluções Fracas para a Equação de Poisson

Neste capítulo,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  será sempre um aberto limitado.

**Definição.** Seja  $f \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Dizemos que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma **solução fraca** para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.1)$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} f v \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$u - g \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Se os dados do problema de Dirichlet (12.1) são suficientemente regulares e a solução fraca também é suficientemente regular, então ela é uma solução clássica:

**Proposição 12.1.** (Soluções Fracas Regulares são Soluções Clássicas) *Sejam  $f \in C^0(\Omega)$  e  $g \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . Se existir uma solução fraca  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  para o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*então  $u$  é uma solução clássica.*

**Prova:** Pela Primeira Identidade de Green, para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \int_{\Omega} (\Delta u) v = - \int_{\Omega} (\Delta u) v.$$

Daí e da definição de solução fraca segue que

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v = \int_{\Omega} f v$$

para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , ou seja,

$$\Delta u = f \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, como  $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , segue da caracterização dos espaços  $W_0^{1,2}(\Omega)$  que  $u - g = 0$  em  $\partial\Omega$ , isto é,

$$u = g \quad \text{em } \partial\Omega.$$

■

Quando uma solução fraca existe ela é única:

**Proposição 12.2.** (Unicidade da Solução Fraca) *Sejam  $f \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Se existir uma solução fraca para o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

*então ela é única.*

**Prova:** O resultado segue imediatamente da *estabilidade fraca* da equação de Poisson, isto é, se  $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$  satisfazem

$$\Delta u_1 = f_1, \Delta u_2 = f_2 \quad \text{em } \Omega$$

para  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ , e

$$u_1 - u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

então existe uma constante  $C = C(n, \Omega)$  tal que

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}. \quad (12.2)$$

De fato, temos

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} (f_1 - f_2) v,$$

para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , em particular para  $v = u_1 - u_2$ . Portanto segue da desigualdade de Poincaré que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\ &= \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde

$$\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

Novamente usando a desigualdade de Poincaré, isso é suficiente para estabelecer (12.2). ■

No caso do problema de Dirichlet para a equação de Poisson, a existência de uma solução fraca é imediatamente estabelecida pelo equivalente ao princípio de Dirichlet visto no início do capítulo anterior:

**Teorema 12.3.** (Existência da Solução Fraca) *Sejam  $f \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Então existe uma única solução fraca  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  para o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.3)$$

**Prova:** Vamos primeiro provar a existência de uma função  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  que minimiza o funcional  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} f v,$$

onde  $E = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega) : v - g \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$  é o espaço de funções admissíveis para (12.3), isto é, a existência de  $u \in E$  tal que

$$I(u) = \min_{v \in E} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} f v \right).$$

Pela desigualdade de Poincaré, o funcional  $I$  é limitado por baixo, pois

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(v-g) + \int_{\Omega} fg \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left| \int_{\Omega} f(v-g) \right| + \int_{\Omega} fg \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v-g\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} fg \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(v-g)\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} fg \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} fg - C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

e a função real  $h(t) = \frac{t^2}{2} - at + b$  é limitada por baixo para  $t \in \mathbb{R}$ , quaisquer que sejam os valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ . Podemos então definir

$$I_0 = \inf_{v \in E} I(u).$$

Seja  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  uma seqüência minimizante para  $I$ , isto é,

$$I(u_m) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx + \int_{\Omega} f u_m \rightarrow I_0.$$

É fácil ver, como no Lema 11.2, que o funcional  $I$  é convexo. Logo,

$$I_0 \leq I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) \leq \frac{1}{2} I(u_k) + \frac{1}{2} I(u_l) \rightarrow I_0$$

quando  $k, l \rightarrow \infty$ . Por outro lado, semelhante à discussão que se segue ao Lema 11.2, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_k - u_l)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_l|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{u_k + u_l}{2} \right) \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx + 2 \int_{\Omega} f u_k + \int_{\Omega} |\nabla u_l|^2 dx + 2 \int_{\Omega} f u_l \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{u_k + u_l}{2} \right) \right|^2 dx - 4 \int_{\Omega} f \left( \frac{u_k + u_l}{2} \right) \\ &= 2I(u_k) + 2I(u_l) - 4I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right), \end{aligned}$$

donde concluímos que  $(\nabla u_m)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$ . Pela desigualdade de Poincaré, como  $u_m - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , temos

$$\begin{aligned} \|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)} &= \|(u_k - g) - (u_l - g)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\nabla(u_k - g) - \nabla(u_l - g)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C \|\nabla u_k - \nabla u_l\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

logo  $(u_m)$  também é uma seqüência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$  e portanto  $(u_m)$  é uma seqüência de Cauchy em  $W^{1,2}(\Omega)$ , ou seja, existe  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  tal que  $u_m \rightarrow u$  em  $W^{1,2}(\Omega)$ . Em particular, segue que  $I(u) = I_0$  e  $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , pois  $W_0^{1,2}(\Omega)$  é um subespaço fechado de  $W^{1,2}(\Omega)$ . Como  $u_m \rightarrow u$  em  $L^2(\Omega)$  e  $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$  em  $L^2(\Omega)$ , temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx + \int_{\Omega} f u_m \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f u,$$

e concluímos que  $u$  é o minimizador do funcional de Dirichlet.

Em seguida, verificamos que  $u$  é a solução fraca de (12.3). De fato, como  $u$  é um minimizante para o funcional  $I$ , segue em particular que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} [I(u + tv)]|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + tv)|^2 + \int_{\Omega} f(u + tv) \right]_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

No caso de operadores elípticos mais gerais, precisaremos de alguns fatos de Análise Funcional.

## 12.2 Teorema de Representação de Riesz, o Teorema de Lax-Milgram e a Alternativa de Fredholm

O Teorema de Representação de Riesz caracteriza os funcionais lineares contínuos em espaços de Hilbert como produtos internos:

**Teorema 12.4.** (Teorema de Representação de Riesz) *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $f \in H^*$  um funcional linear limitado em  $H$ . Então existe um único  $u \in H$  tal que*

$$f(x) = \langle u, x \rangle \quad \text{para todo } x \in H,$$

e, além disso,  $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$ .

O Teorema da Representação de Riez é suficiente para o tratamento de equações lineares elípticas que não possuem termos de primeira ordem, porque a forma bilinear associada ao operador elíptico é simétrica. Para o tratamento de equações elípticas mais gerais, precisamos do Teorema de Lax-Milgram, que se aplica mesmo a formas bilineares não-simétricas. Lembramos que uma forma bilinear  $B$  em um espaço de Hilbert é chamada **limitada** se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|B(x, y)| \leq C \|x\| \|y\| \quad \text{para todos } x, y \in H,$$

e que  $B$  é **coerciva** se existe um número  $\alpha > 0$  tal que

$$|B(x, x)| \geq \alpha \|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in H,$$

**Teorema 12.5.** (Teorema de Lax-Milgram) *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $B$  uma forma bilinear limitada e coerciva em  $H$ . Então para todo funcional linear limitado  $f \in H^*$  existe um único  $u \in H$  tal que*

$$B(x, u) = f(x) \quad \text{para todo } x \in H.$$

Observe que se, além de satisfazer as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram, a forma bilinear  $B$  for simétrica, isto é,

$$B(x, y) = B(y, x) \quad \text{para todos } x, y \in H,$$

então ela define um produto interno em  $H$ , logo o Teorema de Representação de Riesz pode ser diretamente aplicado para obter a conclusão.

**Teorema 12.6.** (Alternativa de Fredholm para Espaços Vetoriais Normados) *Seja  $E$  um espaço vetorial normado e  $T : E \rightarrow E$  um operador linear compacto. Então, ou a equação homogênea*

$$(T - I)x = 0$$

*possui uma solução não-trivial, ou a equação*

$$(T - I)x = y$$

*possui uma única solução para cada  $y \in E$ . Neste último caso, o operador  $(T - I)^{-1}$  também é limitado.*

Em espaços de Hilbert, obtemos uma descrição mais completa para a alternativa de Fredholm:

**Teorema 12.7.** (Alternativa de Fredholm para Espaços de Hilbert) *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $T : H \rightarrow H$  um operador linear compacto. Então existe um conjunto enumerável  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  sem pontos de acumulação, exceto possivelmente em  $\lambda = 0$ , tal que se  $\lambda \notin \Lambda$  e  $\lambda \neq 0$ , então as equações*

$$(T - \lambda I)x = y, \tag{12.4}$$

$$(T^* - \lambda I)x = y, \tag{12.5}$$

*tem cada uma uma solução única  $x \in H$  para todo  $y \in H$ , e as aplicações inversas  $(T - \lambda I)^{-1}$ ,  $(T^* - \lambda I)^{-1}$  são limitadas.*

*Se  $\lambda \in \Lambda$ , os núcleos de  $T - \lambda I$ ,  $T^* - \lambda I$  tem dimensão finita positiva, a equação (12.4) possui solução se e somente se  $y$  é ortogonal ao núcleo de  $T^* - \lambda I$  e a equação (12.5) possui solução se e somente se  $y$  é ortogonal ao núcleo de  $T - \lambda I$ .*

As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em [Evans], [Gilbarg-Trudinger] ou em qualquer livro de Análise Funcional.

