A Condição de Compatibilidade para Equações Diferenciais Elípticas com Condições de Fronteira Neumann

■ Problema Modelo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g & \partial\Omega \end{cases} \qquad (1)$$

• Lema:

Se v é solução do problema (1) então $v + c$ também é solução, para qualquer constante c.

dem

Se v é solução de (1) então para qualquer constante c, temos que.

$$-\Delta(v+c) = -\Delta v - \overset{0}{\Delta c} = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(v+c) = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} + \overset{0}{\frac{\partial c}{\partial \vec{n}}} = g$$

Portanto, $v + c$ satisfaz a equação (1).

■

Obs:

1) A solução do problema (1) não é única.

2) Para que o problema (1) tenha solução são necessárias condições sobre f e g. A chamada condição de Compatibilidade.

• Proposição I:

Se Ω é uma região de Green e o problema (1) tem solução v, então:

$$-\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} g(x,y)\,ds \qquad (2)$$

dem

Uma região de Green é uma região no plano suficientemente suave que satisfaz as hipóteses da primeira fórmula de Green. [1]

$$\int_{\Omega} v_1 \nabla^2 v_2\,dx\,dy = -\int_{\Omega} \langle \nabla v_1, \nabla v_2 \rangle\,dx\,dy + \int_{\partial\Omega} v_1 \frac{\partial}{\partial\eta} v_2\,ds \qquad (3)$$

Escolhendo $v_1 = 1$ e $v_2 = v$ temos que,

$$\int_{\Omega} \Delta v\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta} v\,ds \qquad (4)$$

Como v é solução do problema (1), obtemos a equação (2) a partir da equação (4). ■

Obs.

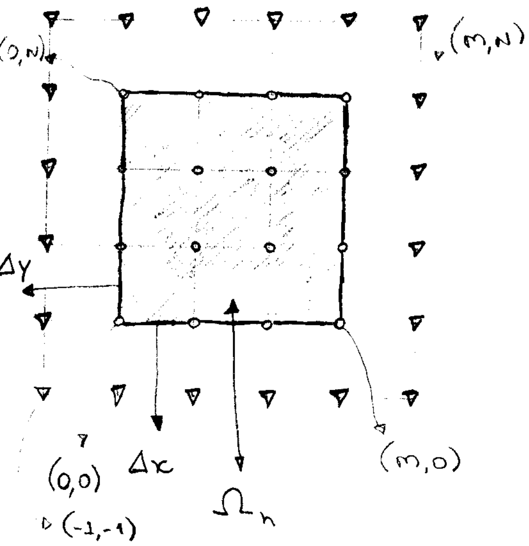
1) A recíproca é verdadeira, veja [3].

2) A equação (2) é a Condição de Compatibilidade analítica do problema (1).

3) Note que (2) também é obtida a partir da aplicação do teorema da divergência (Teorema de Gauss).

■ Discretização: Diferenças Finitas

• Variáveis nos nós:



o - Nós incógnitas

∇ - Nós fantasmas

Considerando $\Delta x = \Delta y = h$, obtemos a equação de diferenças:

$$-U_{i-1j} - U_{i+1j} + 4U_{ij} - U_{ij-1} - U_{ij+1} = h^2 f_{ij} \quad (5)$$

$$0 \leq i \leq m$$
$$0 \leq j \leq N$$

Acrescenta-se pontos fantasmas e considera-se a equação de diferenças (5), tanto para os pontos interiores de Ω_h, quanto para os pontos da fronteira.

