

# Contents

1. Noções Básicas de EDP	1
1.1 Por que estudar EDP?	1
1.2 Existe relação entre a teoria das EDOs e EDPs?	2
1.3 Quais EDPs aparecem com maior frequência?	2
1.3.1 Equação do Calor	2
1.3.2 Equação da corda vibrante	3
1.3.3 Equação de Laplace	3
1.3.4 Vibração Transversal de uma Viga	3
1.3.5 Equação do Telefone	4
1.3.6 Equação de Helmholtz	4
1.3.7 Equação de Poisson	4
1.3.8 Equação de Schrödinger	5
1.4 Classificação das EDPs	5
1.5 Operador Diferencial Parcial	8
1.6 Condições Auxiliares	11
1.7 Condições auxiliares mais usadas	14
1.7.1 Condição de Dirichlet ou de Primeira Espécie	14
1.7.2 Condição de Neumann ou de Segunda Espécie	15
1.7.3 Condição de Robin ou de Terceira Espécie	15
1.7.4 Condição de Cauchy	16
1.8 Planejamento para resolver um problema físico	17
1.9 Resumo	20
1.10 Exercícios Propostos	21
2. Simplificação de EDPLs	23
2.1 Simplificação de EDPLs de primeira ordem	23
2.1.1 Coeficientes Constantes	23
2.1.2 Coeficientes Quaisquer	25
2.2 Simplificação de EDPLs de 2ª ordem	28

2.3	<i>Forma Canônica das Equações de Coeficientes Constantes</i> . . . . .	34
2.3.1	<i>Equação Hiperbólica</i> : $B^2 - 4AC > 0$ . . . . .	35
2.3.2	<i>Equação Parabólica</i> : $B^2 - 4AC = 0$ . . . . .	36
2.3.3	<i>Equação Elíptica</i> : $B^2 - 4AC < 0$ . . . . .	38
2.4	<i>Simplificação de termos de 1ª ordem</i> . . . . .	41
2.5	<i>RESUMO</i> . . . . .	44
2.6	<i>Exercícios Propostos</i> . . . . .	48
3.	<i>Soluções de uma EDP</i> . . . . .	51
3.1	<i>Tipos de soluções</i> . . . . .	51
3.2	<i>Solução geral das EDPLs de 1ª ordem</i> . . . . .	54
3.3	<i>Solução geral das EDPLs de 2ª ordem</i> . . . . .	57
3.4	<i>Solução obtida por meio de integrações</i> . . . . .	60
3.5	<i>Solução obtida por meio de técnicas das EDOs</i> . . . . .	62
3.6	<i>Solução da equação <math>Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0</math></i> . . . . .	63
3.7	<i>Princípio de Superposição</i> . . . . .	66
3.7.1	<i>Princípio de Superposição para Equação Linear Homogênea</i> . . . . .	66
3.7.2	<i>Princípio de Superposição para Equação Linear não Homogênea</i> . . . . .	67
3.8	<i>Outros métodos de resolução</i> . . . . .	70
3.9	<i>Resumo</i> . . . . .	70
3.10	<i>Exercícios propostos</i> . . . . .	72
4.	<i>Equação da Onda</i> . . . . .	79
4.1	<i>Três Razões para se Conhecer a Dedução da Equação da Onda</i> . . . . .	79
4.2	<i>Classificação das Propagações Ondulatórias</i> . . . . .	80
4.2.1	<i>Tipos de Ondas</i> . . . . .	81
4.2.2	<i>Quanto à Direção da vibração</i> . . . . .	81
4.2.3	<i>Quanto à Dimensão</i> . . . . .	81
4.3	<i>Matemática das Ondas Unidimensionais</i> . . . . .	82
4.4	<i>Equação da Onda com Forças Externas</i> . . . . .	86
4.5	<i>Condições Auxiliares mais Usadas</i> . . . . .	88
4.5.1	<b>Corda finita:</b> $0 < x < L$ . . . . .	88
4.5.2	<i>Corda infinita</i> . . . . .	90
4.5.3	<i>Corda semi infinita</i> . . . . .	91
4.6	<i>Equação da Energia de uma Corda Vibrante</i> . . . . .	92
4.7	<i>Complementos*</i> . . . . .	94
4.8	<i>Resumo</i> . . . . .	97
4.9	<i>Exercícios Propostos</i> . . . . .	98
5.	<i>Solução da Equação da Onda: Método das Características</i> . . . . .	101
5.1	<i>Interpretação Física da Solução</i> . . . . .	101
5.2	<i>Primeiro Problema de Cauchy</i> . . . . .	105

5.2.1	Solução de D'Alembert . . . . .	106
5.3	<b>Estabilidade da Solução*</b> . . . . .	107
5.4	<b>Interpretação da Solução de D'Alembert</b> . . . . .	108
5.4.1	Velocidade inicial nula $u_t(x, 0) = g(x) = 0$ . . . . .	108
5.4.2	Velocidade inicial não nula $u_t(x, 0) = g(x) \neq 0$ . . . . .	111
5.5	Segundo Problema de Cauchy . . . . .	113
5.6	Reflexão na Corda Semi Infinita . . . . .	116
5.7	RESUMO . . . . .	123
5.8	Exercício Propostos . . . . .	124
6.	Equação da Condução do Calor . . . . .	127
6.1	Princípio da troca de calor e lei de Fourier . . . . .	127
6.1.1	Interpretação da lei de Fourier . . . . .	128
6.2	Dedução da Equação do Calor . . . . .	130
6.3	Interpretação da Equação do Calor . . . . .	133
6.4	Presença de Fontes de Calor . . . . .	135
6.5	Condições Auxiliares numa Haste . . . . .	137
6.5.1	Condições Iniciais . . . . .	137
6.5.2	Condições de Contorno . . . . .	138
6.6	Problemas em Estado Estacionário . . . . .	141
6.7	Equação de difusão . . . . .	142
6.8	RESUMO . . . . .	143
6.9	Exercícios Propostos . . . . .	144
7.	Método de Separação de Variáveis . . . . .	149
7.1	Separação de Variáveis na Resolução da EDP . . . . .	149
7.2	Separação de Variáveis na Resolução de PVIC . . . . .	152
7.3	Extensão do Princípio de Superposição . . . . .	155
7.3.1	Apresentação do Problema . . . . .	155
7.4	RESUMO . . . . .	158
7.5	Exercícios Propostos . . . . .	159
8.	Série de Fourier Trigonométrica . . . . .	163
8.1	Série Trigonométrica . . . . .	163
8.2	Determinação dos Coeficientes da SF . . . . .	165
8.3	Simplificação dos Coeficientes . . . . .	168
8.4	Série de Fourier de uma Função não Periódica . . . . .	171
8.5	Outras Representações da Série de Fourier . . . . .	174
8.5.1	Representação Cosenoidal . . . . .	175
8.5.2	Representação Complexa ou Exponencial . . . . .	176
8.6	Analogia com a decomposição de vetores no $R^n$ . . . . .	181
8.7	RESUMO . . . . .	184

8.8	Exercícios Propostos . . . . .	186
9.	Análise da Convergência da Série de Fourier . . . . .	191
9.1	Condições de Dirichlet para Convergência da SF . . . . .	191
9.1.1	Espaço das Funções a ser Utilizado . . . . .	191
9.1.2	Condições Suficientes para a Convergência Pontual . . . . .	193
9.2	Derivação da Série de FourierF . . . . .	197
9.3	Velocidade de Convergência da Série de Fourier . . . . .	199
9.4	Integração da Série de Fourier . . . . .	202
9.5	RESUMO . . . . .	204
9.6	Exercícios Propostos . . . . .	205
10.	Convergência na Média e Identidade de Parseval . . . . .	209
10.1	Funções Quadrado Integráveis . . . . .	209
10.2	Erro Médio Quadrático . . . . .	210
10.3	Desigualdade de Bessel . . . . .	214
10.4	Identidade de Parseval . . . . .	215
10.5	Aproximação num espaço com produto interno . . . . .	218
10.5.1	Aproximação de Vetores no Espaço $R^n$ . . . . .	219
10.5.2	Aproximação de Funções num Espaço Produto Interno . . . . .	220
10.6	RESUMO . . . . .	222
10.7	Exercícios Propostos . . . . .	222
11.	Problema de Valor Inicial e de Contorno . . . . .	225
11.1	Solução de um PVIC . . . . .	225
11.2	Problema envolvendo a Equação do Calor . . . . .	230
11.2.1	Solução Formal . . . . .	230
11.2.2	Existência da solução . . . . .	232
11.2.3	Unicidade de Solução . . . . .	235
11.3	Fluxo de Calor em Haste não Isolada Lateralmente . . . . .	237
11.4	Problema da Corda Vibrante . . . . .	239
11.4.1	Solução Formal . . . . .	239
11.4.2	<b>Existência de Solução</b> . . . . .	243
11.4.3	Unicidade de Solução . . . . .	247
11.4.4	Equivalência com a solução de D´Alembert . . . . .	249
11.5	RESUMO . . . . .	250
11.6	Exercícios Propostos . . . . .	252
12.	Problemas de Contorno . . . . .	255
12.1	O que é solução de um PVC? . . . . .	255
12.2	Principais Problemas de Contorno . . . . .	256
12.2.1	Problema de Dirichlet . . . . .	257

12.2.2	Problema de Neumann . . . . .	257
12.2.3	Problema de Robin . . . . .	257
12.3	Problemas de Dirichlet . . . . .	258
12.3.1	Problema de Dirichlet no Retângulo . . . . .	258
12.3.1.1	Solução formal . . . . .	258
12.3.1.2	Existência da solução no retângulo . . . . .	260
12.3.2	Problema de Dirichlet no Círculo. . . . .	261
12.3.2.1	Solução Formal . . . . .	261
12.3.2.2	Existência da Solução . . . . .	263
12.3.2.3	Integral de Poisson no Círculo . . . . .	263
12.3.2.4	Existência de Solução no círculo . . . . .	265
12.3.3	Princípio do Máximo . . . . .	267
12.3.3.1	Unicidade . . . . .	267
12.3.3.2	Estabilidade* . . . . .	268
12.4	Problemas de Neumann . . . . .	269
12.4.1	Condição de compatibilidade . . . . .	269
12.4.2	Problema de Neumann no Círculo . . . . .	271
12.4.3	Problema de Neumann no Retângulo . . . . .	272
12.5	RESUMO . . . . .	272
12.6	Problemas Propostos . . . . .	273
13.	Problemas Não Homogêneos . . . . .	279
13.1	Decomposição de Problemas . . . . .	280
13.2	PVIC com condições de contorno não homogêneas . . . . .	282
13.2.1	Condição de contorno constante. . . . .	283
13.2.2	PVIC com condição de contorno variável . . . . .	287
13.3	PVIC com EDP não Homogênea . . . . .	290
13.4	PVC com equação não homogênea . . . . .	293
13.5	RESUMO . . . . .	295
13.6	Exercícios Propostos . . . . .	296
14.	Série de Fourier Generalizada . . . . .	303
14.1	Por que Generalizar a Série de Fourier? . . . . .	303
14.2	Série de Fourier para um conjunto ortogonal qualquer . . . . .	305
14.3	Produto Interno com função peso . . . . .	305
14.4	Convergência na média da série de Fourier generalizada . . . . .	308
14.5	Desigualdade de Bessel . . . . .	310
14.6	Conjunto Completo . . . . .	311
14.7	RESUMO . . . . .	313
14.8	Exercício propostos . . . . .	314
15.	Problema de Sturm-Liouville . . . . .	317

15.1	Introdução . . . . .	317
15.2	Problema de Sturm-Liouville Regular . . . . .	319
15.3	Ortogonalidade das autofunções . . . . .	322
15.4	Problema de Sturm-Liouville Periódico . . . . .	333
15.5	Problema de Sturm-Liouville Singular . . . . .	335
15.6	RESUMO . . . . .	338
15.7	Exercícios Propostos . . . . .	340
16.	Série de Fourier de sequências particulares . . . . .	343
16.1	Problemas envolvendo a equação de Bessel . . . . .	343
16.1.1	Noções sucintas das funções de Bessel . . . . .	343
16.1.2	Série de Fourier-Bessel . . . . .	346
16.2	Problemas envolvendo a equação de Legendre . . . . .	349
16.2.1	Noções sucintas das funções de Legendre . . . . .	349
16.2.2	Série de Fourier-Legendre . . . . .	353
16.3	RESUMO . . . . .	355
16.4	Exercícios Propostos . . . . .	355
17.	Integral de Fourier . . . . .	359
17.1	Como surge uma solução na forma integral? . . . . .	359
17.2	Representação de uma função em Integral de Fourier . . . . .	361
17.3	Solução de problemas usando integral de Fourier . . . . .	366
17.3.1	Problema de Condução de calor numa haste infinita . . . . .	366
17.3.2	Problema na Corda numa região infinita . . . . .	369
17.3.3	Problema de Dirichlet num domínio infinito . . . . .	370
17.3.4	Problema de Dirichlet numa faixa infinita . . . . .	372
17.4	Existência da solução na forma integral . . . . .	373
17.5	RESUMO . . . . .	378
17.6	Exercícios propostos . . . . .	379
18.	Transformada de Fourier . . . . .	383
18.1	Formas Equivalentes da Representação Integral . . . . .	383
18.2	Transformada de Fourier Seno e Coseno . . . . .	387
18.3	Propriedades da transformada de Fourier . . . . .	390
18.4	<b>Função impulso unitário - Delta de Dirac*</b> . . . . .	394
18.5	Propriedade de Convolução . . . . .	397
18.5.1	Propriedade da função de convolução no tempo . . . . .	398
18.5.2	Propriedade de convolução na frequência . . . . .	401
18.6	RESUMO . . . . .	404
18.7	Exercícios propostos . . . . .	407
19.	Solução pelo método das transformadas . . . . .	411

19.1 Principais propriedades da TF envolvendo derivadas . . . . .	411
19.2 Solução com emprego da transformada de Fourier . . . . .	414
19.2.1 Problema de Dirichlet num domínio infinito . . . . .	414
19.2.2 Problema de Neumann em região infinita . . . . .	416
19.2.3 Problema de condução do calor num haste infinita . . . . .	417
19.3 Aplicação da transformada de Laplace . . . . .	422
19.4 RESUMO . . . . .	425
19.5 Exercícios Propostos . . . . .	427





## Chapter 1

# Noções Básicas de EDP

**Finalidade** - Para usar adequadamente as técnicas de resolução de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é indispensável conhecer previamente algumas definições tais como linearidade, homogeneidade e tipo ou classe da equação. O método a ser usado depende também do número de variáveis da equação, da geometria da região a ser considerada e se esta é ou não limitada, além de outros aspectos da própria equação. Como estas equações geralmente envolvem condições auxiliares vamos apresentar as que aparecem com maior frequência e as EDPs que descrevem os principais problemas da física. A finalidade desta lição será a de apresentar uma visão geral sobre tais equações e as etapas que devemos seguir para resolver um dado problema. A resolução ficará para os próximos capítulos.