## 12.3 Existência de Soluções Fracas para Equações Lineares Elípticas na Forma Divergente

A partir de agora consideraremos operadores elípticos cuja parte principal está na forma divergente, isto é, operadores da forma

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x) u \right) \right] + \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u \tag{12.6}$$

ou

$$Lu = \operatorname{div}(\mathbf{A}(x) \nabla u + \mathbf{b}(x) u) + \mathbf{c}(x) \cdot \nabla u + d(x) u,$$

definido em algum aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Assumimos a hipótese de simetria

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

### 12.3.1 Definição de Solução Fraca

Se  $L$  possui coeficientes  $a_{ij}, b_i \in C^1(\Omega)$  e  $c_i, d \in C^0(\Omega)$ , dadas  $f_0 \in C^0(\Omega)$ ,  $f_1, \dots, f_n \in C^1(\Omega)$ , podemos falar em uma solução clássica  $u \in C^2(\Omega)$  para o problema

$$Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \tag{12.7}$$

Observe que, sob estas hipóteses, o operador  $L$  assume a forma usual, não-divergente,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \tilde{c}(x)u,$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i + c_i \\ \tilde{c} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + d. \end{aligned}$$

Na verdade, basta assumir que  $a_{ij}, b_i \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  e  $c_i, d \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  e que  $f_0 \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ,  $f_1, \dots, f_n \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ , para podermos falar em uma solução clássica  $u \in C^2(\Omega)$ ; neste caso, (12.7) é entendida no sentido q.t.p em  $\Omega$  (veja também a Proposição 12.8 a seguir). Se  $L$  possui coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$  e  $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ , então a equação (12.7) deve ser entendida na forma fraca:

**Definição.** Sejam  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Dizemos que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma **solução fraca** para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.8)$$

se

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u \right) v \right] = - \int_{\Omega} \left( f_0 v - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e

$$u - g \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Soluções fracas de classe  $C^2$  são soluções clássicas desde que os coeficientes de  $L$  sejam suficientemente regulares:

**Proposição 12.8.** (Soluções Fracas Regulares são Soluções Clássicas) *Sejam  $a_{ij}, b_i \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  e  $c_i, d \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ,  $f_0 \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ,  $f_1, \dots, f_n \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  e  $g \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Se existir uma solução fraca  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  para o problema*

$$\begin{cases} Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então  $u$  é uma solução clássica.

**Prova:** Integrando por partes, para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u \right) v \right] \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u \right) \right] v + \int_{\partial\Omega} \left[ \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_i(x)u \right) \right] v \\ & - \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u \right) v \\ &= - \int_{\Omega} Lu \end{aligned}$$

e

$$- \int_{\Omega} \left( f_0 v - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = - \int_{\Omega} \left( f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) v.$$

Daí e da definição de solução fraca segue que

$$\int_{\Omega} (Lu) v = \int_{\Omega} \left( f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) v$$

para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , ou seja,

$$Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Que  $u$  satisfaz a condição de fronteira no sentido clássico segue como na Proposição 12.1. ■

De agora em diante, assumiremos as hipóteses da definição e, além disso, que o operador  $L$  é uniformemente elíptico, isto é, a matriz  $(a_{ij}(x))$  é positiva definida para quase todo ponto  $x \in \Omega$  e existem constantes  $\lambda, \Lambda > 0$  tais que

$$0 < \lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \quad (12.9)$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

### 12.3.2 Existência e Unicidade de Solução Fraca através do Teorema de Lax-Milgram

Definimos a forma bilinear  $B : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  associada ao operador  $L$  por

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u \right) v \right] \quad (12.10)$$

ou

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left[ b_i(x)u \frac{\partial v}{\partial x_i} - c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right] - \int_{\Omega} d(x)uv. \quad (12.11)$$

Se  $L$  não possui termos de primeira ordem, então a forma bilinear associada é simétrica:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - d(x)uv \right].$$

Também consideraremos o funcional linear associado  $F : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$F(v) = - \int_{\Omega} \left( f_0 v - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right). \quad (12.12)$$

Assim,  $u$  é uma solução fraca de (12.7) se e somente se

$$B(u, v) = F(v) \quad \text{para todo } v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Conseqüentemente, em vista do Teorema de Representação de Riesz (se  $L$  não possui termos de primeira ordem e não está na forma divergente) ou do Teorema de Lax-Milgram (no caso geral), para provar a existência de uma solução fraca para a equação (12.7), basta verificar que  $B$  é uma forma bilinear limitada e coerciva, e que  $F$  é um funcional linear limitado. No entanto, este não é o caso: embora  $B$  seja limitada em  $W^{1,2}(\Omega)$ ,  $B$  só é coerciva sobre  $W_0^{1,2}(\Omega)$  (e na verdade só precisamos que  $B$  seja coerciva aí; veja o Lema 12.11) sob hipóteses bastante restritivas sobre  $L$  ou  $\Omega$ , conforme veremos a seguir. Para obter o resultado mais geral, será necessário recorrer à Alternativa de Fredholm.

**Lema 12.9.** (Desigualdade de Cauchy com  $\varepsilon$ ) *Para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  e para todo  $\varepsilon > 0$  vale*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

**Prova:** Na desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$AB \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2,$$

tome

$$A = \sqrt{2\varepsilon}a,$$

$$B = \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

■

**Proposição 12.10.** *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Então a forma bilinear associada  $B$  é limitada em  $W^{1,2}(\Omega)$ .*

*Seja  $M > 0$  tal que*

$$\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|d\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M.$$

*Se  $M$  ou  $|\Omega|$  é suficientemente pequeno, então  $B$  é coerciva sobre  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

*Sejam  $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ . Então o funcional linear associado  $F$  é limitado.*

**Prova:** Definindo  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ , de modo que  $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} = \|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}$ , temos

$$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} \left( f_0 v - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right| \leq \|f_0\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

e portanto  $F$  é limitado.

Para provar que  $B$  é limitada em  $W^{1,2}(\Omega)$ , seja

$$M_1 = \max_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|d\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$



e escreva

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left[ b_i(x) u \frac{\partial v}{\partial x_i} - c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right] - \int_{\Omega} d(x) uv \right| \\
&\leq M_1 \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right| + \int_{\Omega} |uv| \right) \\
&\leq M_1 \left( \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&= M_1 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Com relação à coercividade, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz com  $\varepsilon = \lambda/(4M)$ ,

$$\begin{aligned}
B(u, u) &= \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x) u \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left( \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x) u \right) u \right] \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n [b_i(x) - c_i(x)] u \frac{\partial u}{\partial x_i} - \int_{\Omega} d(x) u^2 \\
&\geq \lambda \int_{\Omega} |Du|^2 - 2M \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| u \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| - M \int_{\Omega} u^2 \\
&\geq \lambda \int_{\Omega} |Du|^2 - 2M \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda}{4M} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{M}{\lambda} |u|^2 \right) - M \int_{\Omega} u^2 \\
&\geq \lambda \int_{\Omega} |Du|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 - C \int_{\Omega} u^2 \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 - C \int_{\Omega} u^2,
\end{aligned}$$

onde

$$C = \frac{2nM^2 + M}{\lambda}.$$

Portanto, para  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , mostramos que

$$B(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Se  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , pela desigualdade de Poincaré temos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \omega_n^{-1/n} |\Omega|^{1/n} \|Du\|_{L^2(\Omega)},$$

logo podemos escrever

$$B(u, u) \geq \left( \frac{\lambda}{2} - C_n \frac{M |\Omega|^{1/n}}{\lambda} \right) \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2,$$

o que prova a afirmação no enunciado do teorema com respeito à coercividade de  $B$ . ■

O seguinte resultado reduz o problema de encontrar soluções fracas em  $W^{1,2}(\Omega)$  para o problema de Dirichlet geral ao problema de encontrar soluções fracas em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  para o problema de Dirichlet homogêneo:

**Lema 12.11.** *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Existe uma solução fraca  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  para o problema*

$$\begin{cases} Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.13)$$

para todos  $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ , se e somente se existe uma solução fraca  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  para a equação

$$Lu = \tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_i} \quad \text{em } \Omega,$$

para todos  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n \in L^2(\Omega)$ .