Para a discretização das condições de fronteira, utilizando aproximações de segunda ordem, obtemos:

$$-\left(\frac{U_{1j} - U_{-1j}}{2\Delta x}\right) = g_{0j} \quad (6A) \qquad \frac{U_{m+1j} - U_{m-1j}}{2\Delta x} = g_{mj} \quad (6B) \quad 0 \leq j \leq N$$

$$-\left(\frac{U_{i1} - U_{i-1}}{2\Delta y}\right) = g_{i0} \quad (6C) \qquad \frac{U_{iN+1} - U_{iN-1}}{2\Delta y} = g_{iN} \quad (6D) \quad 0 \leq i \leq m$$

As equações (5)-(6D) resultam no sistema linear:

$$AU = b \quad (7)$$

com,

$$A = \begin{bmatrix} T & -2I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & T & -I \\ & & & -2I & T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

A é uma matriz bloco tridiagonal de dimensão $(m+1)^2 \times (N+1)$

I é a matriz identidade $(m+1)\times(N+1)$.

$$u = [u_{00}\ u_{10} \cdots u_{m0} \cdots u_{0N} \cdots u_{mN}]^T$$

$$b = f + u_x + u_y$$

$$f = h^2 [f_{00}\ f_{10} \cdots f_{m0} \cdots f_{0N} \cdots f_{mN}]^T$$

$$u_x = 2h [g_{00}\ 0 \cdots 0\ g_{m0}\ g_{01}\ 0 \cdots g_{mN}]^T$$

$$u_y = 2h [g_{00} \cdots g_{m0}\ 0 \cdots 0\ g_{0N} \cdots g_{mN}]^T$$

Obs

1) A matriz do sistema linear (7) depende da ordem de discretização das condições de fronteira e da localização das variáveis na malha Ω_h. Veja tabela 1.

2) Para a discretização de segunda ordem da condição de fronteira Neumann, a matriz A do sistema (7) não é simétrica.

3) O sistema (7) admite solução se, e somente se $b \in Im(A)$. Note que a imagem de A é o complemento ortogonal do núcleo de A^* (Not.: $A^* = \bar{A}^T$). Portanto, o sistema (7) tem solução (não necessariamente única) se, e somente se $\langle b, z \rangle = 0$ para todo $z \in N(A^*)$. [2]

• Proposição II:

1) $A\mathbb{1} = 0$ e $N(A) = \{\mathbb{1}\}$

2) $A^T z = 0$ onde z é um vetor $(m+1)(N+1)$

$z = [z^1 \; z^2 \cdots z^2 \; z^1]^T$

$z^1 = [\frac{1}{4} \; \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \; \frac{1}{4}]$ e $z^2 = [\frac{1}{2} \; 1 \cdots 1 \; \frac{1}{2}]^T$

tal que $N(A^T) = \{z\}$

3) se $\hat{v}$ e $\bar{v}$ são soluções do sistema (7) então existe c tal que $\bar{v} = \hat{v} + c\mathbb{1}$

4) O sistema (7) tem solução se e somente se

$$-h^2 \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{m} s_i s_j f_{ij} = h \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2} s_i \left[g_{i0} + g_{im} \right] + h \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{2} s_j \left[g_{mj} + g_{0j} \right] \quad (8)$$

com $s_0 = \frac{1}{2}$; $s_m = s_N = \frac{1}{2}$; $s_i = 1$

dem

A afirmação (1) é verdadeira, já que calculando $A\mathbb{1}$ obtemos: $\sum_{j=0}^{N} a_{ij} = 0$ para todo $0 \leq i \leq m$.

⑥ Isto implica que $\mathbb{1} \in N(A)$.
Para mostrar que $\mathbb{1}$ é o único vetor no núcleo de A, temos que mostrar que o posto de A é $(m+1)(N+1)-1$.
Se eliminarmos a primeira linha e coluna de A, podemos aplicar o resultado: "Se A é uma matriz irredutível e fracamente diagonal dominante então A é inversível." Para mostrar que a submatriz resultante é inversível (tem posto completo). Portanto, o posto de A é $(m+1)(N+1)-1$.

A demostração da afirmação (2) é análoga a demonstração de (1).

Para mostrar a afirmação (3) usaremos (1). Sabendo que o posto de A é $(m+1)(N+1)-1$ e $\mathbb{1} \in N(A)$ podemos resolver o sistema (7) para $(m+1)(N+1)-1$ incógnitas em termos de 1 das incógnitas. Isto é, todas as soluções do sistema (7) são da forma:

$$v = v_0 + c\,\mathbb{1}$$

com v_0 um vetor fixo solução de (7) e c uma constante.