### 1.1 Por que estudar EDP?

Por vezes em várias áreas de conhecimento, tais como em Engenharia, Biologia, Física ou Economia, ao resolver um problema será preciso preliminarmente elaborar um modelo matemático capaz de representá-lo. Nestes modelos, geralmente, procuramos uma função que não aparece explicitamente mas sim satisfazendo uma equação envolvendo derivadas parciais. Assim, de um modo intuitivo, *Equação Diferencial Parcial* (EDP) é toda equação que contém derivadas parciais. Deve-se estudar as EDPs no sentido de procurar uma solução que satisfaça o modelo matemático que representa o problema físico.

**Exemplos** - As seguintes equações são exemplos de EDPs:

a)  $u_x + u_y + u = x + y$

b)  $u_{xx} + (u_y)^2 = \ln u$

De uma forma mais rigorosa EDP, de variável dependente  $u$  e variáveis independentes  $x$  e  $y$ , é uma equação que pode ser colocada na forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

onde  $F$  é uma função dada contendo pelo menos uma derivada parcial com

$(x, y)$  pertencendo a um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , e  $u$  a função a ser determinada. Se  $\Omega$  não for previamente dada, ficará implícito que ela será a maior possível de tal forma que os coeficientes sejam funções reais e contínuas.

## 1.2 Existe relação entre a teoria das EDOs e EDPs?

Como as derivadas parciais nada mais são do que derivadas ordinárias com respeito a uma variável, quando mantemos as demais fixas, pode parecer que o estudo das EDPs seja uma extensão imediata das EDOs, porém isto não acontece! Se é verdade que existe alguma semelhança entre a teoria de ambas, não é menos verdade que guardam profundas diferenças. A principal diferença é que, enquanto a solução geral da EDO depende de constantes arbitrárias, nas parciais tais soluções dependem de funções arbitrárias. Esta diferença dificulta em muito a resolução de problemas envolvendo EDP e, portanto, a solução geral de tais equações tem uso limitado. A resolução de problemas envolvendo EDP é bem mais difícil do que os que envolvem EDO e, de uma forma geral, as soluções não aparecem numa forma fechada, mas sim em termos de séries. A dificuldade está associada com a ordem da EDP, número de variáveis, geometria do problema, tipo das condições auxiliares, natureza da equação, etc.

## 1.3 Quais EDPs aparecem com maior frequência?

É curioso que, sob determinadas condições, ao modelar problemas físicos diferentes o número de EDPs de tais problemas é pequeno. Como será visto oportunamente as equações lineares de 2ª ordem homogêneas de **coeficientes constantes** são transformadas em **apenas 6** (seis) EDPs! Para traduzir para a linguagem matemática um problema físico emprega-se leis conhecidas da Física - o que é mais usual-, ou usa-se experiências capazes de relacionar as variáveis, sendo que neste último caso torna-se inevitável a introdução de erros embutidos nas medidas realizadas. Nesta seção não vamos abordar como se obtém a equação mas apenas apresentar as que aparecem com maior frequência.

### 1.3.1 Equação do Calor

A temperatura  $u(x, t)$  no ponto  $x$  e no instante  $t$ , de uma haste unidimensional de material homogêneo condutor de calor de difusibilidade  $\alpha^2$ , colocada no eixo  $x$  entre os pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , sem fontes de calor e isolada termicamente na lateral deve satisfazer a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

denominada de *equação do calor unidimensional*.

Para dimensões mais elevadas, por exemplo num sólido, ela se torna:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u$$

### 1.3.2 Equação da corda vibrante

Considere uma corda fina, ou fio, perfeitamente flexível (não oferece resistência ao ser dobrada) de densidade uniforme  $\rho$  e esticada horizontalmente no eixo  $x$ , fixa nas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ , por uma tensão uniforme  $T$  muito maior que o seu peso de forma que na sua posição de equilíbrio esteja em linha reta. Se a corda é posta a vibrar por meio de um **deslocamento inicial perpendicular** e se não existem outras forças atuantes, para pequenas vibrações transversais o deslocamento  $u(x, t)$  em um ponto  $x$  no instante  $t$ , deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = T/\rho$$

denominada de *equação da onda unidimensional*.

Para dimensões mais elevadas tais como a vibração de uma membrana a EDP que governa o deslocamento  $u$  é dada por :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u$$

### 1.3.3 Equação de Laplace

Esta equação *bidimensional*, que é dada por

$$\nabla^2 u = 0,$$

aparece em vários tipos de problemas, tais como:

i) Na equação de condução do calor com temperatura em estado estacionário, ou seja, quando  $\partial u / \partial t = 0$ . Neste caso será analisada a temperatura  $u$  depois de um certo tempo onde ela não irá mais variar com o tempo.

ii) Em eletricidade com fluxo estacionário de corrente elétrica. Neste caso  $u$  representa o potencial eletrostático.

iii) Potencial gravitacional em espaço livre.

Outras EDPs que surgem em problemas da Física são:

### 1.3.4 Vibração Transversal de uma Viga

A equação que descreve o movimento de uma viga inicialmente localizada no eixo  $x$  e posta a vibrar transversalmente, isto é, perpendicular à direção do eixo  $x$ , admitidas

4

pequenas vibrações, é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

onde  $u = u(x, t)$  é o deslocamento trasversal (flexão) e  $b^2$  uma constante que depende do material.

### 1.3.5 Equação do Telefone

No caso de fluxo de corrente elétrica em um par de condutores, tais como fios de telefone ou uma linha de transmissão, a equação da voltagem  $u = v(x, t)$  ou da corrente  $u = i(x, t)$ , sob certas condições, obedece a EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial u}{\partial t} + RG u ,$$

onde  $t$  é o tempo,  $x$  é a distância no cabo a partir de uma fonte num ponto  $A$ ,  $R$  é a resistência por unidade de comprimento do fio,  $G$  é a condutância por unidade de comprimento entre os fios,  $C$  é a capacitância e  $L$  indutância por unidade de comprimento. No sinal do telégrafo  $G$  e  $L$  são desprezíveis e portanto fazendo  $G \simeq 0$  e  $L \simeq 0$  obtemos a equação do telégrafo:

$$u_{xx} = RC u_t$$

Para altas frequências, pode-se colocar  $G \simeq 0$  e  $R \simeq 0$ , obtendo a equação do rádio

$$u_{xx} = LC u_{tt}$$

### 1.3.6 Equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

Esta equação aparece, por exemplo, ao usar o método de separação de variáveis na equação da onda e do calor.

### 1.3.7 Equação de Poisson

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

A função  $u = u(x, y, z)$  nesta equação poderá representar, por exemplo, potencial eletrostático numa região onde  $f(x, y, z)$  é proporcional à densidade de carga. A equação de Laplace é um caso particular desta equação.

### 1.3.8 Equação de Schrödinger

Esta equação surge, por exemplo, em certos problemas de mecânica quântica e em estado estacionário,  $\partial u / \partial t = 0$ , é dada por

$$\nabla^2 u + \alpha [E - V(x, y, z)] u = 0$$

#### COMENTÁRIOS

- (1) A obtenção das equações da onda e do calor será feita durante o curso.
- (2) Em coordenadas retangulares temos  $\nabla^2 u \equiv \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
- (3) Quando dizemos que a equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

é **unidimensional** se refere ao fato de  $x$  representar uma grandeza espacial, pois  $t$  representa o tempo. A equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

é **bidimensional** pois  $x$  e  $y$  são dimensões espaciais.

- (4) Observe que as equações da onda, calor, Laplace, Poisson, Helmholtz e a do telefone são casos particulares da EDP

$$\nabla^2 u + \lambda u + f = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t}$$

onde  $f$  é uma função de posição especificada, sendo  $\alpha, \beta$  e  $\lambda$  constantes particulares.

- (5) Embora o número de equações seja reduzido não se pode concluir que a tarefa de determinar suas soluções seja simples, isto porque, ao alterar ou acrescentar qualquer condição ao problema ou mudar a sua geometria, o procedimento para determinar a solução poderá ser totalmente diferente.

### 1.4 Classificação das EDPs

As EDPs são classificadas segundo alguns aspectos que descreveremos a seguir.

A *ordem* da EDP é a ordem da derivada parcial de maior ordem que nela aparece. Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & 2^a \text{ ordem} \\ u_x = (u_y)^2 & 1^a \text{ ordem} \end{array}$$

As principais equações da Física são de  $2^a$  ordem e por esta razão neste texto será abordado prioritariamente este tipo de equação.

O *número de variáveis* de uma EDP é o número de variáveis independentes que nela aparece. Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} u_t = uu_{xx} & u = u(t, x) & \text{duas variáveis} \\ u_x = u_y + u_z & u = u(x, y, z) & \text{três variáveis} \end{array}$$

De forma simplificada dizemos que uma EDP em  $u$  é *linear* se, depois de racionalizada, e sem frações, ela **não** apresenta produtos, divisões ou potências diferentes da unidade em  $u$  e em suas derivadas. A forma mais geral de uma EDP linear de 2ª ordem em  $u = u(x, y)$ , é

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (1.1)$$

onde admitiremos que  $A, B, \dots, F$  e  $G$  são funções contínuas nas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , numa dada região. No caso particular de  $A, B, \dots, F$  serem constantes, dizemos que a equação é de *coeficientes constantes*.

Se  $G = 0$ , a **equação linear** é dita *homogênea*, caso contrário, *não-homogênea*. Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} u_t = tu_{xx} + 2 & u = u(t, x) & \text{linear não-homogênea} \\ u_x = u_y + u & u = u(x, y) & \text{linear homogênea} \end{array}$$

Se a equação não é linear ela é dita *não-linear*. Se a equação não-linear for linear com respeito às derivadas de maior ordem ela é dita *semi-linear*. No caso de 2ª ordem, sendo  $u = u(x, y)$ , esta equação é dada por

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + H(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1.2)$$

onde admitimos que  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$  e  $C(x, y)$  não se anulam simultaneamente. Por exemplo, a equação de Sine-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0,$$

e a equação de Burger com viscosidade  $v$  constante,

$$v u_{xx} = u u_x + u_t,$$

são equações de segunda ordem semi-lineares.

Para as EDPs lineares e semi-lineares de 2ª ordem existe outra classificação que depende **apenas** dos coeficientes das derivadas de 2ª ordem. A equação (1.2) é classificada em três classes, tipos ou categorias, da seguinte forma:

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{Parabólica} \quad (1.3)$$

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \text{Hiperbólica} \quad (1.4)$$

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \text{Elítica} \quad (1.5)$$

Fisicamente as equações parabólicas descrevem o fluxo de calor ou o processo de difusão, as hiperbólicas os sistemas vibrantes e as elíticas os fenômenos em estado estacionário.

**Exemplos** - Em todo ponto do domínio temos

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, & \text{parabólica} \\ u_{xx} &= u_{tt}, & \text{hiperbólica} \\ u_{xt} &= u_x, & \text{hiperbólica} \\ u_{xx} + u_{yy} &= 0, & \text{elítica} \end{aligned}$$

O sinal de  $B^2 - 4AC$  depende do ponto e portanto uma mesma equação pode ser de diferentes classes sobre o domínio. Uma equação importante que ilustra este caso, e que aparece no estudo de fluxo dos fluidos sob certas condições em estado estacionário  $\partial u / \partial t = 0$ , é

$$(1 - M^2)u_{xx} + u_{yy} = 0$$

A constante  $M$  é chamada de *número de Mach* e representa a razão entre a velocidade de uma aeronave e a do som no meio em que a aeronave viaja (ref [12]). Em velocidade subsônica,  $M < 1$ , esta equação é elítica e quando for supersônico,  $M > 1$ , a equação é hiperbólica.

## COMENTÁRIOS

- (1) Neste texto vamos admitir que a classificação de EDP de coeficientes constantes, homogênea ou não-homogênea é apenas para as lineares.
- (2) Numa EDP a parte que contém as derivadas de maior ordem geralmente determina as principais propriedades das soluções e esta é chamada de *parte principal* da EDP. Na equação de 2ª ordem (15.1) a expressão

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy}$$

é a sua parte principal e  $B^2 - 4AC$  é o seu *discriminante*. Se a equação dada tivesse o termo  $2B$ , em vez de  $B$ , a expressão do discriminante seria  $B^2 - AC$ .

- (3) Como será visto neste texto, existem semelhanças entre propriedades de equações de uma mesma classe/tipo, mas profundas diferenças entre equações de classes distintas. Por exemplo, as condições impostas sobre uma EDP para fornecer solução única dependerá da classe da equação.
- (4) Quando a equação puder mudar de classe/tipo no domínio de seus coeficientes dizemos que a equação é de *classe mista*.
- (5) Note que a EDP (1.1) parece com a seção cônica geral:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta equação algébrica representa uma elipse, parábola ou hipérbole se o sinal de  $B^2 - 4AC$  for respectivamente menor, igual ou maior que zero.

- (6) Existe uma classe de EDP mais ampla que a semi-linear que é chamada de EDP quase-linear, por exemplo, a equação

$$u_x u_{xx} + y u_y - u^2 = 0$$

não é semi-linear mas é quase-linear. No entanto na literatura sobre este assunto estas definições podem vir permutadas pois em inglês o que chamamos de semi-linear é "*almost linear*", e quase-linear é "*quasilinear*".