**Prova:** Tomando  $w = u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , segue que

$$\begin{aligned} Lw &= Lu - Lg \\ &= f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j} + b_i(x) g \right) \right] - \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i} - d(x)g \\ &= f_0 - d(x)g - \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i - \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j} + b_i(x) g \right) \right] \\ &= \tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &= f_0 - d(x)g - \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}, \\ \tilde{f}_i &= f_i - \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j} + b_i(x) g \right), \end{aligned}$$

são funções em  $L^2(\Omega)$ . ■

Em vista da Proposição 12.10, podemos usar o Teorema de Representação de Riesz ou o Teorema de Lax-Milgram para provar a existência de soluções fracas em situações especiais:

**Teorema 12.12.** (Existência e Unicidade da Solução Fraca) *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Sejam  $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ . Então existe um número  $\lambda_0 > 0$  tal que para todo  $\lambda \geq \lambda_0$  existe uma única solução fraca  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  para o problema*

$$\begin{cases} Lu - \lambda u = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.14)$$

**Prova:** A forma bilinear associada ao operador  $L_\lambda := L - \lambda I$  é

$$B_\lambda(u, v) = B(u, v) + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

onde  $B$  é a forma bilinear associada ao operador  $L$ . Pela Proposição 12.9, claramente  $B_\lambda$  é um operador limitado em  $W^{1,2}(\Omega)$ . Além disso, também pela Proposição 12.9, que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$B(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

para todo  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , logo

$$B_\lambda(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\lambda - C) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ou seja,  $B$  é coerciva em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  se  $\lambda$  é suficientemente grande. Finalmente, o funcional linear

$$F(v) = - \int_{\Omega} \left( f_0 v - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

é limitado em  $W^{1,2}(\Omega)$ , conforme vimos naquela proposição. Segue do Teorema de Representação de Riesz, se  $B$  for simétrica, ou do Teorema de Lax-Milgram, caso  $B$  não seja simétrica, que existe um único  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  tal que

$$B_\lambda(u, v) = F(v)$$

para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

Em conjunto com o Lema 12.11, este resultado também é válido para o problema de Dirichlet não-homogêneo.

### 12.3.3 Princípio do Máximo para Soluções Fracas

Para o caso geral, precisamos da Alternativa de Fredholm. Para usar o Teorema 12.6, precisamos estabelecer a unicidade de soluções triviais. No caso de operadores elípticos, é necessário fazer hipóteses adicionais sobre os seus coeficientes, e também estabelecer um *princípio do máximo para soluções fracas*. Lembre-se que, para que o princípio do máximo clássico seja válido, é necessário impor que o coeficiente de  $u$  seja não-positivo.

No nosso caso, o coeficiente de  $u$  seria  $d + \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ , se existissem as derivadas  $\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ . Como isso não ocorre necessariamente, precisamos formular um conceito equivalente no sentido fraco. Assumiremos que

$$\int_{\Omega} \left( dv - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \leq 0$$

para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $v \geq 0$ . Observe que como  $d, b_i$  são limitados, esta desigualdade continua valendo para  $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$  tais que  $v \geq 0$ .

Para comparar o valor de  $u$  em  $\Omega$  com o valor de  $u$  em  $\partial\Omega$ , diremos que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  satisfaz  $u \leq 0$  em  $\partial\Omega$  se sua parte positiva  $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Isso coincide com a definição clássica se  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ .

**Teorema 12.13.** (Princípio do Máximo para Soluções Fracas) *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} \left( dv - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \leq 0 \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(\Omega) \text{ tal que } v \geq 0.$$

*Se  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  satisfaz*

(i)  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+;$$

(ii)  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-;$$

**Prova:** De  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , segue que

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left[ b_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} - c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right] - \int_{\Omega} duv \leq 0$$

para todo  $v \geq 0$ , que escrevemos na forma

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} v \leq \int_{\Omega} \left[ d(uv) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} \right]$$

usando  $D(uv) = uDv + vDu$ . Observe que esta desigualdade continua válida se  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , porque neste caso  $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ . Logo, para todo  $v \geq 0$  tal que  $uv \geq 0$  temos

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} v. \quad (12.15)$$

**Caso 1.** Para compreender melhor o argumento, vamos examinar o caso especial  $b_i + c_i = 0$ , de modo que (12.15) transforma-se em

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \leq 0$$

para todo  $v \geq 0$  tal que  $uv \geq 0$ . Tome  $v = \left[ u - \sup_{\partial\Omega} u^+ \right]^+$ . Observe que  $uv \geq 0$ , pois onde  $u < 0$  temos  $v = 0$  (já que  $\sup_{\partial\Omega} u^+ \geq 0$ ). Pela regra da cadeia  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e

$$Dv = \begin{cases} Du & \text{se } u > \sup_{\partial\Omega} u^+ \text{ (isto é, para } v \neq 0), \\ 0 & \text{se } u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \text{ (isto é, para } v = 0), \end{cases}$$

donde

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j},$$

porque onde  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq \frac{\partial u}{\partial x_i}$  temos  $\frac{\partial v}{\partial x_j} = 0$ . Por outro lado, pela elipticidade de  $L$ , temos que

$$\int_{\Omega} |Dv|^2 \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \leq 0.$$

Portanto,  $Dv = 0$  em  $\Omega$ , logo  $v \equiv \text{constante}$ . Como  $v = 0$  em  $\partial\Omega$ , concluímos que  $v \equiv 0$ , o que implica que  $u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$  em  $\Omega$ .

**Caso 2.** No caso geral, de (12.15) obtemos (usando o fato que  $b_i, c_i$  são limitados)

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \leq 2M \int_{\Omega} |Du| v$$

e supomos por absurdo que

$$\sup_{\partial\Omega} u^+ < \sup_{\Omega} u.$$

Podemos então escolher  $\sup_{\partial\Omega} u^+ \leq T < \sup_{\Omega} u$  e tomamos  $v = (u - T)^+$ . Pela regra da cadeia,  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e

$$Dv = \begin{cases} Du & \text{se } u > T, \\ 0 & \text{se } u \leq T. \end{cases}$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \leq 2M \int_{\Omega_0} |Dv| v$$

onde  $\Omega_0 = \text{supp } Dv \subset \text{supp } v$ . Usando a elipticidade estrita de  $L$ , obtemos

$$\int_{\Omega} |Dv|^2 \leq \frac{2M}{\lambda} \int_{\Omega_0} |Dv| v \leq \frac{2M}{\lambda} \|v\|_{L^2(\Omega_0)} \|Dv\|_{L^2(\Omega)},$$

donde

$$\|Dv\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2M}{\lambda} \|v\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev para  $n \geq 3$ , e em seguida a desigualdade de Hölder, temos que

$$\|v\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C |\Omega_0|^{1/n} \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}$$

Logo

$$|\text{supp } Dv| \geq C. \quad (12.16)$$

A constante  $C$  independe de  $v$  e portanto de  $T$ . Logo esta desigualdade continua válida quando  $T \rightarrow \sup_{\Omega} u$ , o que significa que  $u$  atinge o seu supremo em um conjunto  $\Omega_1$  de medida positiva. Mas então  $Du = 0$  neste conjunto, o que contradiz a desigualdade (12.16) (ou seja, quando  $T \rightarrow 0$  devemos ter  $|\Omega_0| \rightarrow 0$ , já que  $\Omega_0 = \text{supp } Dv$  não contém  $\Omega_1$ , onde  $Dv = 0$ ).

No caso em que  $n = 2$ , obtemos uma desigualdade da mesma forma substituindo  $2^*$  por qualquer número maior que 2. ■

### 12.3.4 Existência e Unicidade de Solução Fraca através da Alternativa de Fredholm

**Teorema 12.14.** (Existência e Unicidade da Solução Fraca) *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} \left( dv - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \leq 0 \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(\Omega) \text{ tal que } v \geq 0. \quad (12.17)$$

*Sejam  $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Então existe uma única solução fraca  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  para o problema*

$$\begin{cases} Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.18)$$

**Prova:** Faça a redução dada pelo Lema 12.11, de modo que podemos assumir  $g = 0$  e procuramos uma solução fraca  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Como na demonstração do teorema anterior, considere o operador  $L_\lambda := L - \lambda I$  e sua forma bilinear associada

$$B_\lambda(u, v) = B(u, v) + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

e seja  $\lambda_0 > 0$  o número dado no enunciado daquele teorema.