A equação (8), chamada <u>condição de compatibilidade discreta</u>, na afirmação (4) segue do fato, que o sistema (7) admite solução se e somente se $\langle b, z \rangle = 0 \quad \forall z \in N(A^T)$ (Veja observação 3, pág 5) e do fato que, $N(A^T) = \{z\}$ (Afirmação (2)).

A equação (8) é o mesmo que $\langle b, \mathfrak{z} \rangle = 0$ ■

■ **Dificuldades:**

- A condição de compatibilidade analítica pode não ser bem aproximada. E portanto a condição de compatibilidade discreta não é satisfeita.
- Como determinar a constante c ?

Para resolver estes problemas, consideremos o sistema:

$$\bar{A}\,\bar{u} = \bar{b} \qquad (9)$$

com $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & \mathfrak{z} \\ \mathbb{1}^T & 0 \end{bmatrix}$; $\bar{u} = \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix}$ e $\bar{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$

• Proposição III

(1) O sistema linear (9) admite solução.

(2) Se a solução do sistema (9) é da forma:

$$\bar{u}_0 = [u_0 \quad 0]^T$$

então a condição (8) é satisfeita e u_0 é solução do sistema (7) tal que $\langle u_0, \mathbb{1} \rangle = 0$

(3) Se a solução do sistema (9) é da forma

$$\bar{u}_0 = [u_0 \quad \lambda]^T \quad \text{com} \quad \lambda \neq 0$$

então u_0 é uma solução do sistema

$$Au = b - \lambda\mathfrak{z} \quad (10) \qquad \text{tal que } \langle u_0, \mathbb{1} \rangle = 0.$$

dem

(1) Como $(Im(A))^{\perp} = N(A^T)$ e que $N(A^T) \oplus Im(A) = \mathbb{R}^L$, ou seja, $N(A^T)$ é independente da $Im(A)$. O fato que $Im(A)$ é o span das colunas de A implica que z independe das colunas de A. Da mesma forma, $[\mathbb{1}^T \; 0]$ independe das linhas de $[A \;\; z]$. Desta forma, $\bar{A}$ tem posto completo $(m+1)(N+1)+1$. Portanto, o sistema (9) admite solução para qualquer lado direito $\bar{b}$.

(2) Se a solução do sistema (9) é da forma $\bar{U}_0 = [U_0 \;\; 0]^T$ então U_0 satisfaz $AU = b$ e $\langle U, \mathbb{1} \rangle = 0$ pela forma do sistema (9). A condição de compatibilidade discreta é satisfeita, já que do item anterior, $z \in N(A^T) \Rightarrow \langle b, z \rangle = 0$.

(3) Como no item (2) se $\bar{U} = [U_0 \;\; \lambda]^T$, com $\lambda \neq 0$ é solução do sistema (9) temos que

$$\bar{A}\bar{U} = \bar{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & z \\ \mathbb{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A U_0 = b - \lambda z \\ \langle U_0, \mathbb{1} \rangle = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Como no item anterior a condição de compatibilidade é satisfeita

$\blacksquare$

Obs.

1) Nas partes (2) e (3) as soluções satisfazem $\langle U_0, \mathbb{1} \rangle = 0$. Impondo esta condição "forçamos" que a constante c seja zero. já que as soluções são da forma: $U_0 + c\mathbb{1}$.

2) Na parte (3), "não podemos resolver o problema que queremos resolver", mas obtemos a melhor solução possível.
A solução do sistema (7) é a solução do sistema (10).
Na prática, determinamos λ, a partir do sistema (10).

$$\langle Au, z\rangle = \langle b - \lambda z, z\rangle \Rightarrow \underbrace{\langle u, A^T z\rangle}_{=0} = \langle b, z\rangle - \lambda\langle z, z\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle b, z\rangle}{\langle z, z\rangle}$$