- (7) O procedimento que permite a classificação de uma equação de 2ª ordem com mais de duas variáveis é feito a partir da análise dos autovalores da matriz formada a partir dos coeficientes da parte principal da equação. Embora não seja usual, existe também uma forma de se definir classe para equações de ordem superior a dois.

## 1.5 Operador Diferencial Parcial

Tal como uma função  $f$  que a cada variável  $x$  de seu domínio associa um único valor  $f(x)$ ,  $L = d/dx$  associa a cada função diferenciável  $g$ , uma única função  $Lg$ . Esta é a idéia de operador que, extrapolando para casos com mais de uma variável independente, podemos usá-la no estudo das EDPs. Admitindo-se que a variável dependente seja  $u$  podemos representar uma EDP como sendo

$$Lu = f, \quad \text{ou} \quad L(u) = f,$$

onde  $Lu$  contém unicamente termos em  $u$  e em suas derivadas, porém  $f$  não os contém.  $L$  é chamado de *operador diferencial parcial*. Por exemplo, a equação

$$u_{xx} - x u_{yy} = 0$$

será simbolicamente representada por

$$L_1 u = 0, \quad \text{ou} \quad L_1(u) = 0$$

onde  $L_1$  é o operador diferencial parcial

$$L_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

O operador  $L$  é linear se satisfaz a condição

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L u_1 + c_2 L u_2$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias. Por exemplo,  $L_1$  definido anteriormente é linear, porém  $L_2$  definido por

$$L_2 u = (u_x)^2 + (u_y)^2$$



é não-linear.

Se  $L$  for um operador linear podemos estender este conceito para um número finito de funções. Assim

$$L[\sum_{i=1}^n c_i u_i] = \sum_{i=1}^n c_i L u_i,$$

onde

$$u = \sum_{i=1}^n c_i u_i,$$

é chamada de *combinação linear* das funções  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

De forma alternativa dizemos que a equação  $L_1 u = G$ , onde  $G$  independe de  $u$  e de suas derivadas, é linear se  $L_1$  for um operador linear.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} L_1 u &\equiv x u_{tt} - u_x = xt && \text{é linear} \\ L_2 u &\equiv u u_x - u_t = 0 && \text{é não-linear} \end{aligned}$$

Com respeito à forma mais geral da EDP **linear** de 2ª ordem (1.1), com  $u = u(x, y)$ , podemos escrevê-la simplesmente como

$$L u = G, \tag{1.6}$$

onde

$$L \equiv A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F \bullet, \tag{1.7}$$

sendo  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  admitidas funções reais e contínuas. Alternativamente  $L$  pode ser considerado como uma transformação linear de  $C^2(\Omega)$  em  $C(\Omega)$ , que é o espaço de todas as funções contínuas em  $\Omega$ .

Se  $G \equiv 0$ , esta equação linear é dita *homogênea*, caso contrário, *não-homogênea*. Por exemplo:

$$\begin{aligned} u_t &= e^{-x} u_{xx} + \sin t && \text{linear, não-homogênea} \\ u_{xx} - u_{tt} - xt &= 0 && \text{linear, não-homogênea} \\ u_{xx} &= u && \text{linear, homogênea} \end{aligned}$$

Se  $L_1$  e  $M_1$  são operadores lineares em  $D$ , então a *soma* destes operadores, definida por

$$(L_1 + M_1)u \equiv L_1 u + M_1 u,$$

também é linear.

Desde que  $M_1 u$  e  $L_1(M_1 u)$  estejam definidos nos respectivos domínios, a *composição de operadores* ou o *produto* de  $L_1$  e  $M_1$  é definido por

$$(L_1 M_1)u = L_1(M_1 u)$$

Assim se definirmos os operadores

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

temos que

$$D_x^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad D_y^2 = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad D_x D_y = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e portanto o operador  $L$  pode ser escrito também como

$$L \equiv AD_x^2 + BD_x D_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F \quad (1.8)$$

Se  $L_1$ ,  $M_1$  e  $N_1$  são operadores lineares e as operações envolvidas estiverem definidas, valem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} L_1 + M_1 &= M_1 + L_1 && \text{comutativa} \\ (L_1 + M_1) + N_1 &= L_1 + (M_1 + N_1) && \text{associativa} \\ (L_1 M_1) N_1 &= L_1 (M_1 N_1) && \text{associativa} \\ L_1 (M_1 + N_1) &= L_1 M_1 + L_1 N_1 && \text{distributiva} \end{aligned}$$

além de que  $L_1 M_1$  também é linear.

Se, particularmente, os operadores forem de **coeficientes constantes** e as derivadas mistas forem iguais, então também  $L_1 M_1 = M_1 L_1$ . Se os operadores não forem de coeficientes constantes, esta propriedade **não** será necessariamente verdadeira, fato ilustrado no exercício a seguir.

**Exercício** - Considere os seguintes operadores lineares:

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y} \quad M_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial y}$$

Verifique que  $L_1 M_1 \neq M_1 L_1$ .

**Solução** - Usando a definição dos operadores  $L_1$  e  $M_1$  tem-se que

$$\begin{aligned} L_1 M_1 u &= L_1 (M_1 u) = L_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - y \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} M_1 L_1 u &= M_1 (L_1 u) = M_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} + x \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - y \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Destes resultados tem-se que  $L_1 M_1 \neq M_1 L_1$ . ◀

## 1.6 Condições Auxiliares

Para descrever um problema físico além da própria EDP devemos acrescentar condições auxiliares ou complementares que irão adicionar importantes informações decorrentes da própria situação física do problema. Tais condições são indispensáveis para que se tenha solução única.

Por exemplo, para resolver um problema envolvendo a equação do calor no interior de uma haste de comprimento  $L$  entre os pontos  $x = 0$ , e  $x = L$ , seria desejável o conhecimento, por exemplo, da temperatura  $u$  nas extremidades (contorno) da haste, ou seja dos valores

$$u(0, t) \quad \text{e} \quad u(L, t),$$

e da distribuição inicial da temperatura, ou seja do valor de  $u(x, 0)$ .

Estas condições auxiliares, que complementam a formulação do problema, são chamadas de condições iniciais ou condições de contorno:

a) O termo *condição de contorno* é apropriado quando impomos condições sobre a solução, ou suas derivadas, na *fronteira* da região do *espaço*, no exemplo acima,  $u(0, t)$  e  $u(L, t)$ ;

b) O termo *condição inicial* é usado principalmente quando uma das variáveis independentes é o *tempo*, no exemplo acima  $u(x, 0)$ . É a condição, ou condições, que deve ser satisfeita no instante que consideramos o início do processo físico, por exemplo, em  $t = 0$ , e que pode envolver uma combinação de  $u(x, t)$  e de suas derivadas.

Não existe uma distinção clara entre estes termos e, dependendo do autor, pode-se considerar a condição inicial como sendo uma condição de contorno no sistema espaço-tempo onde um dos eixos representa a coordenada tempo. Vamos assim usá-los conforme sejam apropriados.

Problemas como este do calor envolvendo a EDP, a condição inicial e as condições de contorno, é chamado de *problema de valor inicial e de contorno* (PVIC) para a temperatura da haste.

Dependendo do problema, as condições iniciais (CI) e/ou as de contorno(CC), podem ser mais abrangentes e envolver uma combinação como, por exemplo, em

$$u(x, 0) + u_y(x, 0) = e^x$$

Quando se resolve um problema é importante no início identificar as variáveis e os intervalos tanto para as condições auxiliares como para a própria equação. Este fato é relevante pois caso contrário podemos ter respostas ambíguas. O próximo exercício servirá para esclarecer o tipo de intervalo que deve ser tomado.

**Exemplo** - Considere uma haste circular unidimensional de difusibilidade  $\alpha^2$ , homogênea e de comprimento  $L$ , colocada no eixo  $x$ , isolada termicamente na

sua lateral e sem fontes de calor. Supomos que no instante inicial  $t = 0$  a haste tem temperatura constante de  $10^0 C$  e que as extremidades foram aquecidas e mantidas à temperatura de  $100^0 C$ . A temperatura da haste num ponto  $x$  e no tempo  $t$ , que será indicada por  $u(x, t)$ , deverá satisfazer a seguinte formulação:

(1) A EDP

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

(2) A condição inicial

$$u(x, 0) = 10, \quad 0 < x < L,$$

(3) As condições de contorno

$$u(0, t) = 100, \quad u(L, t) = 100, \quad t > 0$$

A respeito dos intervalos, em problemas como este, será preferível considerar **abertos** pois:

**1** - evita a discussão da EDP sobre o contorno da região pois, caso contrário, seria necessário considerar derivadas unilaterais com respeito a  $x$  em  $x = 0$  e em  $x = L$ , e com respeito a  $t$ , em  $t = 0$ ;

**2** - se nas condições impostas admitirmos os intervalos  $t \geq 0$  e  $0 \leq x \leq L$ , em vez de abertos, poderá haver contradição. Se tal ocorresse no problema anterior função  $u(x, t)$  deveria satisfazer ao mesmo tempo as condições **contraditórias**

$$u(0, 0) = u(L, 0) = 100 \quad e \quad u(0, 0) = u(L, 0) = 10$$

Mesmo em problemas nos quais as condições auxiliares em intervalos fechados forem aceitáveis, será admitido que os intervalos sejam abertos.

Embora o PVIC apresentado envolvendo apenas intervalos abertos não tem contradição matemática é fisicamente impossível alterar a temperatura nas extremidades da haste instantaneamente de  $10^0 C$  a  $100^0 C$ . Assim pode-se antever algum tipo de anomalia na solução do problema próximo aos pontos  $x = 0$  e  $x = L$  quando o tempo se aproximar de zero!

De forma semelhante à classificação da EDP, as condições auxiliares são também classificadas em lineares e não-lineares. Por exemplo, a condição

$$u(L, t) + u_x(L, t) = \sin t$$

é linear e não-homogênea, ao passo que a condição

$$u(0, t) + 2u_x(0, t) = 0$$

é linear e homogênea. Um *problema é dito linear* quando a EDP e condições auxiliares envolvidas forem lineares.

Tal como nas EDP as condições auxiliares podem ser expressas por operadores, que transformam uma função em outra com menos variáveis independentes. Por exemplo, a condição

$$u(x, 0) + u_y(x, 0) = e^x$$

pode ser representada simbolicamente por:

$$Bu(x, y) = e^x$$

onde:

$$Bu(x, y) \equiv u(x, 0) + u_y(x, 0)$$

Uma condição auxiliar  $Bu = f$  é linear se  $B$  for um operador linear. Além disso se  $f \equiv 0$ , a condição auxiliar é dita homogênea. Se a equação dada e as condições impostas forem lineares, dizemos que o problema é linear. Assim o problema:

$$\begin{cases} Lu = g \\ B_i u = g_i \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.9)$$

será linear, se  $L$  e  $B_i$  forem lineares, ou seja, se

$$\begin{aligned} L(a_1 u_1 + a_2 u_2) &= a_1 L u_1 + a_2 L u_2 \\ B_i(b_1 u_1 + b_2 u_2) &= b_1 B_i u_1 + b_2 B_i u_2 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

## COMENTÁRIOS

- (1) Uma condição de contorno que envolve dois pontos, tal como em

$$u(\mathbf{0}, t) - u_x(\mathbf{L}, t) = 0,$$

é chamada de *condição de contorno mista*. Se envolve apenas um ponto, tal como em

$$u_x(L, t) + hu(L, t) = 0,$$

é chamada de *condição de contorno separada*.

- (2) Em algumas EDPs, tal como a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

a constante  $\lambda$  tem que tomar valores especiais, e não arbitrários, a fim de que as condições de fronteira sejam satisfeitas.

- (3) Região é por definição um subconjunto aberto e conexo, ou seja, centrada em cada ponto pode ser traçado uma bola aberta totalmente contida neste conjunto, e todo par de pontos deste subconjunto podem ser ligados por uma curva diferenciável inteiramente contida nele. Por exemplo, o interior de um quadrado ou o interior da parte formada entre dois círculos concêntricos, são exemplos de região.

- (4) Fronteira de uma região  $\Omega$  é por definição o conjunto  $\partial\Omega$  de todos os pontos onde qualquer bola aberta centrada em um ponto de  $\partial\Omega$  contém pontos de  $\Omega$  e pontos fora dela.
- (5) As EDPs elípticas por descreverem processos estacionários,  $\partial/\partial t = 0$ , envolvem apenas derivadas parciais em relação as variáveis espaciais e as suas soluções são determinadas apenas **por condições de contorno**.
- (6) Quando  $t$  for tempo as condições iniciais são prescritas num tempo  $t = t_0$  e, geralmente, não se usa considerar uma condição num ponto final  $t = t_f$ .
- (7) As equações parabólicas e hiperbólicas, chamadas de *equação de evolução*, descrevem processos que variam com o tempo  $t$  e envolvem derivadas parciais em relação a variáveis, espacial e temporal  $t$ . As suas soluções são determinadas **por condições iniciais** e, dependendo do domínio, das **condições de contorno**.

## 1.7 Condições auxiliares mais usadas

Os tipos de condições auxiliares lineares que apareceram com mais frequência nos principais problemas da Física Matemática são quatro e recebem denominação própria. Se a função incógnita for  $u(x, y)$ , tem-se a seguinte classificação:

### 1.7.1 Condição de Dirichlet ou de Primeira Espécie

A incógnita  $u$  é especificada em cada ponto da fronteira (contorno). No exemplo do problema do calor na haste em  $0 < x < L$ , as condições

$$u(0, t) = 100, \quad u(L, t) = 100, \quad t > 0$$

são do tipo Dirichlet

O problema que consiste na equação de Laplace, definida no interior de uma região limitada, e tal que sua solução assuma valores conhecidos sobre o seu contorno é chamado de *problema de Dirichlet*.