Identificando o funcional linear  $F$  com

$$f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in W^{-1,2}(\Omega) = \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*,$$

a equação parcial diferencial do enunciado pode ser escrita como

$$Lu = F \tag{12.19}$$

para  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $F \in W^{-1,2}(\Omega)$ . Em particular,  $L_{\lambda_0} : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  é um operador inversível. Se definirmos o operador  $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  por

$$Iu(v) = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}, \tag{12.20}$$

a equação (12.19) é equivalente à equação

$$L_{\lambda_0}u + \lambda_0 Iu = F,$$

ou seja,

$$u - \lambda_0 L_{\lambda_0}^{-1} Iu = L_{\lambda_0}^{-1} F = w.$$

Definindo o operador  $T : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$  por

$$Tu = \lambda_0 L_{\lambda_0}^{-1} Iu,$$

segue que a existência de uma solução para a equação (12.19) é equivalente à existência de solução para a equação

$$(I - T)u = w. \tag{12.21}$$

Afirmamos que  $T$  é compacto. De fato, pelo Teorema de Lax-Milgram, o operador  $L_{\lambda_0}^{-1}$  é um operador limitado, logo a compacidade de  $T$  será estabelecida pela compacidade de  $I$ . E, de fato, podemos escrever  $I = I_1 \circ I_2$ , onde  $I_2 : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  é a inclusão natural, enquanto que  $I_1 : L^2(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$  é o operador limitado também definido por (12.20). Como  $I_2$  é compacto pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, segue que  $I$  é compacto.

Por outro lado, pelo Princípio do Máximo para Soluções Fracas, a equação  $Lu = 0$  possui uma única solução, que é portanto a solução trivial. Logo, a equação equivalente  $(I - T)u = 0$  possui apenas a solução trivial. Segue então da Alternativa de Fredholm para espaços vetoriais normados (Teorema 12.6) que (12.21) possui solução para todo  $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

Usando a Alternativa de Fredholm para espaços de Hilbert (Teorema 12.7), obtemos um resultado mais completo. Para enunciar o resultado em sua maior generalidade, definimos a **adjunta formal** do operador  $L$ :

$$L^*v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} - b_i(x) u \right) \right] - \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u. \tag{12.22}$$

**Teorema 12.15.** (Existência e Unicidade da Solução Fraca) *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Sejam  $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$  e  $g \in$*

$W^{1,2}(\Omega)$ . Então existe um conjunto discreto enumerável  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  tal que se  $\lambda \notin \Lambda$  o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu - \lambda u = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.23)$$

possui uma única solução fraca  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ . Se  $\lambda \in \Lambda$ , os problemas homogêneos

$$\begin{cases} Lu - \lambda u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.24)$$

e

$$\begin{cases} L^*u - \lambda u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.25)$$

possuem um subespaço solução de dimensão finita positiva e o problema (12.23) é solúvel se e somente se

$$\int_{\Omega} \left[ \left( f_0 - \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + (\lambda - d)g \right) v - \sum_{i=1}^n \left( f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} - b_i g \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (12.26)$$

para todo  $v$  satisfazendo (12.25). Além disso, se a condição (12.17) for satisfeita, então  $\Lambda \subset (-\infty, 0)$ .

**Prova:** A equação  $Lu = F$  é equivalente à equação

$$u + (\lambda_0 - \lambda) L_{\lambda_0}^{-1} I u = L_{\lambda_0}^{-1} F$$

com o operador  $T = L_{\lambda_0}^{-1} I$  compacto, como vimos na demonstração do teorema anterior. Os detalhes da aplicação da Alternativa de Fredholm são deixados para o leitor (veja Exercício 12.5). ■

Segue também da última observação na Alternativa de Fredholm para espaços vetoriais normados (Teorema 12.6) que se  $\lambda \notin \Lambda$ , então o operador inverso  $L_{\lambda}^{-1}$  é limitado. Conseqüentemente, obtemos a seguinte estimativa a priori (cuja demonstração também é reduzida ao caso  $g = 0$ ):

**Corolário 12.16.** *Seja  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  uma solução de (12.23) para  $\lambda \notin \Lambda$ . Então existe uma constante  $C = C(L, \lambda, \Omega)$  tal que*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right). \quad (12.27)$$

## 12.4 Regularidade de Soluções Fracas

Mostraremos nesta seção que uma solução fraca para a equação elíptica

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega$$

é de fato uma função de classe  $C^\infty$ .

### 12.4.1 Quocientes de Diferença

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto arbitrário. Definimos o quociente de diferença na direção  $e_i$  para  $h \neq 0$  por

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad (12.28)$$

onde  $e_i$  denota o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Se a direção é irrelevante ou compreendida através do contexto, freqüentemente denotaremos o quociente de diferença simplesmente por  $\Delta^h u$ . Quocientes de diferença desempenham um papel fundamental na análise da diferenciabilidade, fraca ou clássica, de funções.

**Lema 12.17.** *Seja  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Então  $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$  satisfazendo  $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  e vale*

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|Du\|_{L^p(\Omega)}. \quad (12.29)$$

**Prova:** Usando um argumento de densidade, é suficiente provar o resultado para  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ . Temos, então,

$$\Delta^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt,$$

de modo que pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} |\Delta^h u(x)|^p &= \frac{1}{h^p} \left| \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \right|^p \\ &\leq \frac{1}{h^p} \|1\|_{L^{\frac{p}{p-1}}([0,h])}^p \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\|_{L^p([0,h])}^p \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) \right|^p dt, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{\Omega'} |\Delta^h u(x)| dx \leq \frac{1}{h} \int_0^h \int_{B_h(\Omega')} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p dx dt \leq \int_{\Omega} |Du(x)|^p dx.$$

■

A recíproca do resultado anterior também é válida:

**Lema 12.18.** *Seja  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ . Suponha que  $\Delta_i^h u \in L^p(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$  satisfazendo  $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  e que exista uma constante  $K > 0$  tal que*

$$\|\Delta_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$$

para todo  $h > 0$  independente de  $\Omega'$ . Então a derivada fraca  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  existe e vale

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq K. \quad (12.30)$$

**Prova:** Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Fazendo uma mudança de coordenadas, temos

$$\int_{\Omega} u(x + he_i) \varphi(x) = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x - he_i),$$

donde obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta_i^h u \varphi = \int_{\Omega} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \varphi(x) = \int_{\Omega} u(x) \frac{\varphi(x - he_i) - \varphi(x)}{h} = - \int_{\Omega} u \Delta_i^{-h} \varphi.$$

Mas

$$\int_{\Omega} u \Delta_i^{-h} \varphi \rightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

quando  $h \rightarrow 0$ , logo

$$\int_{\Omega} \Delta_i^h u \varphi \rightarrow - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$



quando  $h \rightarrow 0$ . Segue daí que o funcional linear  $F : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$F(\varphi) = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

é contínuo em  $C_0^\infty(\Omega)$  quando considerado um subespaço de  $L^{p'}(\Omega)$ , onde  $p'$  é o expoente conjugado de  $p$ , pois

$$\left| \int_{\Omega} \Delta_i^h u \varphi \right| \leq \| \Delta_i^h u \|_{L^p(\text{supp } \varphi)} \| \varphi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

donde

$$|F(\varphi)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \Delta_i^h u \varphi \right| \leq K \| \varphi \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^{p'}(\Omega)$ , podemos estender  $F$  a um funcional linear limitado em  $L^{p'}(\Omega)$ . Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe  $v \in L^p(\Omega)$  tal que

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} v \varphi$$

e  $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ . Por definição de derivada fraca, temos

$$v = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

■

## 12.4.2 Regularidade Interior

Se os coeficientes da operador  $L$  tem maior regularidade, então a solução fraca possui maior regularidade (maior diferenciabilidade):

**Teorema 12.19.** *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$  e  $c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Seja  $f \in L^2(\Omega)$ . Suponha que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma solução fraca de*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega. \quad (12.31)$$

Então  $u \in W^{2,2}(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$  e existe uma constante

$$C = C \left( n, \lambda, \max \left\{ \|a_{ij}, b_i\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|c_i, d\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega) \right)$$

tal que

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (12.32)$$

Além disso,  $u$  satisfaz a equação (12.31) na forma não divergente

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i + c_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + d \right) u$$

em quase todo ponto.