3) Os resultados descritos são válidos para os sistemas da tabela 1. No caso em que a matriz A é simétrica, $N(A) = N(A^T)$. E portanto, o sistema (10) torna-se

$$Au = b - \lambda \mathbb{1}$$

com $\lambda = \dfrac{\langle b, \mathbb{1}\rangle}{\langle \mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle}$

4) A condição $\langle u_0, \mathbb{1}\rangle = 0$ implica que a constante c seja nula. Se u_0 é solução então $u_0 + c$ também é solução; então

$$\langle u_0 + c, \mathbb{1}\rangle = 0 \Rightarrow \overbrace{\langle u_0, \mathbb{1}\rangle}^{0} + \langle c, \mathbb{1}\rangle = 0 \Rightarrow c = 0$$

• Teorema 1:
Seja $v \in C^4(\bar{\Omega})$ uma solução para o problema (1).
Seja $\bar{u} = [u_h \ \lambda]^T$ uma solução para o sistema (9). Então

$$|\lambda| = O(h^2) \qquad (12)$$
$$\|u_h - v\|_\infty = O(h^2)$$

dem (Esboço)

Da observação (3) temos que

$$\lambda = \frac{\langle b, 3\rangle}{\langle 3,3\rangle} = \left[h^2 \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{M} s_i s_j f_{ij} + h\sum_{i=0}^{M} \frac{1}{2} s_i \left(g_{i0} + g_{iN}\right) + h\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{2} s_j \left(g_{Mj} + g_{0j}\right)\right] / \langle 3, 3\rangle$$

As somas acima representam a fórmula do trapézio, que aproximam $\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy - \int_{\partial\Omega} g(x,y)\,ds = 0$. Portanto, $\lambda = O(h^2)$, ordem o erro de quadratura.

De acordo com a proposição III, v_0 é solução do sistema (10), que corresponde a equação de diferenças

$$\begin{cases} -\Delta_h u_h = b_h - \lambda 3 & \text{em } \Omega_h \text{ (Domínio discreto)} \\ \dfrac{\partial_h u_h}{\partial_h \vec{n}} = g_h & (13) \end{cases}$$

Notação: o índice h denota os operadores discretos.

Dessa forma o erro $e_h := u_h - R_h v$ também satisfaz (13). R_h é o operador de restrição em Ω_h)

$$-\Delta_h e_h = -\Delta_h u_h + \Delta_h R_h v = \Delta_h R_h v + b_h - \lambda 3 = \Delta_h R_h v - R_h \Delta v - \lambda 3$$

$$\frac{\partial_h e_h}{\partial_h \vec{n}} = \frac{\partial_h u_h}{\partial_h \vec{n}} - \frac{\partial_h R_h v}{\partial_h \vec{n}} = g_h - \frac{\partial_h R_h v}{\partial_h \vec{n}} = R_h \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial_h R_h v}{\partial_h \vec{n}}$$

De forma que,

$$C_h := \Delta_h R_h v - R_h \Delta v - \lambda 3 = O(h^2)$$

$$\Psi_h := R_h \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial_h R_h v}{\partial_h \vec{n}} = O(h^2)$$

Como a solução e_h existe, a condição (8) é satisfeita. Aplicando o teorema* (para mais detalhes, veja [3]) obtemos o resultado (12). ∎

Teorema* (Estabilidade)

Se a condição (8) é satisfeita e U_h é solução do sistema (10) então existem constantes C_1 e C_2 independentes de U e h tais que:

$$\|U_h\|_\infty \leq C_1 \max_{x \in \Omega_h} |f(x)| + C_2 \max_{x \in \partial\Omega_h} |g(x)|$$

$\longrightarrow$

■ Referências:

[1] J.W. Thomas. Numerical Partial Differential Equations. Springer-Verlag. 1995.

[2] R.A. Horn, C.R. Johnson. Matrix Analysis. Cambridge University Press. 1985.

[3] W. Hackbusch. Elliptic Differential Equations. Springer-Verlag. Berlin, 1992.

[4] S.R.M. Barros. Multigrid Methods for Two and Three Dimensional Poisson-Type Equations on the Sphere. Journal of Computational Physics. 92 N.2 (1991) 313-348.