**Exemplo** - Considere a equação bidimensional de Poisson definida numa região limitada  $\Omega \subset R^2$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

onde  $f$  é uma função definida em  $\Omega$ . A condição

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

onde  $g(x, y)$  é conhecida, representa o valor da incógnita  $u$  sobre a fronteira da região e portanto é uma condição de contorno do tipo Dirichlet. Este problema envolvendo a EDP e a condição de contorno, constitui um problema de valor de contorno (PVC).

### 1.7.2 *Condição de Neumann ou de Segunda Espécie*

Por vezes as condições de contorno são dadas pelas derivadas da função incógnita. Se a derivada normal da função incógnita  $u$  for conhecida sobre a fronteira de uma região finita, ou seja, se  $\partial u/\partial n$  for dada sobre o contorno, tem-se a *condição de Neumann*.

**Exemplo** - Considere a mesma equação do exemplo anterior

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

onde  $f$  é uma função dada em  $\Omega$ , uma região finita com fronteira  $\partial\Omega$ .

Uma condição de contorno de Neumann para a EDP acima, especifica a razão de alteração de  $u(x, y)$  nos pontos de fronteira  $\partial\Omega$  na direção da normal exterior a  $\partial\Omega$ . Expressamos isto na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y), \quad (x, y) \text{ sobre } \partial\Omega$$

onde  $n$  é a medida da distância em  $(x, y)$  em uma direção perpendicular a  $\partial\Omega$  (*tirar*). Em termos da derivada direcional, esta condição também pode ser expressa como:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \nabla u \cdot \vec{n} = g(x, y), \quad (x, y) \text{ sobre } \partial\Omega$$

onde  $\nabla u$  é o gradiente de  $u$  em  $(x, y)$  e  $\vec{n}$  é o vetor normal exterior unitário em  $(x, y)$ .

O problema de resolver a equação de Laplace no interior de uma região quando esta condição for imposta na fronteira é chamado de *problema de Neumann*.

### 1.7.3 *Condição de Robin ou de Terceira Espécie*

Por vezes as condições auxiliares podem se apresentar de uma forma mais elaborada tal como em

$$u(0, t) + 2u_x(0, t) = \sin t,$$

Esta condição auxiliar é um exemplo da condição de Robin segundo a seguinte definição. Chama-se *Condição de Robin* ou de *Terceira Espécie* toda combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, ou seja, no plano  $xy$  tem a forma

$$l \frac{\partial u}{\partial n} + hu = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

onde  $\partial\Omega$  é o contorno da região  $\Omega$ ,  $l$  e  $h$  são constantes e  $g$  é uma função conhecida. O problema de resolver a equação de Laplace em  $\Omega$  com esta condição na fronteira é chamado *problema de Robin*.

**Exemplo** - As condições de contorno de Robin para o problema de condução de calor na haste já descrito são:

a)  $x = L$  :

$$l_1(\partial u/\partial x)(L, t) + h_1 u(L, t) = g_1(t), \quad t > 0$$

pois na haste em  $x = L$  a derivada normal exterior está na direção do eixo  $x$ , no sentido de  $x$  crescente e consequentemente em  $x = L$  ela é dada por  $\partial u/\partial n \equiv \partial u/\partial x$ .

b)  $x = 0$  :

$$-l_2(\partial u/\partial x)(0, t) + h_2 u(0, t) = g_2(t), \quad t > 0$$

pois a normal exterior em  $x = 0$  está na direção do eixo  $x$ , no sentido de  $x$  decrescente, ou seja, em  $x = 0$  tem-se  $\partial u/\partial n \equiv -\partial u/\partial x$ .

#### 1.7.4 *Condição de Cauchy*

Em problemas com domínio não limitado a solução pode ser determinada unicamente pela prescrição das condições iniciais. A solução de tais problemas pode ser interpretada fisicamente como uma solução não afetada pelas condições de contorno. Se a EDP de 2ª ordem

$$Lu = u_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

apresentar derivadas parciais de 2ª ordem, por exemplo em relação a  $y$ , e se são conhecidos os valores de

$$u(x, y_0) \quad \text{e} \quad u_y(x, y_0),$$

o problema de se determinar a solução de uma EDP de 2ª ordem satisfazendo estas condições é conhecido como problema de valor inicial com respeito a  $y$ .

Estas condições são mais usuais nas seguintes equações:

(1) na equação da onda,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

onde  $u(x, t_0)$  e  $u_t(x, t_0)$  são os valores iniciais do deslocamento transversal  $u$  e da velocidade transversal  $u_t$ , respectivamente, e;

(2) na equação do calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

onde por ter apenas  $u_t$ , a condição inicial será  $u(x, t_0)$  e esta representa a temperatura inicial em  $t = t_0$ .



Num caso mais geral se nesta equação  $Lu = G$ , se em vez da reta  $y = y_0$  os valores de  $u$  e de suas derivadas de primeira ordem forem prescritos ao longo de uma curva  $L_0$  no plano  $xy$  o problema de valor inicial é chamado *problema de Cauchy*.

### COMENTÁRIOS

- (1) Os problemas com condições auxiliares mencionados até aqui são chamados de problemas com condições no interior e diferem do problema com condições no exterior em dois aspectos:
  - (a) para problemas de valores no exterior, a região considerada é ilimitada;
  - (b) soluções de problemas no exterior devem satisfazer a exigência adicional de ser limitada na região ilimitada.
- (2) Veremos oportunamente que, dependendo do caso, para termos solução de um PVI as condições de Cauchy não podem ser arbitrariamente impostas, mas devem satisfazer *condições de compatibilidade* (ver referências [3] e [12]).
- (3) Alguns autores chamam a condição de Robin apenas de condição de 3<sup>a</sup> espécie e reservam este nome, ou de *problema misto*, para o caso de contornos com tipos diferentes, por exemplo, numa parte a condição é de Dirichlet e em outra a de Neumann.
- (4) Alguns autores, chamam de misto o problema de valor inicial e de contorno (ver [8]).
- (5) Uma interpretação física das condições de Neumann e de Robin serão dadas ao justificar a equação da onda e do calor.

### 1.8 Planejamento para resolver um problema físico

Consiste basicamente de três etapas:

#### I - Formulação ou Modelamento do Problema

Nesta primeira etapa deve-se construir um modelo matemático capaz de representar o problema físico. Esta modelagem tem duas partes:

- a) formulação da EDP que consiste em determinar uma ou mais EDPs que governam o problema;
- b) formulação das Condições Auxiliares que traduzem em linguagem matemática a informação física.

#### II - Resolução do Problema

Nesta etapa deve-se primeiramente encontrar uma solução formal candidata à solução.

#### III - Análise da Solução

Uma vez encontrada uma candidata à solução uma análise deve ser feita para saber se ela representa efetivamente a solução física desejada, ou seja, devemos

verificar se o problema é bem posto, isto é, se a solução realmente existe, se é única e estável. Isto é o que será abordado a seguir.

### a) Existência e Unicidade

O problema matemático que representa o problema físico deve ter pelo menos uma solução, isto é, deve existir uma função suficientemente diferenciável satisfazendo a EDP e as condições auxiliares. Não podemos afirmar que o problema matemático tem solução apenas baseado no fato do problema físico associado também apresentar solução. Isto porque o que está em jogo é o modelo matemático e este, por ter sido obtido por idealizações, talvez não apresente solução.

Num problema físico existe uma única solução e portanto o modelo matemático correspondente deve apresentar também uma única solução. Se isto não ocorrer o modelo deve ser revisto.

A existência e unicidade das soluções dos problemas envolvendo EDP diferem das dos problemas envolvendo EDOS. Enquanto que nestas últimas existem resultados bastante gerais sobre a existência e unicidade, nas EDPs estes são raros. Isto induz a seguinte definição: um conjunto de condições auxiliares se diz *apropriado* para um problema envolvendo EDP se existe uma única função que satisfaz a equação e as condições envolvidas.

Há condições auxiliares que são apropriadas para as equações de um mesmo tipo, por exemplo, elítica, e que **não** são apropriadas para equações dos demais tipos, hiperbólica e parabólica! Mesmo nas equações de coeficientes constantes

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y),$$

onde  $G$  é contínua, não existe um mesmo conjunto apropriado independente da sua classe.

A determinação do conjunto apropriado para um tipo de equação é uma tarefa difícil. A dificuldade reside no fato de termos inúmeras possibilidades de solução da EDP e assim não é fácil colocar as condições auxiliares num problema físico de forma a se ter uma única solução: se muitas forem colocadas, poderá não haver solução, se poucas, poderá ter mais de uma solução. Em outras palavras deve ser na "medida certa", e esta medida depende do tipo da EDP.

Assim para ilustrar, na mesma equação

$$(1 - M^2)u_{xx} + u_{yy} = 0$$

podemos ter  $M < 1$  (equação elítica) e  $M > 1$  (equação hiperbólica), e para ambas os conjuntos apropriados são diferentes.

### b) Estabilidade

Para ilustrar este conceito vamos analisar um modelo fácil obtido por meio de equações algébricas. Admitimos que o sistema

$$3x + 1,52y = 1, \quad 2x + 1,02y = 1$$

descreve um experimento físico, onde os coeficientes estão sujeitos a erros de medidas. A solução é dada por  $x = -25$ ,  $y = 50$ . Se contudo, neste mesmo modelo, colocarmos 1,03 no lugar de 1,02, a solução torna-se:

$$x = -9,8 \quad y = 20$$

Observe que uma variação de cerca de 1% num dos coeficientes alterou profundamente a solução, em outras palavras, o modelo não depende continuamente dos dados! Portanto é aconselhável que ele seja reavaliado.

Na formulação de problemas envolvendo EDP temos fato semelhante. Ao formular um problema físico, por vezes introduzimos "pequenos" erros, quer nas condições auxiliares quer na própria equação. Estes erros podem ter sido originados de fatos experimentais ou de simplificações. Contudo o que se espera de um modelo é que esses erros não proporcionem grandes alterações na solução, caso contrário, o melhor que se pode fazer é olhar para a experiência que resultou no modelo sob outro ponto de vista, modificando, por exemplo, as variáveis e formulando um outro problema.

Assim, intuitivamente dizemos que a solução é estável ou que depende continuamente dos dados do problema, isto é, das funções que prescrevem as condições auxiliares, ou dos coeficientes, ou dos termos não-homogêneos, se pequenas variações nestes dados conduzem no máximo a pequenas alterações na solução. O problema cuja solução torna-se muito sensível a pequenas alterações dos dados é dito instável.

Quando uma representação matemática de um fenômeno físico por uma EDP e um conjunto de condições auxiliares tem uma única solução e é estável dizemos que ela é *bem posta*, ou bem formulada. Caso contrário, se falhar pelo menos uma destas três condições, o problema é dito *mal posto*.

Neste texto, como o enfoque é introdutório e o objetivo principal será determinar a solução formal do problema, nem sempre será discutido se o problema é ou não bem posto.

### COMENTÁRIOS:

- (1) Note que a definição matemática de estabilidade não foi apresentada, pois o que é "pequeno" ou "grande" é relativo. Para casos particulares a definição será dada oportunamente.
- (2) Na teoria das EDPs existem teoremas que prevêm se um dado modelo matemático tem solução e se é única, porém estes tem alcance limitado e geralmente apresentam um enunciado complicado que dependem de uma série de hipóteses principalmente do tipo da EDP, das condições auxiliares e da geometria do problema. Assim, ao tratar de um problema específico, em vez de recorrer à teoria geral a estratégia será construir uma solução que verifica o problema e depois provar se ela é única e estável.
- (3) A unicidade de solução de um problema geralmente é feita admitindo-se a existência de duas soluções e provando que são iguais.

## 1.9 Resumo

Equação Diferencial Parcial (EDP) é toda equação que envolve derivadas parciais. A forma mais geral de uma EDP de 2ª ordem linear, com variável dependente (incógnita)  $u$  e duas variáveis  $x$  e  $y$ ,  $u = (x, y)$ , é

$$Lu \equiv Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

onde admitimos que  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  são funções reais contínuas de  $x$  e  $y$  numa região  $\Omega \subset R^2$  e  $u$  é de classe  $C^2(\Omega)$ . Esta equação na forma de operadores pode ser escrita como

$$Lu = G,$$

onde  $G$  depende apenas das variáveis independentes  $x$  e  $y$ . A equação é dita linear se  $L$  for um operador linear, isto é, se:

$$L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2,$$

Se  $G = 0$ , a equação linear é dita homogênea; caso contrário, não homogênea.

A classe, tipo ou categoria da EDP é caracterizada pelo sinal do discriminante  $B^2 - 4AC$ . Se:

- a)  $B^2 - 4AC = 0$ , equação é parabólica;
- b)  $B^2 - 4AC < 0$ , equação é elítica; e
- c)  $B^2 - 4AC > 0$ , equação é hiperbólica.

As EDPs que frequentemente aparecem em problemas práticos são:

- a) **Equação do calor (parabólica):**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- b) **Equação da corda vibrante (hiperbólica):**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- c) **Equação de Laplace (elítica):**

$$\nabla^2 u = 0$$

Além de condições iniciais que podem acompanhar, ou não um problema, as condições de contorno que frequentemente aparecem são:

- a) **Condição de Dirichlet** - a incógnita é especificada no contorno
- b) **Condição de Neumann** - a derivada normal exterior da incógnita é especificada no contorno

c) **Condição de Robin** - é a condição do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = f, \quad \text{em } \partial\Omega$$

Tanto as EDPs como as condições auxiliares podem ser escritas por meio de operadores. Por exemplo,

$$\begin{aligned} Lu(x, y) &\equiv G(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ Bu(x, y) &= f(x), & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Um problema é chamado linear se os operadores envolvidos forem lineares.

### 1.10 Exercícios Propostos

(1) Verifique a linearidade nas equações abaixo e indique a ordem.