**Prova:** Escrevendo

$$g = \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + d \right) u - f \in L^2(\Omega), \quad (12.33)$$

segue que  $u$  satisfaz

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_{\Omega} gv \quad (12.34)$$

para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Para  $|h| < \frac{1}{2} \text{dist}(\text{supp } v, \partial\Omega)$  e  $k = 1, \dots, n$ , temos

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \Delta_k^h \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta_k^{-h} v) = - \int_{\Omega} g \Delta_k^{-h} v.$$

Como

$$\begin{aligned} \Delta_k^h \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) &= \frac{1}{h} \left[ a_{ij}(x + he_k) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + he_k) - a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] \\ &= \frac{1}{h} a_{ij}(x + he_k) \left[ \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + he_k) - \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] \\ &\quad + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) [a_{ij}(x + he_k) - a_{ij}(x)] \\ &= a_{ij}(x + he_k) \Delta_k^h \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \Delta_k^h a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\ &= a_{ij}(x + he_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u(x) + \Delta_k^h a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + he_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u \frac{\partial v}{\partial x_i} &= - \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n \Delta_k^h a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + g \Delta_k^{-h} v \right) \\ &= - \int_{\Omega} (\mathbf{g} \cdot Dv + g \Delta_k^{-h} v), \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\mathbf{g} = \sum_{j=1}^n \Delta_k^h a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Segue do Lema 12.17 que

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + he_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \leq \left( \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right) \|Dv\|_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto, se  $K = \max \left\{ \|a_{ij}, b_i\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|c_i, d\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$ , segue de (12.33) que

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + he_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \leq \left( C_n K \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|Dv\|_{L^2(\Omega)}. \quad (12.35)$$

Agora, seja  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$  uma função corte satisfazendo  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta \equiv 1$  em  $\Omega'$ ,  $|D\eta| \leq 2/\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ , e tome

$$v = \eta^2 \Delta_k^h u.$$

Usando a elipticidade de  $L$ , (12.35) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\Omega} |\eta D \Delta_k^h u|^2 &\leq \int_{\Omega} \eta^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + h e_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_k^h u \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + h e_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \Delta_k^h u \right) \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + h e_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u \frac{\partial v}{\partial x_i} \\
&\quad - 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + h e_k) \left( \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_k^h u \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \Delta_k^h u \right) \\
&\leq \left( C_n K \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_n K \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left( C_n K \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \left( \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\quad + C_n K \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy com  $\varepsilon$ , para  $C = C(n, \lambda, K)$  temos

$$\begin{aligned}
\|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{1}{4} \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{2} \|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|D\eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

que podemos escrever na forma

$$\|\eta D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{12.36}$$

onde  $C = C(n, \lambda, K, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ . Então

$$\|\Delta_k^h D u\|_{L^2(\Omega')} = \|D \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \leq C$$

Segue do Lema 12.18 que  $Du \in W^{1,2}(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , portanto  $u \in W^{2,2}(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , e além disso vale a estimativa (12.32).

Finalmente, temos  $Lu \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  e a identidade integral  $B(u, v) = F(v)$  para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  implica  $Lu = f$  q.t.p. em  $\Omega$ . ■

Observamos que a norma  $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$  pode ser substituída por  $\|u\|_{L^2(\Omega)}$  na desigualdade (12.32) (veja Exercício 12.7)

Quanto maior é a regularidade dos coeficientes de  $L$  e do dado  $f$ , maior é a regularidade da solução fraca:

**Teorema 12.20.** *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$  e  $c_i, d \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ ,  $k \geq 1$ . Seja  $f \in W^{k,2}(\Omega)$ . Suponha que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma solução fraca de*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega.$$

Então  $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$  e existe uma constante

$$C = C\left(n, \lambda, k, \max\left\{\|a_{ij}, b_i\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|c_i, d\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}\right\}, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)\right)$$

tal que

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}\right). \quad (12.37)$$

**Prova:** Suponha  $a_{ij}, b_i \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ ,  $c_i, d \in C^{0,1}(\Omega)$  e  $f \in W^{1,2}(\Omega)$  (isto é, suponha  $k = 1$ ). Substituindo  $v$  em (12.34) por  $\frac{\partial v}{\partial x_k}$  e integrando por partes obtemos

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_k} v$$

para todo  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , onde

$$\tilde{g} = g - \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right).$$

Como  $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$ , segue que  $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_k} \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . O teorema anterior permite então concluir que  $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$ , donde  $u \in W_{\text{loc}}^{3,2}(\Omega)$ . O resultado geral segue por indução. ■

**Corolário 12.21.** *Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in C^\infty(\Omega)$ . Seja  $f \in C^\infty(\Omega)$ . Suponha que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma solução fraca de*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega.$$

Então  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

**Prova:** Pelo teorema anterior,  $u \in W^{k,2}(\Omega')$  para todo  $k \geq 1$  e qualquer  $\Omega' \subset\subset \Omega$ . Pela imersão de Sobolev  $W^{k,2}(\Omega') \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega'})$  para todo  $m < k - n/2$ . Portanto, escolhendo  $k$  suficientemente grande, podemos provar que  $u \in C^m(\Omega')$  para todo  $m \geq 0$  e para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , o que implica que  $u \in C^\infty(\Omega)$ . ■

**Corolário 12.22.** *Seja  $f \in W^{k,2}(\Omega)$ . Suponha que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma solução fraca de*

$$\Delta u = f \quad \text{em } \Omega.$$

Então  $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$  para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$  e existe uma constante  $C = C(n, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega))$  tal que

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}\right).$$

Se  $f \in C^\infty(\Omega)$ , então  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

### 12.4.3 Regularidade Global

Nesta subseção estabelecemos a regularidade da solução fraca até a fronteira. Além das hipóteses usuais sobre os coeficientes de  $L$  e hipóteses sobre os dados  $f$  e  $g$ , precisaremos de uma hipótese de regularidade sobre a fronteira.

**Teorema 12.23.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado com fronteira de classe  $C^2$ . Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$  e  $c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Sejam  $f \in L^2(\Omega)$  e  $g \in W^{2,2}(\Omega)$ . Suponha que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  e existe uma constante

$$C = C\left(n, \lambda, \max\left\{\|a_{ij}, b_i\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|c_i, d\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}, \partial\Omega\right)$$

tal que

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}\right). \quad (12.38)$$

**Prova:** Assuma  $g = 0$ , como usual.

Como  $\partial\Omega$  é de classe  $C^2$ , para cada ponto  $x_0 \in \partial\Omega$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  e um difeomorfismo  $\psi : V \rightarrow B_1(0)$  de classe  $C^2$  tal que  $\psi(V \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^n$ ,  $\psi(V \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$ . Seja  $B_R(x_0) \subset V$  e tome  $B^+ = B_R(x_0) \cap \Omega$ ,  $D = \psi(B_R(x_0))$  e  $D^+ = \psi(B^+)$ .

Sob o difeomorfismo  $\psi$ , a equação  $Lu = f$  em  $B^+$  é transformada em uma equação da mesma forma em  $D^+$ . Os valores para as constantes  $\lambda$  e  $K$  (como definida na demonstração do Teorema 12.19) para a nova equação podem ser estimadas em termos de  $\psi$  e dos valores das constantes para a equação original. Além disso, como  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , a solução transformada  $v = u \circ \psi^{-1} \in W^{1,2}(D^+)$  e satisfaz  $\eta v \in W_0^{1,2}(D^+)$  para toda função corte  $\eta \in C_0^\infty(D)$ .

Portanto, podemos supor que  $u \in W^{1,2}(D^+)$  satisfaz  $Lu = f$  em  $D^+$  e  $\eta u \in W_0^{1,2}(D^+)$  para toda função corte  $\eta \in C_0^\infty(D)$ . Então, para  $|h| < \text{dist}(\text{supp } \eta, \partial D)$  e  $1 \leq k \leq n-1$ , nós temos  $\eta^2 \Delta_k^h u \in W_0^{1,2}(D^+)$ , e a demonstração do Teorema 12.19 se aplica e concluímos que existe a derivada fraca parcial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\psi(B_r(x_0) \cap \Omega))$$

para todo  $r < R$ , desde que  $i \neq n$  ou  $j \neq n$ .