- (a)  $w\partial^2 w/\partial r^2 = rst$  *Resp:* não linear, 2ª ordem  
 (b)  $\partial^2 \phi/\partial x^2 + \partial^2 \phi/\partial y^2 + \partial^2 \phi/\partial z^2 = 0$  *Resp:* linear, 2ª ordem  
 (c)  $\partial z/\partial r + \partial z/\partial s = 1/z^2$  *Resp:* não linear, 1ª ordem

(2) Classifique as seguintes equações:

- (a)  $u_{xx} + 3u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x - 2u_y + 4u = 2x - 3y$  *Resp:* elítica  
 (b)  $xu_{xx} + yu_{yy} + 3y^2u_x = 0$   
 (c)  $u_x + u_{xy} = 4$

(3) Mostre que os operadores  $L_1, L_2$  e  $L_3$  definidos abaixo, são lineares:

$$L_1u = u_x - u_y, \quad L_2u = xu_x + y^2u_y + xyu, \quad L_3u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

(4) Supomos que  $u_1$  e  $u_2$  ambas satisfazem as condições de contorno linear e homogênea:

$$\begin{aligned} u_x(0, t) + h_1u(0, t) &= 0 \\ u_x(1, t) + h_2u(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

Neste caso,  $u_1 + u_2$  também satisfaz estas condições de contorno?



## Chapter 2

# Simplificação de EDPLs

**Finalidade** - Ao formular um problema físico as EDPs que aparecem nem sempre tem uma "cara" simpática e assim para quem pretende resolve-lo o primeiro conselho é colocar a equação numa forma mais simples. A título de ilustração cabe a seguinte pergunta: o que as EDPs

$$\begin{aligned}x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} &= 0, & x > 0, & y > 0 \\ u_{\eta\eta} &= 0\end{aligned}$$

têm em comum?

A resposta é que a 2ª equação foi obtida da primeira por uma mudança de variáveis e portanto são equivalentes!

A finalidade deste capítulo será descobrir a transformação que simplifique uma EDP linear. Num caso particular quando a equação de 2ª ordem for de coeficientes constantes, e que será a prioridade deste capítulo, também será possível simplificar termos contendo derivadas de 1ª ordem. É curioso que esta última classe de equações, no caso **homogêneas**, pode ser reduzida em apenas **seis** simples equações! Neste capítulo o conhecimento da regra da cadeia é indispensável e começaremos com o caso de equações de 1ª ordem.

## 2.1 Simplificação de EDPLs de primeira ordem

### 2.1.1 Coeficientes Constantes

Para orientar o que se pretende fazer em casos mais gerais vamos tomar como exemplo uma equação de 1ª ordem bem simples que, como uma bússola, nos orientará em casos mais complexos. Considere a EDP

$$u_x - u_y = 0, \quad u = u(x, y)$$

e para simplificá-la vamos adotar três procedimentos:

#### I - Transformação Específica

Se efetuarmos a mudança de variáveis:

$$\xi = \varphi(x, y) = x + y, \quad \eta = \psi(x, y) = x - y$$

e usarmos a regra da derivação composta, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 1 \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 1 \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Substituindo na equação, segue que:

$$u_x - u_y = u_\xi + u_\eta - u_\xi + u_\eta \equiv 0,$$

e portanto a equação original, com esta transformação, resulta na simples equação

$$u_\eta = 0$$

A equação foi simplificada mas uma dúvida ainda persiste: como se faz para achar a transformação simplificadora? Vamos usar uma transformação específica, que é a linear, e outra geral.

## II - Transformação Linear

Vamos procurar uma transformação linear do tipo

$$\xi = \varphi(x, y) = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \phi(x, y) = \gamma x + \delta y,$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  são parâmetros a serem determinados, de modo a simplificar a EDP dada.

Usando a regra da cadeia tem-se:

$$u_x = \alpha u_\xi + \gamma u_\eta \quad u_y = \beta u_\xi + \delta u_\eta$$

Substituindo estas expressões de  $u_x$  e  $u_y$  na EDP segue:

$$u_x - u_y = (\alpha u_\xi + \gamma u_\eta) - (\beta u_\xi + \delta u_\eta) = 0$$

ou que

$$(\alpha - \beta)u_\xi + (\gamma - \delta)u_\eta = 0$$

Para simplificar esta expressão **uma** possibilidade será

$$\alpha - \beta = 0, \quad \gamma - \delta \neq 0,$$

e para determinar a transformação desejada tomamos, por exemplo,

$$\alpha = \beta = 1 \quad e \quad \gamma = 1 \quad \delta = -1$$

Assim **uma** transformação adequada para nossa finalidade é

$$\xi = \varphi(x, y) = x + y \quad \eta = \psi(x, y) = x - y$$



que é igual a usada anteriormente.

No caso mais geral da EDPL de **coeficientes constantes**

$$Au_x + Bu_y + Cu = 0 \quad (2.1)$$

podemos usar o **mesmo procedimento**. Admitindo-se  $A \neq 0$  e seguindo o mesmo roteiro vamos encontrar uma **transformação linear** simplificadora

$$\xi = \varphi(x, y) = \alpha x + \beta y = x, \quad \eta = \phi(x, y) = \gamma x + \delta y = Bx - Ay$$

que transformará esta EDP na equação

$$u_\xi + (C/A)u = 0 \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Coeficientes Quaisquer

O procedimento usado anteriormente com a transformação linear simplifica EDP lineares de **coeficientes constantes** mas **não** as de **coeficientes variáveis**. Assim vamos partir de uma transformação mais geral

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \phi(x, y),$$

$\xi$  e  $\eta$  de classe  $C^1$ , onde o objetivo será descobrir as expressões de  $\varphi$  e  $\phi$  que proporcionam uma simplificação. Embora destina-se às equações lineares em **geral** vamos aplicá-lo na mesma equação anterior usada anteriormente

$$u_x - u_y = 0, \quad u = u(x, y)$$

Pela regra da cadeia tem-se:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

que substituindo na EDP dada segue

$$(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) - (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) = 0$$

ou:

$$u_\xi(\xi_x - \xi_y) + u_\eta(\eta_x - \eta_y) = 0$$

Para simplificar esta equação toma-se, por exemplo, o coeficiente de  $u_\xi$  igual a zero, ou seja,

$$\xi_x - \xi_y = 0 \quad (2.3)$$

Por verificação uma função que satisfaz esta equação é:

$$\xi(x, y) = x + y$$

26

Para representar  $\eta(x, y)$  toma-se uma expressão qualquer desde que,  $\xi$  e  $\eta$ , sejam **linearmente independentes**, pois deve-se determinar univocamente  $(\xi, \eta)$  a partir de  $(x, y)$  e reciprocamente. Por exemplo, fazendo

$$\eta(x, y) = x - y$$

temos a seguinte equação simplificada

$$u_\eta = 0$$

Observe que no procedimento usado "chutamos" uma função que satisfaz a equação

$$\xi_x - \xi_y = 0,$$

que é a mesma equação original

$$u_x - u_y = 0!$$

Em outras palavras o procedimento como foi utilizado não deu nenhum "lucro".

No entanto a partir da regra de derivação implícita podemos achar esta função,  $\xi(x, y)$ , da seguinte forma: Sendo

$$\xi_x - \xi_y = 0,$$

e admitindo-se  $\xi_y \neq 0$ , podemos colocá-la na forma:  $\xi_x/\xi_y = 1$ . Por outro lado supondo que numa vizinhança de um ponto,  $y$  é uma função de  $x$ , definida implicitamente pela equação  $\xi(x, y) = c^{te}$ , se  $\xi_x$  e  $\xi_y$  existem, pela fórmula de derivação implícita segue

$$\frac{dy}{dx} = -\xi_x/\xi_y$$

Assim temos a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -1,$$

cuja solução geral é

$$y = -x + C, \text{ ou } y + x = C,$$

que são curvas de nível da função

$$\xi(x, y) = x + y.$$

a qual satisfaz a equação  $\xi_x - \xi_y = 0$ .

O procedimento anterior pode também ser aplicado para simplificar a EDP mais geral

$$A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = 0, \quad A \neq 0$$

onde  $A, B$  e  $C$  são funções contínuas numa região  $\Omega$  e  $u$  de classe  $C^1(\Omega)$ .

Admitindo a transformação

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = \phi(x, y)$$

a equação anterior torna-se

$$(A\xi_x + B\xi_y) u_\xi + (A\eta_x + B\eta_y) u_\eta + Cu = 0$$

onde os coeficientes são expressos em termos das novas variáveis  $\xi$  e  $\eta$ .

Para simplificar toma-se, por exemplo,

$$A\eta_x + B\eta_y = 0$$

onde devemos achar uma função que a satisfaça. Supondo que  $y$  é uma função de  $x$  na vizinhança de um ponto tal que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)},$$

após substituir na equação anterior obtemos

$$\eta_x + \eta_y \frac{dy}{dx} = 0,$$

e portanto

$$\frac{d}{dx}(\eta(x, y(x))) = 0$$

Logo

$$\eta(x, y(x)) \equiv c^{te}$$

Assim ao resolvermos a equação ordinária acima vamos encontrar uma relação  $\eta(x, y) = c^{te}$  onde para tal função o coeficiente de  $u_\eta$  será nulo.

Se tomarmos para  $\xi$ , por exemplo,

$$\xi = \varphi(x, y) = x$$

e como  $\eta_y$  é suposta **não** nula, o jacobiano

$$J \equiv \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \eta_y$$

também **não** será nulo e portanto a transformação construída desta forma é **invertível**.

**Resumindo** - A transformação

$$\xi(x, y) = x, \quad \eta = \eta(x, y),$$

onde  $\eta(x, y) = c^{te}$  define implicitamente  $y$  como função de  $x$ , que é solução da equação ordinária

$$dy/dx = B/A, \quad (2.4)$$

permite simplificar a equação

$$A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = 0 \quad (2.5)$$

tornando-a

$$Au_\xi + Cu = 0, \quad (2.6)$$

onde, nesta equação, os coeficientes  $A$  e  $C$  estão expressos em termos das variáveis  $\xi$  e  $\eta$ .

### COMENTÁRIOS:

(1) Na simplificação da equação

$$u_x - u_y = 0$$

observe que a transformação **não** é única, por exemplo,  $\xi(x, y) = x + y$ ,  $\eta(x, y) = x - 2y$  forneceria também uma forma simplificada. Esta transformação também é biunívoca, ou seja, o *Jacobiano* da transformação,  $J \equiv \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$ , pois

$$J \equiv \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(2) Como toda equação linear

$$A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = 0,$$

se reduz a

$$Au_\xi + Cu = 0,$$

o estudo desta última é suficiente para todas as EDPLs de primeira ordem com 2 variáveis independentes.

(3) Se a equação linear for **não**-homogênea o procedimento para achar a transformação simplificadora é o mesmo

## 2.2 Simplificação de EDPLs de 2ª ordem

Vamos admitir a EDPL

$$Lu \equiv Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad u \in C_\Omega^2 \quad (2.7)$$

onde  $A, B$  e  $C$  **não** desaparecem simultaneamente sendo  $A, B, \dots, F$  e  $G$  funções contínuas de  $x, y$  em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Tal como no caso das EDPs de 1ª ordem, admitindo transformação geral

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \phi(x, y),$$

o objetivo será descobrir as expressões de  $\varphi$  e  $\phi$  que proporcionam uma simplificação nos termos que envolvem derivadas de 2ª ordem. Admitindo

$$u = u(\xi, \eta)$$

de classe  $C^2(\Omega)$ , pela regra da cadeia segue que:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \quad (2.8)$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \quad (2.9)$$

Usando novamente a regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Com as derivadas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

ocorre algo diferente pois  $u$  é função de  $\xi$  e  $\eta$ , e portanto  $\partial u / \partial \xi$  e  $\partial u / \partial \eta$  também dependem destas mesmas variáveis, ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \equiv u_\xi(\xi, \eta) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \equiv u_\eta(\xi, \eta),$$

Usando novamente a regra da cadeia segue que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

De modo análogo tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Após introduzir estes termos na expressão acima de  $\partial^2 u / \partial x^2$  e efetuar as devidas simplificações, tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_{\xi\xi\xi_x} + u_{\eta\eta\xi_x} \quad (2.10)$$

onde usamos o fato de  $u_{\xi\eta} \equiv u_{\eta\xi}$  pois foi suposto previamente que as derivadas de 2ª ordem de  $u$  são contínuas e portanto as derivadas mistas são iguais.

Usando argumentos semelhantes tem-se também que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_{\xi\xi\xi_y} + u_{\eta\eta\xi_y} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi\xi\xi_y} + u_{\eta\eta\xi_y} \quad (2.12)$$

Substituindo as expressões obtidas de  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yy}$  na equação  $Lu = G$ , e reagrupando os termos, encontramos a "nova" equação, que designaremos por  $L_1 u$ ,

$$L_1 u \equiv \mathbf{A}_1 u_{\xi\xi} + \mathbf{B}_1 u_{\xi\eta} + \mathbf{C}_1 u_{\eta\eta} + \mathbf{D}_1 u_{\xi} + \mathbf{E}_1 u_{\eta} + \mathbf{F}_1 u = \mathbf{G}_1 \quad (2.13)$$

onde os novos coeficiente  $A_1, B_1, \dots, G_1$  são dados por:

$$\begin{aligned} A_1 &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ B_1 &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ C_1 &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\ D_1 &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\ E_1 &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\ F_1 &= F, \quad G_1 = G \end{aligned}$$

Um fato importante é que o **tipo** da nova equação continua **inalterado**. Quem duvidar basta tomar as expressões acima de  $A_1, B_1$  e  $C_1$  e calcular o discriminante  $B_1^2 - 4A_1C_1$  e, com um pouco de paciência, verificar que

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = J^2 (B^2 - 4AC), \quad (2.14)$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação. Admitindo  $J \neq 0$ , o sinal de  $B_1^2 - 4A_1C_1$  será o **mesmo** de  $B^2 - 4AC$  e portanto o tipo fica **inalterado**.

Uma vez determinada a "nova" equação nas variáveis genéricas  $\xi$  e  $\eta$ ,

$$L_1 u = G_1,$$

que é bem mais "complicada" que a original, vamos descobrir uma **transformação conveniente** que a simplifique. Com este objetivo vamos determinar uma transformação tal que:

$$A_1 = C_1 = 0,$$

ou seja vamos determinar  $\xi$  e  $\eta$  tais que:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \\ \mathbf{C}_1 &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0\end{aligned}$$

Estas duas equações são do tipo:

$$AZ_x^2 + BZ_xZ_y + CZ_y^2 = 0 \quad (2.15)$$

É evidente que se  $Z_1 = \varphi(x, y)$  e  $Z_2 = \psi(x, y)$  são soluções independentes conhecidas desta equação então

$$\xi = \varphi(x, y)$$

fará com que  $A_1$  seja nulo, e

$$\eta = \psi(x, y)$$

com que  $C_1$  seja nulo.