A derivada segunda  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$  pode ser estimada diretamente, escrevendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq n, j \neq n}}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + b_i + c_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + d \right) u$$

Assim, voltando ao domínio original  $\Omega$  através de  $\psi^{-1}$ , concluímos que  $u \in W^{2,2}(B_r(x_0) \cap \Omega)$ . Como  $x_0$  é um ponto arbitrário e  $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$ , segue que do Teorema 12.19 que  $u \in W^{2,2}(\Omega)$ . Finalmente, escolhendo um número finito de pontos  $\{x_i\}$  em  $\partial\Omega$  tais que  $B_r(x_i)$  cobrem  $\partial\Omega$ , obtemos a estimativa. ■

**Corolário 12.24.** *Nas condições do teorema anterior, se  $u$  for a única solução fraca, então*

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}\right). \quad (12.39)$$

**Prova:** Segue do teorema anterior e do Corolário 12.16. ■

**Teorema 12.25.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado com fronteira de classe  $C^{k+2}$ ,  $k \geq 1$ . Seja  $L$  um operador estritamente elíptico na forma divergente (12.6) com coeficientes  $a_{ij}, b_i \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$  e  $c_i, d \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ . Sejam  $f \in W^{k,2}(\Omega)$  e  $g \in W^{k+2,2}(\Omega)$ . Suponha que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então  $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$  e existe uma constante

$$C = C\left(n, \lambda, k, \max\{\|a_{ij}, b_i\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|c_i, d\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}\}, \partial\Omega\right)$$

tal que

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|g\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}\right). \quad (12.40)$$

Se  $a_{ij}, b_i, c_i, d, f, g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , então  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .

**Corolário 12.26.** *Nas condições do teorema anterior, se  $u$  for a única solução fraca, então*

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|g\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}\right). \quad (12.41)$$

## 12.5 Problema de Autovalor

### 12.5.1 O Problema de Autovalor para o Laplaciano

O problema de autovalor para o laplaciano consiste em encontrar os valores  $\lambda$  tais que

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega$$

admite soluções não triviais, com alguma condição de fronteira imposta sobre  $u$ . Consideraremos o problema de autovalor com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para o problema de Dirichlet, o espaço natural para aplicar o método variacional é  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , enquanto que para o problema de Neumann trabalharemos em  $W^{1,2}(\Omega)$ . Escolhemos escrever a equação desta forma, com o sinal negativo multiplicando o laplaciano, porque desta forma obteremos todos os autovalores não-negativos. No caso do problema de Dirichlet, este fato segue imediatamente do princípio do máximo. De fato, este implica que todos os autovalores, se existirem, devem ser positivos, enquanto que no problema de Neumann zero é um autovalor pois as funções constantes são autofunções associadas a este.

**Teorema 12.26.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Então o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

*possui um número infinito enumerável de autovalores*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

tais que

$$\lambda_k \rightarrow \infty,$$

e autofunções  $\{u_k\}$  que constituem um sistema ortonormal completo para  $L^2(\Omega)$ , isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

para todo  $v \in L^2(\Omega)$ . Em particular,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}^2.$$

Além disso, para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  vale

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Prova:** Considere o funcional  $I : W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2} = \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Afirmamos que se

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} I(u),$$

então existe  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $u \neq 0$ , tal que

$$-\Delta u = \lambda_1 u,$$

ou seja,  $\lambda_1$  é um autovalor do laplaciano. Para provar isso, observe em primeiro lugar que o funcional  $I$  é invariante por escala, no sentido de que  $I(\alpha u) = I(u)$  para todo  $\alpha \neq 0$ , logo podemos considerar uma seqüência minimizante  $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  que satisfaz  $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$  para todo  $k$ . Em particular,

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \lambda_1,$$

logo  $(u_k)$  é uma seqüência limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Segue do Teorema de Rellich-Kondrakhov que, a menos de uma subsequência,  $u_k \rightarrow u$  em  $L^2(\Omega)$  e, portanto,  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , o que implica em particular que  $u \neq 0$ . Afirmamos que  $u_k \rightarrow u$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . De fato, valem as identidades

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(u_k + u_l)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 2\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla u_l\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_k + u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 2\|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4. \end{aligned}$$

A segunda identidade implica que  $\|u_k + u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 4$  quando  $k, l \rightarrow \infty$ . Usando a primeira identidade juntamente com a desigualdade

$$\|\nabla(u_k + u_l)\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda_1 \|u_k + u_l\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

que segue da definição de  $\lambda_1$ , obtemos

$$\|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda_1 \|u_k + u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$$

quando  $k, l \rightarrow \infty$ , isto é,  $(\nabla u_k)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$ , o que prova a afirmação. Segue que

$$\lambda_1 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e o Teorema de Poincaré implica que  $\lambda_1 \neq 0$ . Vamos denotar  $u = u_1$ . Para mostrar que  $u_1$  é uma solução fraca de  $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$ , observe que para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  fixado temos

$$I(u_1 + tv) = \frac{\langle \nabla(u_1 + tv), \nabla(u_1 + tv) \rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle (u_1 + tv), (u_1 + tv) \rangle_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2t \langle \nabla u_1, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + t^2 \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2t \langle u_1, v \rangle_{L^2(\Omega)} + t^2 \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

onde  $|t|$  é suficientemente pequeno para que o denominador nunca se anule. Como  $u_1$  é um mínimo para este funcional, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{dI}{dt}(u + tv) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\left(2 \langle \nabla u_1, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + 2t \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \|u_1 + tv\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(2 \langle u_1, v \rangle_{L^2(\Omega)} + 2t \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \|\nabla(u_1 + tv)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1 + tv\|_{L^2(\Omega)}^4} \right|_{t=0} \\ &= \frac{2 \langle \nabla u_1, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \langle u_1, v \rangle_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1 + tv\|_{L^2(\Omega)}^4} \\ &= \frac{2 \langle \nabla u_1, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - 2\lambda_1 \langle u_1, v \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u_1 + tv\|_{L^2(\Omega)}^4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v = \lambda_1 \int_{\Omega} u_1 v$$

para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Suponha como hipótese de indução que obtivemos  $(\lambda_1, u_1), \dots, (\lambda_{k-1}, u_{k-1})$  satisfazendo

$$\begin{aligned} u_i &\in W_0^{1,2}(\Omega), \\ \lambda_1 &\leq \dots \leq \lambda_{k-1}, \\ -\Delta u &= \lambda_i u \quad \text{em } \Omega, \end{aligned}$$

e

$$\langle u_i, u_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}.$$

Definimos

$$H_k = \left\{ v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, k-1 \right\}.$$

Em outras palavras,  $H_k$  é o subespaço de Hilbert ortogonal ao subespaço de dimensão finita gerado pelas autofunções  $u_1, \dots, u_{k-1}$ . Defina

$$\lambda_k = \inf_{u \in H_k} I(u).$$

Como o ínfimo está tomado sobre um espaço menor, segue que

$$\lambda_k \geq \lambda_{k-1}.$$

O fato de que  $H_k$  é um subespaço fechado de  $W_0^{1,2}(\Omega)$  permite repetir o mesmo argumento acima para obter  $u_k \in H_k$  tal que  $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ ,  $\lambda_k = \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Também analogamente obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v = \lambda_k \int_{\Omega} u_k v$$

para todo  $v \in H$  e a relação é trivialmente verdadeira para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , já que  $u_k$  é ortogonal ao subespaço gerado por  $u_1, \dots, u_{k-1}$ . Portanto  $u_k$  é uma solução fraca de  $-\Delta u = \lambda_k u$  em  $\Omega$ .



Para ver que  $\lambda_k \rightarrow \infty$ , suponha por absurdo que  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ . Então obtemos uma seqüência  $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  de autofunções associadas aos autovalores  $\lambda_k$  tais que  $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$  e

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_k \rightarrow \lambda_0.$$

Em particular, podemos usar novamente o Teorema de Rellich-Kondrakhov para concluir que  $u_k \rightarrow u$  em  $L^2(\Omega)$ . Mas isso é um absurdo, pois a seqüência  $(u_k)$  é ortonormal em  $L^2(\Omega)$  e portanto satisfaz

$$\|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2.$$

Falta apenas provar os resultados de expansão. Para  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , escreva

$$\alpha_i = \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}$$

e

$$v_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i,$$

$$w_k = v - v_k.$$

Para todo  $i \leq k$  temos

$$\langle w_k, u_i \rangle = \left\langle v - \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i, u_i \right\rangle = \langle v, u_i \rangle - \alpha_i = 0.$$

Daí, como  $u_i$  é solução fraca, para todo  $i \leq k$  temos também

$$\langle \nabla w_k, \nabla u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_i \langle w_k, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0,$$

donde

$$\langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle v_k, v_k \rangle_{L^2(\Omega)},$$

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla v_k, \nabla v_k \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Desta última identidade segue que

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Por definição de  $\lambda_k$ ,

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_{k+1} \langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)},$$

logo

$$\|w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Em particular, concluímos que

$$v = \lim v_k + \lim w_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (12.42)$$