**Em resumo, o problema de eleger a transformação simplificadora está associado na resolução da equação (??),** que a seguir será estudada.

Dividindo (??) por  $Z_y^2 \neq 0$ , tem-se a equação equivalente

$$A \left( \frac{Z_x}{Z_y} \right)^2 - B \left( -\frac{Z_x}{Z_y} \right) + C = 0 \quad (2.16)$$

Por outro lado se a curvas de nível  $Z(x, y) = K$  da função  $Z$ , definem implicitamente uma função  $y = y(x)$  diferenciável, e como a derivada implícita é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -Z_x/Z_y,$$

a equação (??) poderá ser escrita como sendo a EDO **não-linear**

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C = 0 \quad (2.17)$$

Se  $A \neq 0$ , tem-se as possíveis expressões para  $dy/dx$ :

$$\frac{dy}{dx} = \left( B + \sqrt{B^2 - 4AC} \right) / (2A) \quad (2.18)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left( B - \sqrt{B^2 - 4AC} \right) / (2A) \quad (2.19)$$

Assim se  $\varphi(x, y) = K_1$  define implicitamente uma função  $y = y(x)$  diferenciável que satisfaz esta equação então  $\xi = \varphi(x, y)$  fará com que  $A_1 = 0$  e se existir uma segunda solução independente, definda implicitamente por  $\psi(x, y) = K_2$  e fizermos

32

$\eta = \psi(x, y)$ , o coeficiente  $C_1$  também será nulo. É importante que  $\varphi$  e  $\psi$  sejam de classe  $C^2$  e que o Jacobiano

$$J \equiv \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

não se anule na região considerada. Desta forma pode-se determinar univocamente

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases},$$

onde também será admitido que estas funções sejam de classe  $C^2$ .

**Resumindo:** Se  $Z = Z(x, y)$  for uma **solução particular** da equação (??), a relação

$$Z(x, y) = K$$

define implicitamente  $y = y(x)$  solução da EDO (??) e **reciprocamente**.

A equação (??) é conhecida como *equação característica* e as suas soluções são as *curvas características*. Assim ao resolvermos esta EDO, se encontrarmos as soluções independentes definidas implicitamente por

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= c_1 & c_1 &= cte \\ \varphi_2(x, y) &= c_2 & c_2 &= cte \end{aligned}$$

as funções:

$$Z = \varphi_1(x, y) \quad \text{e} \quad Z = \varphi_2(x, y)$$

satisfarão automaticamente a EDP (??). Assim fazendo,

$$\xi = \varphi_1(x, y)$$

**anulará**  $A_1$ , e

$$\eta = \varphi_2(x, y)$$

**anulará**  $C_1$ . Esta forma simplificada, com menos termos de  $2^a$  ordem é chamada de *forma canônica* ou *forma reduzida*. As novas coordenadas  $(\xi, \eta)$  são chamadas de coordenadas canônicas ou *características* e a transformação que associa  $(x, y)$  a  $(\xi, \eta)$  é chamada de *transformação canônica*.

**Exercício** - Reduza a equação

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

à forma canônica.



**Solução** - Desde que  $A = y^2$ ,  $C = -x^2$ ,  $B = D = E = F = G = 0$  temos que

$$B^2 - 4AC = 4x^2y^2 > 0,$$

e portanto no 1º quadrante a equação será hiperbólica. Vamos encontrar as novas coordenadas que transformará a equação original na correspondente forma canônica.

A partir das equações características temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad e \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

que após a integração fornecem

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= c_1 && \text{hipérboles} \\ y^2 + x^2 &= c_2 && \text{círculos} \end{aligned}$$

Assim usando o procedimento anterior para transformar a equação dada na forma canônica tomamos

$$\xi = \varphi(x, y) = y^2 - x^2, \quad \eta = \psi(x, y) = y^2 + x^2$$

Por meio das expressões dos coeficientes  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $E_1$ ,  $F_1$ ,  $G_1$ , e sendo

$$A = y^2, \quad C = -x^2, \quad B = D = E = F = G = 0,$$

substituindo, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = \mathbf{0} \\ B_1 &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) + 2C\xi_y\eta_y = -16x^2y^2 \\ D_1 &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y = -2(x^2 + y^2) \\ E_1 &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y = 2(y^2 - x^2) \\ F_1 &= G_1 = 0 \end{aligned}$$

Substituindo nas expressões anteriores  $x$  e  $y$  por  $\xi$  e  $\eta$ , temos a forma canônica:

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta u_\xi - \xi u_\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}$$

## COMENTÁRIOS

- (1) Se  $A = 0$ , porém  $C \neq 0$ , toma-se a equação característica, admitindo-se  $x$  dependendo de  $y$ , como sendo:

$$-2B\frac{dx}{dy} + C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0 \quad (2.20)$$

- (2) Se a EDPL for de **coeficientes constantes** e **não** apresentar derivadas de primeira ordem,  $D = E = 0$ , após a mudança de variáveis a nova equação também **não** terá tais termos pois  $D_1 = E_1 = 0$ . Se a equação for de coeficientes variáveis, como no exemplo anterior, este fato **não** ocorre.
- (3) O procedimento apresentado pode também ser aplicado para simplificar EDPs de 2ª ordem semi-lineares, ou seja, linear com respeito às derivadas de maior ordem.
- (4) Para achar a forma canônica devemos usar as expressões de  $A_1$  a  $G_1$  e uma forma prática de memorizá-las será por meio dos operadores  $\mathfrak{L}$  e  $Q$  definidos por

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(u) &\equiv \mathbf{A}u_{xx} + \mathbf{B}u_{xy} + \mathbf{C}u_{yy} + \mathbf{D}u_x + \mathbf{E}u_y \\ \mathbf{Q}(\xi, \eta) &\equiv 2\mathbf{A}\xi_x\eta_x + \mathbf{B}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2\mathbf{C}\xi_y\eta_y\end{aligned}$$

Assim os coeficientes da "nova" equação são

$$\begin{aligned}A_1 &= Q(\xi, \xi) / 2 & D_1 &= \mathfrak{L}(\xi) \\ B_1 &= Q(\xi, \eta) & E_1 &= \mathfrak{L}(\eta) \\ C_1 &= Q(\eta, \eta) / 2\end{aligned}$$

### 2.3 Forma Canônica das Equações de Coeficientes Constantes

Embora o procedimento apresentado aplica-se inclusive nas EDPs semi-lineares nesta seção vamos focar nas lineares de 2ª ordem de **coeficientes constantes**.

Pelo que foi visto somos induzidos a acreditar que a transformação canônica sempre conduzirá a termos  $A_1 = C_1 = 0$ , porém isto nem sempre acontece pois a forma canônica está associada as características da equação que nas hiperbólicas são reais e distintas, nas parabólicas reais e coincidentes e nas elíticas complexas. Assim a forma canônica **depende** do tipo da equação. A seguir estas equações serão estudadas separadamente.

Considere a EDP linear de 2ª ordem

$$Lu \equiv Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (2.21)$$

onde os coeficientes são **constantes reais** e a equação característica dada por

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0 \quad (2.22)$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \lambda$$

Se  $A \neq 0$  e  $\lambda_1, \lambda_2$  são raízes desta equação as famílias características são as retas

$$y = \lambda_1 x + c_1, \quad y = \lambda_2 x + c_2$$

consequentemente as coordenadas características são dadas por:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) = y - \lambda_1 x \\ \eta = \psi(x, y) = y - \lambda_2 x \end{cases} \quad (2.23)$$

que serão usadas na análise das equações hiperbólicas, parabólicas e elípticas que faremos a seguir.

### 2.3.1 Equação Hiperbólica : $B^2 - 4AC > 0$

#### Primeira forma Canônica

a) Se  $A \neq 0$  usando transformação acima, temos

$$A_1 = C_1 = 0$$

e a equação dada se reduzirá a

$$B_1 u_{\xi\eta} + D_1 u_{\xi} + E_1 u_{\eta} + F_1 u = G_1, \quad (2.24)$$

onde  $D_1, E_1, F_1$  são constantes. Esta é chamada de *primeira forma canônica* da equação hiperbólica.

b) Se  $A = 0$  e  $C \neq 0$ , não podemos usar a mesma expressão do caso anterior. Neste caso para obter as características admitimos que  $x$  seja função de  $y$  e usamos a EDO

$$-B \frac{dx}{dy} + C \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 = 0 \quad (2.25)$$

que fornece

$$\begin{cases} dx/dy = 0 \\ -B + C dx/dy = 0 \end{cases}$$

Integrando segue que as curvas características são

$$x = C_1, \quad x = (B/C)y + C_2$$

as quais determinam as seguintes coordenadas características:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = x - (B/C)y \end{cases} \quad (2.26)$$

Com esta transformação a equação se reduzirá a uma equação em  $(\xi, \eta)$  que será do mesmo tipo da equação original.

#### Segunda forma Canônica

36

Se a partir da forma canônica já obtida forem adotadas as novas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$ , definidas por

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta \end{cases} \quad (2.27)$$

a equação se reduzirá a

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + d_1 u_\alpha + e_1 u_\beta + f_1 u = g_1 \quad (2.28)$$

que é chamada de *segunda forma canônica* da equação hiperbólica.

Por exemplo, na equação hiperbólica

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2,$$

usando o procedimento anterior determina-se a transformação canônica

$$\xi = y - x, \quad \eta = y - x/4$$

que reduzirá a equação dada na primeira forma canônica

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{3}u_\eta - \frac{8}{9}$$

Usando nesta última equação a transformação

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta,$$

e a regra da cadeia, a segunda forma canônica torna-se

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \frac{1}{3}u_\alpha - \frac{1}{3}u_\beta - \frac{8}{9} \blacktriangleleft$$

### 2.3.2 Equação Parabólica : $B^2 - 4AC = 0$

Neste caso as equações têm uma única família real de características, que supomos ser

$$\varphi(x, y) = C$$

Tomamos assim as coordenadas características como

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

onde  $\psi$ , independente de  $\varphi$ , será definida a seguir de modo conveniente.

Desde que

$$B^2 = 4AC$$

e  $A_1 = 0$ , pela expressão de  $A_1$  segue que

$$\mathbf{A}_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = \mathbf{0}$$

e portanto:

$$\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y = 0$$

Deste resultado e da expressão de  $B_1$ , segue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right) \left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Em resumo, para  $\eta(x, y)$  arbitrária, linearmente independente de  $\xi(x, y)$ , tem-se automaticamente  $B_1 = 0$ .

Particularmente para o caso de coeficientes constantes, se  $A \neq 0$  tem-se uma única família de características reais

$$\lambda_1 = \lambda_2 = B/(2A) \quad (2.29)$$

e portanto a família de características torna-se

$$y = Bx/(2A) + C_1$$

Assim adota-se a transformação:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) = y - Bx/(2A) \\ \eta = \psi(x, y) = hy + kx \end{cases} \quad (2.30)$$

onde  $\eta$  será escolhida de tal forma que o Jacobiano da transformação não se anule. Com escolha apropriada das constantes  $h$  e  $k$  a "nova" equação, com  $A_1 = B_1 = 0$ , será reduzida à equação

$$C_1u_{\eta\eta} + D_1u_\xi + E_1u_\eta + F_1u = G_1 \quad (2.31)$$

onde  $D_1, E_1$  e  $F_1$  são constantes.

Se por outro lado a escolha for

$$\eta = \varphi(x, y) = y - Bx/(2A), \quad \xi \text{ arbitrário}$$

a forma canônica torna-se

$$A_1u_{\xi\xi} + D_1u_\xi + E_1u_\eta + F_1u = G_1 \quad (2.32)$$

que são as formas canônicas para a equação parabólica de coeficientes constantes.

Nas equações parabólicas desde que  $B^2 - 4AC = 0$ , se  $B$  for nulo então  $A$  ou  $C$  será nulo. De forma semelhante se  $A$  ou  $C$  se anula,  $B$  também desaparece.

**Exercício** - Determine a forma canônica da EDP

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

38

**Solução** - Desde que:  $A = 1$ ,  $B = -4$ ,  $C = 4$  tem-se:

$$B^2 - 4AC = 0$$

e portanto a equação é **parabólica**. Usando a transformação apresentada anteriormente com  $h = 1$ ,  $k = 0$

$$\xi = y + 2x, \quad \eta = y$$

e substituindo nas expressões que determinam os novos coeficientes, segue

$$u_{\eta\eta} = \frac{1}{4}e^\eta \quad \blacktriangleleft$$

### 2.3.3 Equação Elíptica : $B^2 - 4AC < 0$

Neste caso não temos características reais, mas complexas conjugadas. Se usássemos diretamente a transformação canônica, teríamos

$$A_1 = C_1 = 0, \text{ e } B_1 \text{ complexo}$$

Para usar coeficientes reais vamos **redefinir** uma transformação de modo conveniente.