Para provar a segunda expansão, escreva

$$\nabla v_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \nabla u_i,$$

donde

$$\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \langle \nabla u_i, \nabla u_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^2.$$

Como

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla v_k, \nabla v_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

segue que

$$\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Somando-se a isso o fato que os  $\lambda_i$  são não-negativos, concluímos que a série  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2$  converge, de modo que

$$\|\nabla(w_k - w_l)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla(v_l - v_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=k+1}^l \lambda_i \alpha_i^2$$

e portanto  $(\nabla w_k)$  também é uma seqüência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$ , ou seja,  $(w_k)$  converge em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Conseqüentemente, em vista do resultado anterior,  $w_k \rightarrow 0$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , logo

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lim \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \lim \langle \nabla v_k, \nabla w_k \rangle + \lim \|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2.$$

Segue que  $(u_k)$  é uma seqüência ortonormal e o fecho do subespaço gerado por  $(u_k)$  é um espaço de Hilbert contendo  $W_0^{1,2}(\Omega)$  contido em  $L^2(\Omega)$ . Como  $\overline{W_0^{1,2}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ , concluímos que  $\{u_k\}$  é um sistema ortonormal completo para  $L^2(\Omega)$ . ■

**Observação 1.** Segue deste teorema, em particular, que aquelas funções  $v$  em  $L^2(\Omega)$  que não estão em  $W_0^{1,2}(\Omega)$  podem ser caracterizadas pelo fato que  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}$  diverge.

**Observação 2.** Pela teoria de regularidade desenvolvida anteriormente neste capítulo, se  $\partial\Omega$  for de classe  $C^\infty$ , então as autofunções do problema de Dirichlet estão em  $C^\infty(\overline{\Omega})$  e são soluções clássicas de  $-\Delta u = \lambda u$  em  $\Omega$ ,  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ .

### 12.5.2 O Problema de Autovalor para Operadores Elípticos Auto-Adjuntos

A Alternativa de Fredholm (Teorema 12.15) garante que operadores elípticos possuem no máximo um número enumerável de autovalores. Nesta subseção provaremos diretamente que operadores elípticos auto-adjuntos possuem autovalores (já que operadores auto-adjuntos só podem possuir autovalores reais, vamos nos concentrar no estudo destes). Se  $L$  é um operador elíptico auto-adjunto, então  $L$  pode ser escrito na forma

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{j=1}^n \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x) u \right) \right] - \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u. \quad (12.43)$$

A **forma quadrática** associada a  $L$  é o funcional

$$Q(u) = B(u, u) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + 2 \sum_{i=1}^n b_i(x) u \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(x) u^2 \right). \quad (12.44)$$

**Teorema 12.27.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico auto-adjunto com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Então o problema de autovalor*

$$-Lu = \lambda u \quad \text{em } \Omega, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

possui um número infinito enumerável de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

tais que

$$\lambda_k \rightarrow \infty,$$

e autofunções  $\{u_k\}$  que constituem um sistema ortonormal completo para  $L^2(\Omega)$ , isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

para todo  $v \in L^2(\Omega)$ .

**Prova:** Defina o quociente de Rayleigh do operador  $L$

$$I(u) = \frac{Q(u)}{\int_{\Omega} u^2} = \frac{B(u, u)}{\langle u, u \rangle} = \frac{B(u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Lembramos que segue da demonstração da Proposição 12.10 que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$B(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (12.45)$$

Em particular, com a ajuda da desigualdade de Poincaré, obtemos que  $I$  é limitado inferiormente. Afirmamos que se

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} I(u),$$

então existe  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $u \neq 0$ , tal que

$$-Lu = \lambda_1 u.$$

Para provar isso, usando o fato que  $I$  é invariante por escala, tome uma seqüência minimizante  $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  que satisfaz  $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$  para todo  $k$ . Em particular,

$$B(u, u) \rightarrow \lambda_1,$$

logo segue de (12.45) que  $(u_k)$  é uma seqüência limitada em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Segue do Teorema de Rellich-Kondrakhov que, a menos de uma subseqüência,  $u_k \rightarrow u$  em  $L^2(\Omega)$  e, portanto,  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , o que implica em particular que  $u \neq 0$ . Afirmamos que  $u_k \rightarrow u$  em  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . De fato, como  $Q$  é quadrática, vale a identidade

$$Q\left(\frac{u_k - u_l}{2}\right) + Q\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) = \frac{1}{2}Q(u_k) + \frac{1}{2}Q(u_l).$$

Vale também a identidade

$$\|u_k - u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_k + u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4,$$

que implica  $\left\|\frac{u_k + u_l}{2}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 1$  quando  $k, l \rightarrow \infty$ . Logo,

$$Q\left(\frac{u_k - u_l}{2}\right) \leq \frac{1}{2}Q(u_k) + \frac{1}{2}Q(u_l) - \lambda_1 \left\|\frac{u_k + u_l}{2}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$$

quando  $k, l \rightarrow \infty$ , isto é,  $(\nabla u_k)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L^2(\Omega)$ , o que prova a afirmação. Segue que

$$\lambda_1 = Q(u).$$

Para mostrar que  $u_1$  é uma solução fraca de  $-Lu = \lambda_1 u$ , basta observar que para todo  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  fixado temos

$$\left. \frac{dI}{dt}(u + tv) \right|_{t=0} = 0$$

e que isso implica  $B(u, v) = \lambda_1 \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ . Os detalhes, bem como o restante da demonstração que é análoga à do Teorema 12.27, são deixados para o leitor (veja o Exercício 12.8). ■

Devido a este resultado, soluções do problema de Dirichlet geral para o operador  $L$  podem ser representadas por expansões em autofunções de  $L$ .

### 12.5.3 Autovalor Principal

O primeiro autovalor de um operador elíptico auto-adjunto é simples e possui uma autofunção associada positiva:

**Teorema 12.28.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico auto-adjunto com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ . Então o problema de autovalor*

$$-Lu = \lambda_1 u \quad \text{em } \Omega, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

*possui uma solução positiva  $u_1 > 0$  em  $\Omega$ . Além disso, qualquer outra autofunção associada a  $\lambda_1$  é múltipla de  $u_1$ .*

**Prova:** Suponha que  $\Omega$  e  $L$  tenham regularidade suficiente para que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  e para que seja válido o Princípio do Máximo Forte conforme vimos no Capítulo 6. Pela formulação variacional, se  $u$  é uma autofunção associada a  $\lambda_1$ , então  $|u|$  também é, pois  $I(u) = I(|u|)$ . Pelo Princípio do Máximo Forte,  $u$  não pode se anular no interior de  $\Omega$ , logo  $u > 0$ . Este argumento também implica que as autofunções associadas a  $\lambda_1$  são negativas ou positivas em  $\Omega$ , logo não podem ser ortogonais, e portanto o subespaço associado a  $\lambda_1$  só pode ser unidimensional.

No caso geral, veja [Evans] ou [Gilbarg-Trudinger] (neste último, um Princípio do Máximo Forte e uma Desigualdade de Harnack são desenvolvidas para soluções fracas). ■

Observe que, pelo Princípio do Máximo, se  $c \leq 0$  então o autovalor principal do operador  $L$  é positivo.

## 12.6 Exercícios

**Exercício 12.1.** Verifique que a conclusão do Teorema 12.11 vale se

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + c(x)u,$$

e  $c \leq 0$  em  $\Omega$ .

**Exercício 12.2.** (Equação Biharmônica) Dizemos que uma função  $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$  é uma solução fraca para a equação biharmônica

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \int_{\Omega} f v \quad \text{para todo } v \in W_0^{2,2}(\Omega).$$

- (a) Mostre que sob condições apropriadas de regularidade, uma solução fraca regular é uma solução clássica.

(b) Se  $f \in L^2(\Omega)$ , prove que existe uma única solução fraca.

**Exercício 12.3.** (Problema de Neumann) Dizemos que uma função  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  é uma solução fraca para o problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} f v \quad \text{para todo } v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Prove que este problema tem uma solução fraca se e somente se

$$\int_{\Omega} f = 0.$$

**Exercício 12.4.** Defina uma noção apropriada de solução fraca para o problema de Neumann não-homogêneo

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e determine condições necessárias e suficientes sobre os dados  $f$  e  $g$  para que o problema tenha solução fraca.