Se  $\varphi(x, y) = c_1$  define implicitamente  $y = \underline{y(x)}$  uma solução complexa da equação característica, a outra será definida por  $\bar{\varphi}(x, y) = c$ . Assim se tomarmos a transformação:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)i \\ \eta = \bar{\varphi}(x, y) = \alpha(x, y) - \beta(x, y)i \end{cases} \quad (2.33)$$

temos

$$\begin{cases} \alpha = (\xi + \eta) / 2 \equiv \text{Re}(\xi) \\ \beta = (\xi - \eta) / (2i) \equiv \text{Im}(\xi) \end{cases} \quad (2.34)$$

Como  $A_1 = 0$ , pois  $\xi = \alpha(x, y) + \beta(x, y)i$  foi obtida a partir da equação característica, a substituição de  $\xi$  na expressão  $A_1$  fornece:

$$A_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = (A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) -$$

$$(A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) + i[2A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2C\alpha_y\beta_y] = \mathbf{0}$$

Como esta expressão complexa é **nula** ambas as partes, real e imaginária, também são **nulas** e assim deve-se ter

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A}\alpha_x\beta_x + \mathbf{B}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2\mathbf{C}\alpha_y\beta_y &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\alpha_x^2 + \mathbf{B}\alpha_x\alpha_y + \mathbf{C}\alpha_y^2 &= \mathbf{A}\beta_x^2 + \mathbf{B}\beta_x\beta_y + \mathbf{C}\beta_y^2 \end{aligned}$$

Por outro lado substituindo em  $D_1$

$$D_1 = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y,$$

a expressão de  $\xi$ , temos

$$D_1 = [A\alpha_{xx} + B\alpha_{xy} + C\alpha_{yy} + D\alpha_x + E\alpha_y] + i[A\beta_{xx} + B\beta_{xy} + C\beta_{yy} + D\beta_x + E\beta_y]$$

Logo se tomarmos a transformação

$$\alpha = \operatorname{Re}(\xi) \equiv \alpha(x, y), \quad \beta = \operatorname{Im}(\xi) \equiv \beta(x, y)$$

a "nova" equação será

$$a_1 u_{\alpha\alpha} + b_1 u_{\alpha\beta} + c_1 u_{\beta\beta} + d_1 u_\alpha + e_1 u_\beta + f_1 u = g_1,$$

que é a forma canônica para as equações elípticas onde  $b_1 = 0$ ,  $a_1 = c_1$  e as expressões destes coeficientes são dados por:

$$a_1 = \mathbf{A}\alpha_x^2 + \mathbf{B}\alpha_x\alpha_y + \mathbf{C}\alpha_y^2$$

$$c_1 = \mathbf{A}\beta_x^2 + \mathbf{B}\beta_x\beta_y + \mathbf{C}\beta_y^2$$

$$d_1 = A\alpha_{xx} + B\alpha_{xy} + C\alpha_{yy} + D\alpha_x + E\alpha_y$$

$$e_1 = A\beta_{xx} + B\beta_{xy} + C\beta_{yy} + D\beta_x + E\beta_y$$

Particularmente para as EDP de **coeficientes constantes** reais e  $A \neq 0$ , temos

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1 \equiv a + ib \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2 = a - ib$$

onde:

$$a = B/(2A) \quad b = \sqrt{4AC - B^2}/(2A)$$

Assim as curvas características

$$y = (a + ib)x + c_1, \quad y = (a - ib)x + c_2$$

permitem tomar a seguinte transformação:

$$\begin{cases} \xi = y - (a + ib)x \\ \eta = y - (a - ib)x \end{cases} \quad (2.36)$$

Com esta transformação  $A_1$  e  $C_1$  seriam nulos e  $B_1$  complexo. Para evitar os complexos introduzimos as novas variáveis:

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{Re}(\xi) = y - ax \\ \beta = I_m(\xi) = -bx \end{cases} \quad (2.37)$$

as quais proporcionam a seguinte forma canônica:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{d_1}{a_1}u_{\alpha} + \frac{e_1}{a_1}u_{\beta} + \frac{f_1}{a_1}u = \frac{g_1}{a_1} \quad (2.38)$$

pois  $a_1 = c_1$ .

**Exercício** - Obtenha a forma canônica da seguinte equação

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$$

**Solução** - Desde que  $A = B = C = 1$  tem-se:

$$B^2 - 4AC = -3 < 0$$

e portanto a equação é elítica. Assim a equação característica torna-se

$$\frac{dy}{dx} = \lambda = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

que resolvida fornece as curvas características

$$y = \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x + c_1, \quad y = \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x + c_2$$

e portanto a transformação é dada por:

$$\xi = y - \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x, \quad \eta = y - \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x$$

Introduzindo as novas variáveis

$$\alpha \equiv \operatorname{Re}(\xi) = y - x/2, \quad \beta \equiv I_m(\xi) = -\sqrt{3}x/2$$

$b_1 = 0$  e os demais coeficientes são:

$$a_1 = \mathbf{A}\alpha_x^2 + \mathbf{B}\alpha_x\alpha_y + \mathbf{C}\alpha_y^2 = 3/4$$

$$c_1 = \mathbf{A}\beta_x^2 + \mathbf{B}\beta_x\beta_y + \mathbf{C}\beta_y^2 = 3/4$$

$$d_1 = A\alpha_{xx} + B\alpha_{xy} + C\alpha_{yy} + D\alpha_x + E\alpha_y = -1/2$$



$$e_1 = A\beta_{xx} + B\beta_{xy} + C\beta_{yy} + D\beta_x + E\beta_y = -\sqrt{3}/2$$

e temos a seguinte forma canônica:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \frac{2}{3}u_\alpha + \frac{2}{\sqrt{3}}u_\beta \blacktriangleleft$$

## 2.4 Simplificação de termos de 1ª ordem

Se a EDPL de 2ª ordem

$$Lu = G$$

for de **coeficientes constantes** podemos também simplificar termos envolvendo derivadas de 1ª ordem. O procedimento consiste em fazer a alteração na **variável dependente**

$$u(x, y) = e^{ax+by}v(x, y), \quad (2.39)$$

e depois determinar as constantes  $a$  e  $b$  de forma a simplificar termos contendo derivadas de primeira ordem.

Para ilustrar vamos aplicá-lo na seguinte equação particular

$$u_{xy} + 2u_x + u_y + 3u = 0.$$

Substituindo nesta equação a expressão de  $u$  e fazendo as simplificações tem-se

$$v_{xy} + (2 + b)v_x + (a + 1)v_y + (ab + 2a + b + 3)v = 0$$

Se tomarmos  $a$  e  $b$  de forma a **cancelar** os termos com derivada primeira, isto é,  $a = -1$  e  $b = -2$  a equação torna-se simplesmente

$$v_{xy} + v = 0$$

Como neste caso particular tivemos sucesso com este tipo de transformação vamos investigar o que acontece num caso mais geral de EDPL de **coeficientes constantes**. Esta nova simplificação será feita a partir das formas canônicas, supondo que a variável dependente seja  $u$  e as independentes  $x$  e  $y$ . Admitindo-se uma mudança na variável dependente  $u$  como foi feito acima, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= (v_x + av) e^{ax+by} \\ u_y &= (v_y + bv) e^{ax+by} \\ u_{xx} &= (v_{xx} + 2av_x + a^2v) e^{ax+by} \\ u_{xy} &= (v_{xy} + av_y + bv_x + abv) e^{ax+by} \\ u_{yy} &= (v_{yy} + 2bv_y + b^2v) e^{ax+by} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Substituindo estas expressões nas formas canônicas determina-se os valores das constantes  $a$  e  $b$  para os quais **anule** os coeficientes dos termos de 1ª ordem.

Por exemplo substituindo na equação elítica

$$u_{xx} + u_{yy} + D_1 u_x + E_1 u_y + F_1 u = G_1$$

as expressões obtidas anteriormente, segue que:

$$v_{xx} + v_{yy} + (2a + D_1)v_x + (2b + E_1)v_y + (a^2 + b^2 + aD_1 + bE_1 + F_1)v = Ge^{-(ax+by)}$$

Se  $a$  e  $b$  forem escolhidos de tal forma que:

$$2a + D_1 = 0 \quad 2b + E_1 = 0$$

ou seja, se

$$a = -D_1/2 \quad b = -E_1/2$$

as derivadas de 1ª ordem **não** aparecerão na equação e o coeficiente de  $v$  torna-se

$$-\left(\frac{D_1^2}{4} + \frac{E_1^2}{4} - F_1\right)$$

De forma semelhante simplificam-se as demais equações.

**Resumidamente tem-se.**

**Equação Elítica:**

$$u_{xx} + u_{yy} + D_1 u_x + E_1 u_y + F_1 u = G_1$$

$$v_{xx} + v_{yy} - \left(\frac{D_1^2}{4} + \frac{E_1^2}{4} - F_1\right)v = G_1 e^{(D_1 x + E_1 y)/2} \quad (2.41)$$

**Equação Hiperbólica:**

$$u_{xy} + D_1 u_x + E_1 u_y + F_1 u = G_1 \Rightarrow v_{xy} - (E_1 D_1 - F_1)v = e^{E_1 x + D_1 y} G_1 \quad (2.42)$$

$$u_{xx} - u_{yy} + D_1 u_x + E_1 u_y + F_1 u = G_1 \Rightarrow$$

$$v_{xx} - v_{yy} - \left(\frac{D_1^2}{4} - \frac{E_1^2}{4} - F_1\right)v = e^{(D_1 x - E_1 y)/2} G_1 \quad (2.43)$$

**Equação Parabólica:**

$$u_{yy} + D_1 u_x + E_1 u_y + F_1 u = G_1 \Rightarrow v_{yy} + D_1 v_x - \left(\frac{E_1^2}{4} - F_1\right)v = e^{E_1 y/2} G_1 \quad (2.44)$$

**Exercício** - Simplifique a EDP eliptica:

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{3}{4}u_x + \frac{1}{2}u_y - \frac{3}{4}u = 0$$

**Solução** - Substituindo nesta equação

$$u = e^{ax+by}v,$$

obtem-se:

$$v_{xx} + v_{yy} + \left(2a - \frac{3}{4}\right)v_x + \left(2b + \frac{1}{2}\right)v_y + \left(a^2 + b^2 - \frac{3}{4}a + \frac{b}{2} - \frac{3}{4}\right)v = 0$$

Impondo que

$$2a - 3/4 = 0 \qquad 2b + 1/2 = 0$$

vamos obter os valores de  $a$  e  $b$

$$a = 3/8 \qquad b = -1/4$$

que reduz a EDP na forma

$$v_{xx} + v_{yy} - \frac{61}{64}v = 0 \blacktriangleleft$$

Com uma nova transformação as equações simplificadas podem ainda ser "melhoradas". Por exemplo, na equação obtida neste último exercício em vez de usar as variáveis independentes  $(x, y)$  usaremos  $(p, q)$  relacionadas pela *transformação de escala* por

$$x = kp \qquad y = lq,$$

onde as constantes  $k$  e  $l$  serão escolhidas de modo conveniente de forma que os coeficientes da "nova" equação sejam iguais em valor absoluto. Para determinar tais constantes usando a regra da cadeia tem-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial q^2}$$

e assim a equação obtida no exercício anterior é transformada em

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + \frac{k^2}{l^2} \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} - k^2 \frac{61}{64} v = 0$$

Esta equação terá coeficientes iguais em valor absoluto se:

$$k^2 = l^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{61}{64} k^2 = 1$$

Por exemplo, se tomarmos

$$k = l = 8/\sqrt{61}$$

a equação acima será reduzida para

$$v_{pp} + v_{qq} - v = 0 \blacktriangleleft$$

Usando raciocínio semelhante, as equações lineares de coeficientes constantes podem ser colocadas numa das seguintes formas:

$$\begin{aligned} v_{pp} + v_{qq} + \gamma v &= G(p, q) && \text{elítica} \\ v_{pp} - v_{qq} + \gamma v &= G(p, q) && \text{hiperbólica} \\ \left. \begin{aligned} v_{pp} - v_q &= G(p, q) \\ v_{pp} + \gamma v &= G(p, q) \end{aligned} \right\} && \text{parabólica} \end{aligned}$$

onde  $\gamma$  é uma constante que pode ser  $-1, 0, 1$ .

### COMENTÁRIOS

- (1) A equação  $v_{pp} + \gamma v = G(p, q)$  é chamada de *parabólica degenerada* pois se reduz a uma EDO com variável independente  $p$ , ao tomar  $q$  como um parâmetro. Assim essencialmente temos apenas **uma** equação parabólica.
- (2) Note que nas equações parabólicas nem sempre será possível simplificar **todas** derivadas de primeira ordem.
- (3) Observe que toda classe de equações **elíticas** de coeficientes constantes se reduz a apenas **três** equações onde  $\gamma$  pode ser  $\gamma = 0, \gamma = 1$  ou  $\gamma = -1$ .
- (4) A equação **hiperbólica** com  $\gamma = -1$  pode ser alterada para uma equação com  $\gamma = +1$  nas variáveis  $p$  e  $q$  bastando multiplicá-la por  $-1$  efetuar a substituição  $p' = q, q' = p$ . Portanto existem apenas **duas** equações hiperbólicas correspondendo aos valores de  $\gamma = 0$  e  $\gamma = 1$ .
- (5) A importância destas simplificações é que por meio das transformações efetuadas as equações de 2ª ordem de coeficiente constantes são reduzidas em apenas **seis** diferentes equações **não degeneradas**, limitando assim o estudo destas equações.
- (6) **Advertência:** No próximo capítulo veremos que mesmo na forma mais simplificada, mesmo nas equações homogêneas nem sempre é possível achar a solução geral, exceto em casos particulares!

### 2.5 RESUMO

Se a EDPL for de coeficientes constantes a transformação linear

$$\xi = \varphi(x, y) = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \phi(x, y) = \gamma x + \delta y$$

permite reduzir termos de mais alta ordem que aparece na equação. Se, contudo, for de coeficientes variáveis, precisamos de uma transformação mais geral

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

Vamos tratar de 2 casos:

**1º caso: Simplificação de EDPL 1ª ordem**

Das transformações acima, a transformação particular

$$\xi(x, y) = x, \quad \eta = g(x, y),$$

onde  $g(x, y) = c^{te}$  define implicitamente uma solução da equação ordinária

$$dy/dx = B/A,$$

permite simplificar a equação

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = 0$$

tornando-a

$$Au_\xi + Cu = 0$$

onde os coeficientes  $A$  e  $C$  devem estar expressos em termos das variáveis  $\xi$  e  $\eta$ .

**2º caso: Simplificação de EDPL 2ª ordem**

Para a EDPL

$$Lu \equiv Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

vamos considerar separadamente os casos: coeficientes variáveis e coeficientes constantes.