**Exercício 12.5.** Verifique os detalhes da demonstração do Teorema 12.15.

**Exercício 12.6.** Prove diretamente que se  $u$  é uma solução fraca de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é limitada, então existe uma constante  $C = C(n, |\Omega|)$  tal que

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right).$$

(Sugestão: use a função teste  $v = u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$  na definição de solução fraca e use a desigualdade de Cauchy com  $\varepsilon$  para obter a desigualdade

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|Dg\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Em seguida use a desigualdade de Poincaré e escolha o  $\varepsilon$  apropriado.)

**Exercício 12.7** Mostre que a norma  $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$  pode ser substituída por  $\|u\|_{L^2(\Omega)}$  na desigualdade (12.32) (veja [Evans]).

**Exercício 12.8.** Forneça os detalhes que faltam na demonstração do Teorema 12.27.

# Capítulo 13

## Estimativas $L^p$

Nesta seção desenvolvemos uma teoria para soluções de problemas elípticos em espaços de Sobolev  $W^{2,p}$  que é em muitos aspectos análoga à teoria de Schauder para soluções em espaços de Hölder  $C^{2,\alpha}$ . As estimativas a priori obtidas são extremamente importantes, especialmente para estabelecer a regularidade de soluções de equações elípticas não-lineares.

As estimativas serão estabelecidas para soluções  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  de operadores elípticos na forma não-divergente:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u. \quad (13.1)$$

**Definição.** Seja  $L$  um operador elíptico na forma não divergente e  $f \in L^p(\Omega)$ . Dizemos que  $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$  é uma **solução forte** de

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega$$

se  $Lu(x) = f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Soluções fortes estão em um grau intermediário entre as soluções fracas e as soluções clássicas. Como vimos no Teorema 12.19, se os coeficientes de  $L$  tem regularidade suficiente, soluções fracas  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  são soluções fortes em  $W_{loc}^{2,2}(\Omega)$  e o operador pode ser escrito na forma não-divergente.

Como no caso das estimativas de Schauder, o ponto de partida para as estimativas  $L^p$  é estabelecê-las para o potencial newtoniano. Em seguida, estabelece-se estimativas  $L^p$  interiores e globais de modo semelhante às respectivas estimativas de Schauder.

### 13.1 Estimativas $L^p$ para a Equação de Poisson: Desigualdade de Calderon-Zygmund

Dada uma função  $f \in L^p(\Omega)$ , o potencial newtoniano de  $f$  é definido da maneira usual:

$$v(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

A desigualdade de Calderon-Zygmund é o análogo às estimativas de Hölder que obtivemos para o potencial newtoniano:

**Teorema 13.1.** (Desigualdade de Calderon-Zygmund) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Sejam  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$  e  $v$  o potencial newtoniano de  $f$ . Então  $v \in W^{2,p}(\Omega)$  e*

$$\Delta v = f \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

Além disso, existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que

$$\|D^2 v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Se  $p = 2$ , temos

$$\|D^2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

**Prova:** S■

Como consequência, podemos estimar as normas  $L^p$  das derivadas parciais de segunda ordem de uma função em  $W_0^{2,p}(\Omega)$  através do seu laplaciano:

**Corolário 13.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Seja  $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ . Então existe uma constante  $C = C(n, p)$  tal que*

$$\|D^2 u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}$$

Se  $p = 2$ , temos

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

## 13.2 Estimativas $L^p$ para Equações Elípticas

**Teorema 13.3.** (Estimativas Interiores) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico com coeficientes  $a_{ij} \in C^0(\Omega)$ ,  $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ . Seja  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ . Suponha que  $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  é uma solução forte de*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega. \quad (13.2)$$

Então, para todo  $\Omega' \subset\subset \Omega$  e existe uma constante

$$C = C\left(n, p, \lambda, \|a_{ij}, b_i, c\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{osc}_{\Omega'} a_{ij}, \Omega', \Omega\right)$$

tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C \left( \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right). \quad (13.3)$$

**Prova:** E■

**Teorema 13.4.** (Estimativas Globais) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto de classe  $C^{1,1}$ . Seja  $L$  um operador estritamente elíptico com coeficientes  $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ . Seja  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ . Suponha que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  é uma solução forte de*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega. \quad (13.4)$$

Então, existe uma constante

$$C = C\left(n, p, \lambda, \|a_{ij}, b_i, c\|_{L^\infty(\Omega)}, \Omega\right)$$

tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left( \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right). \quad (13.5)$$

**Prova:** E■

### 13.3 Existência de Soluções Fortes em $W^{2,p}$

**Teorema 13.5.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto de classe  $C^{1,1}$ . Seja  $L$  um operador estritamente elíptico com coeficientes  $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ ,  $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ ,  $c \leq 0$ . Seja  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ . Então existe uma única solução  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Prova:** E■

Finalmente, um resultado de regularidade:

**Teorema 13.6.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Seja  $L$  um operador estritamente elíptico com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c \in C^{k-1,1}(\Omega) [C^{k-1,\alpha}(\Omega)]$ . Seja  $f \in W_{\text{loc}}^{k,q}(\Omega) [C^{k-1,\alpha}(\Omega)]$ ,  $1 < p, q < \infty$ ,  $k \geq 1$  e  $0 < \alpha < 1$ . Suponha que  $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$  é uma solução forte de*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega. \tag{13.6}$$

*Então  $u \in W_{\text{loc}}^{k+2,q}(\Omega) [C^{k+1,\alpha}(\Omega)]$ .*

*Além disso, se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto de classe  $C^{k+1,1}$ ,  $L$  um operador estritamente elíptico com coeficientes  $a_{ij}, b_i, c \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega}) [C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})]$  e  $f \in W^{k,q}(\Omega) [C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})]$ , então  $u \in W^{k+2,q}(\Omega) [C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})]$ .*

**Prova:** E■



# Referências Bibliográficas

- [Adams] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [Anderson] ANDERSON, John D., Jr., *Computational fluid dynamics: the basics with applications*, McGraw-Hill, 1995.
- [ABR] AXLER, Sheldon, BOURDON, Paul, e RAMEY, W., *Harmonic Function Theory*, Graduate Texts in Mathematics 137, Springer-Verlag, 1992.
- [BN] H. BERESTYCKI e L. NIRENBERG, *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. Soc. Bras. de Mat. 22 (1991), 1–37.
- [Brezis] BREZIS, H., *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [DiBenedetto] DiBENEDETTO, Emmanuele, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, 1995.
- [Chen-Wu] CHEN, Ya-Zhe e WU, Lan-Cheng, *Second Order Elliptic Equations and Elliptic Systems*, AMS, 1998.
- [Evans] EVANS, Lawrence C., *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.
- [Feynman] FEYNMAN, Richard P., LEIGHTON, Robert B. e SANDS, M., *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1964.
- [GNN] GIDAS, B., NI, W. M. e NIRENBERG, L., *Symmetry and relates properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209–243.
- [Gilbarg-Trudinger] GILBARG, David e TRUDINGER, Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd Ed., Springer-Verlag, 1983.
- [Guenther-Lee] GUENTHER, Ronald B. e LEE, John W., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*, Prentice-Hall, 1988.
- [HL] HAN, Qing e LIN, Fanghua, *Elliptic Partial Differential Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, New York University.
- [Iório] IÓRIO, Valéria de Magalhães, *EDP, um curso de graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1991.
- [John] JOHN, Fritz, *Partial Differential Equations*, 4th Ed., Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, 1982.
- [Jost] JOST, Jürgen, *Partial Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics 214, Springer-Verlag, 2002.
- [Lima] LIMA, Elon Lages, *Curso de Análise, vol.2*, 2nd. Ed., Projeto Euclides, IMPA, 1981.

- [Logan] LOGAN, J. David, *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1994.
- [McOwen] McOWEN, Robert, *Partial Differential Equations, Methods and Applications*, Prentice Hall, 1995.
- [Meyers-Serrin] MEYERS, N. e SERRIN, J.,  $H=W$ , Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 51 (1964), 1055–1056.
- [Nirenberg] NIRENBERG, L., *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa (III), 13 (1959), 1–48.
- [Protter-Weinberger] PROTTER, Murray H., e WEINBERGER, Hans F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, 1967.
- [Renardy-Rogers] RENARDY, Michael e ROGERS, Robert C., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics 13, Springer-Verlag, 1992.
- [Royden] ROYDEN, H. L., *Real Analysis*, 3ª edição, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- [Salsa] SALSA, Sandro, *Partial Differential Equations in Action: from modelling to theory*, Universitext, 2008.
- [Smoller] SMOLLER, Joel, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, 2nd Ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 258, Springer-Verlag, 1994.
- [Ziemer] ZIEMER, W. P., *Weakly Differentiable Functions*, Graduate Texts in Mathematics 120, Springer-Verlag, New York, 1989.