**1º caso - Coeficientes variáveis**

A partir da transformação geral

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

vamos determinar  $\varphi$  e  $\psi$  para que ocorra simplificação. Usando a regra da cadeia e substituindo na EDP acima as derivadas em relação a  $x$  e  $y$  por derivadas em relação a  $(\xi, \eta)$ , obtém-se a seguinte equação do **mesmo** tipo da anterior

$$L_1u = A_1u_{\xi\xi} + B_1u_{\xi\eta} + C_1u_{\eta\eta} + D_1u_\xi + E_1u_\eta + F_1u = G_1$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ B_1 &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ C_1 &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\ D_1 &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\ E_1 &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\ F_1 &= F, \quad G_1 = G \end{aligned}$$

A transformação particular que irá reduzir termos contendo derivadas de 2ª ordem é encontrada com auxílio da equação característica

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

Se as soluções desta equação ordinária forem definidas implicitamente pelas famílias:

$$\varphi(x, y) = K_1, \quad \psi(x, y) = K_2$$

a transformação

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

obrigará que  $A_1 = C_1 = 0$ .

### 2º caso - Coeficientes Reais Constantes

Neste caso particular podemos simplificar termos contendo derivadas de segunda e de primeira ordem:

#### A) Simplificação de termos envolvendo derivadas de 2ª ordem

Neste caso a equação característica fornece a transformação linear simplificadora

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_{1,2} \equiv \left( B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right) / (2A), \quad A \neq 0$$

Com esta transformação as derivadas de 2ª ordem

$$\partial^2 u / \partial \xi^2, \quad \partial^2 u / \partial \eta^2$$

são nulas e as de 1ª ordem são constantes. Temos três casos à considerar:

**1 - Equação Hiperbólica** - Tem-se duas soluções da equação característica. A transformação

$$\xi = \varphi(x, y) = y - \lambda_1 x \quad \eta = \psi(x, y) = y - \lambda_2 x$$

fará anular  $A_1$  e  $C_1$ , e a 1ª forma canônica torna-se

$$B_1 u_{\xi\eta} + D_1 u_{\xi} + E_1 u_{\eta} + F_1 u = G_1$$

Se a partir desta expressão for adotada a transformação:

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta,$$

após substituir na equação anterior, tem-se a segunda forma canônica:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + d_1 u_{\alpha} + e_1 u_{\beta} + f_1 u = g_1$$

**2 - Equação Parabólica** - Há uma única família de características  $\varphi(x, y) = K$ . Se  $A \neq 0$ , fazendo:

$$\xi = \varphi(x, y),$$

então

$$\lambda_1 = \lambda_2 = B/(2A)$$

e temos apenas uma família de características

$$y = Bx/(2A) + C_1$$

Se adotasse  $\eta = \eta(x, y)$  independente de  $\xi$ , tem-se  $A_1 = B_1 = 0$ . Assim a transformação canônica

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) = y - Bx/(2A) \\ \eta = \psi(x, y) = hy + kx \end{cases}$$

permite obter a seguinte forma simplificada

$$C_1 u_{nn} + D_1 u_\xi + E_1 u_n + F_1 u = G_1$$

**3 - Equação Elíptica** - As características são complexas conjugadas. Ao tomar:

$$\xi = \alpha + \beta i, \quad \eta = \alpha - \beta i$$

tem-se  $A_1 = C_1 = 0$ , porém  $B_1$  complexo. Para trabalhar no campo real associamos a transformação:

$$\alpha = \operatorname{Re}(\xi) = \alpha(x, y)$$

$$\beta = \operatorname{Im}(\xi) \equiv \beta(x, y)$$

que fará com que

$$A_1 = C_1 \quad \text{e} \quad B_1 = 0$$

e portanto a forma canônica torna-se:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + d_1 u_\alpha + e_1 u_\beta + f_1 u = g_1$$

#### **B- Simplificação dos termos de 1ª ordem**

Se a equação de 2ª ordem  $Lu(x, y) = G(x, y)$  for de **coeficientes constantes** fazendo a mudança na variável dependente

$$u(x, y) = e^{ax+by} v(x, y),$$

para uma escolha adequada das constantes  $a$  e  $b$ , temos uma redução do número de termos contendo derivadas de 1ª ordem.

Uma vez obtida a simplificação dos termos de 1ª e 2ª ordem podemos fazer a seguinte transformação de escala nas variáveis independentes

$$x = kp, \quad y = lq, \quad k \text{ e } l \text{ constantes}$$

de tal forma que a nova EDP nas variáveis independentes  $p$  e  $q$  sejam

$$\begin{aligned} v_{pp} + v_{qq} + \gamma v &= G(p, q) && \text{elítica} \\ v_{pp} - v_{qq} + \gamma v &= G(p, q) && \text{hiperbólica} \\ \left. \begin{aligned} v_{pp} - v_{qq} &= G(p, q) \\ v_{pp} + \gamma v &= G(p, q) \end{aligned} \right\} && \text{parabólica} \end{aligned}$$

onde  $\gamma = 0, 1, -1$ .

## 2.6 Exercícios Propostos

- (1) Mostre que o tipo da equação  $Lu = G$  é invariante sob a transformação canônica.
- (2) Encontre as coordenadas características da EDP

$$3u_{xx} + 7u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

- (3) Encontre a forma canônica das seguintes equações

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u &= 0 && \text{Resp: } u_{\eta\eta} = -\frac{3}{2}u \\ \text{(b)} \quad 6u_{xx} - u_{xy} + u &= y^2 && \text{Resp: } u_{\xi\eta} = 6u - 6\eta^2 \end{aligned}$$

- (4) Considere a EDP

$$xu_{xx} + u_{yy} = x^2$$

Mostre que a forma canônica é dada por:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\xi - \eta}{4} \right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\xi - \eta} (u_\xi - u_\eta), \quad \text{se } x < 0 \\ \text{(b)} \quad u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} &= \frac{\beta^4}{16} + \frac{1}{\beta} u_\beta, \quad \text{se } x > 0 \end{aligned}$$

- (5) Simplifique as equações:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_{xx} - u_{yy} + 3u_x - 2u_y + u &= 0 && \text{Resp: } v_{\xi\eta} = -v/16 \\ \text{(b)} \quad 3u_{xx} + 7u_{xy} + 2u_{yy} + u_y + u &= 0 && \text{Resp: } v_{\xi\eta} = (84/625)v \end{aligned}$$

- (6) Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes simplifique a equação parabólica

$$u_{xx} = au_t + bu_x + cu + f$$

- (7) Mostre que a equação

$$u_{xx} - u_y + \alpha u = f(x, y)$$

pode ser transformada na equação  $\omega_{xx} - \omega_y = \varphi(x, y)$ .



(8) Simplifique as seguintes equações:

$$(a) \quad u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u = 0$$

$$\text{Resp: } u_{xx} + u = 0$$

$$(b) \quad u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_x - u_y + u = 0$$

$$\text{Resp: } u_{xx} - u_{yy} + u = 0$$

(9) Mostre que por uma mudança adequada das variáveis, independentes dependente, a equação:

$$4u_{xx} - 24u_{xy} + 11u_{yy} - 12u_x - 9u_y - 5u = 0$$

é reduzida na equação

$$v_{pp} - v_{qq} - v = 0$$

(10) Numa linha de transmissão de dois fios, a tensão/ou corrente satisfaz a EDP

$$v_{xx} = RGv + (RC + LG)v_t + LCv_{tt}$$

onde  $R$  é a resistência,  $L$  a indutância,  $C$  a capacitância e  $G$  a condutância entre os fios. Mostre que esta equação pode ser escrita na forma:

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + du$$

onde  $d = -(CR - LG)^2/4$ . Verifique que se  $d \neq 0$  esta equação não admite solução na forma de uma onda arbitrária  $u = F(x \pm at)$ . (Note que não temos dispersão,  $d = 0$ , quando  $CR = LG$ , e neste caso a velocidade da onda não dependerá da frequência [8])

(11) Simplifique a EDP

$$u_x - u_y + u = 0, \quad u = u(x, y)$$

$$\text{Resp: } 2u_\eta + u = 0$$



## Chapter 3

# Soluções de uma EDP

**Finalidade** - Diferentemente das EDOs a solução geral de uma EDP não é muito utilizada. Isto ocorre pela dificuldade tanto na obtenção da solução geral como na particularização das funções arbitrárias que nela aparecem; neste aspecto é preferível determinar diretamente uma solução que não seja "tão geral"!

No entanto existem casos, tal como o problema de D'Alembert, em que este tipo de solução torna-se importante. A finalidade aqui será achar a solução geral de uma classe de EDP o que é feito usando, geralmente, procedimentos adaptados das EDOs na equação obtida após sua simplificação.

### 3.1 Tipos de soluções

A título de ilustração considere a equação

$$u_x - u_y = 0, \quad u = u(x, y)$$

Observe por meio de derivações que as funções

$$u(x, y) = x + y, \quad u(x, y) = \ln(x + y), \quad u(x, y) = \sin(x + y)$$

satisfazem esta equação. Mais do que isso, a função

$$u(x, y) = F(x + y),$$

onde  $F$  é arbitrária porém diferenciável, **também** satisfaz esta equação, pois

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} F(x + y) = 1 \cdot F'(x + y), \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x + y) = 1 \cdot F'(x + y)$$

e portanto

$$u_x - u_y = F'(x + y) - F'(x + y) \equiv 0$$

Com este exemplo podemos intuir que solução de uma EDP é qualquer função que a satisfaz identicamente num domínio não vazio. Assim de forma mais precisa definimos como *solução clássica*, ou simplesmente *solução* de uma EDP de duas

variáveis e de ordem  $k$  definida num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (aberto e conexo), como sendo toda função de classe  $C^k_\Omega$  (derivadas parciais até a ordem  $k$  contínuas em  $\Omega$ ) que a satisfaz identicamente em  $\Omega$ .

Assim as funções particulares anterior são exemplos de soluções da equação dada.

**Exercício** - Mostre que  $u = F(y - 3x)$ , onde  $F$  é uma função arbitrária de classe  $C^1$ , é uma solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

**Solução** - Admitindo que  $r = y - 3x$  tem-se  $u = F(r)$ . Usando a regra da cadeia segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial F(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -3F'(r) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial F(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = 1F'(r) \end{aligned}$$

Multiplicando-se a 2ª expressão por 3 e somando-se à primeira temos a equação, **independente** de  $F$  e de suas derivadas,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Assim a função  $u(x, y) = F(y - 3x)$ , onde  $F$  é função de uma variável, de classe  $C^1$ , é uma solução da equação dada. Particularmente temos as funções

$$\begin{aligned} u &= -(y - 3x) + 5 \\ u &= \sin(y - 3x) \\ u &= 3\sqrt[3]{y - 3x} + \cos(y - 3x), \end{aligned}$$

que, embora tão diferentes, são soluções particulares da EDP dada!

Por este exercício observe que mesmo sendo uma equação simples ela tem uma infinidade de soluções independentes, em outras palavras o espaço das soluções de uma EDPL tem dimensão infinita. Esta diversidade de soluções dificulta a obtenção da uma solução de um problema com condições auxiliares. ◀

**Exercício** - Mostre que a função

$$u(x, y) = F\left(y + \frac{2}{5}x\right) + G\left(y - \frac{2}{5}x\right),$$

onde  $F$  e  $G$  são funções arbitrárias, de uma variável, de classe  $C^2$ , é a uma solução da EDP

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Solução** - Admitindo-se que

$$r = y + \frac{2}{5}x \quad s = y - \frac{2}{5}x,$$

segue que

$$u = F(r) + G(s)$$

Usando a regra de derivação composta, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = 1F'(r) + 1G'(s) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} [F'(r) + G'(s)] = \frac{\partial F'(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial G'(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1F''(r) + 1G''(s)$$

Por outro lado sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2}{5}F'(r) - \frac{2}{5}G'(s) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{5}F'(r) - \frac{2}{5}G'(s) \right] = \frac{2}{5} \frac{\partial F'(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{2}{5} \frac{\partial G'(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned}$$

tem-se que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{4}{25}F''(r) + \frac{4}{25}G''(s)$$

Das expressões encontradas para  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$ , eliminando-se  $F'$  e  $G'$ , segue

$$25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

e portanto, a equação é verificada. Algumas soluções particulares são, por exemplo,

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sin \left( y + \frac{2}{5}x \right) \\ u_2(x, y) &= e^{(y + \frac{2}{5}x)} + \cos \left( y - \frac{2}{5}x \right) \blacktriangleleft \end{aligned}$$

## COMENTÁRIOS

- (1) Particularmente no caso de segunda ordem se  $u \in C^2(\Omega)$ , condição esta que será usada em todo texto, temos como consequência do cálculo que  $u_{xy} = u_{yx}$ , e assim não será preciso se preocupar com a ordem ao efetuar a derivação.

- (2) Para a solução clássica de uma EDP de ordem  $k$  em duas variáveis exige-se que ela seja de classe  $C^k$  em uma região do  $\mathbb{R}^2$ . No entanto esta condição de regularidade é um tanto artificial e assim poderemos estar restringindo a solução de um problema físico. Existe uma solução mais abrangente que esta em que não se exige este grau de derivabilidade, é a chamada a *solução generalizada*. Neste caso se originalmente aparecerem as derivadas  $u_{xy}$  e  $u_{yx}$  elas não poderão ser simplificadas! Para maiores informações consulte a referência [8].
- (3) Definimos solução de uma EDP mas não o que venha ser solução de um problema envolvendo uma EDP acompanhada de condições auxiliares. Esta solução será apresentada oportunamente.

Nas **EDOs lineares** a solução geral contém **todas** as possíveis soluções, ou seja, representa o conjunto de todas as soluções. Nas EDPLs a situação é mais complicada mesmo nas de coeficientes constantes! Vamos estudar separadamente os casos de EDPLs de primeira e de segunda ordem

### 3.2 Solução geral das EDPLs de 1ª ordem

O procedimento consiste primeiramente em simplificar a equação, o que é feito usando as técnicas do capítulo anterior, e depois ao admitir uma variável fixa, integrar. Vamos aplicá-lo na EDPL homogênea

$$L_1 u \equiv Au_x + Bu_y + Cu = 0, \quad A \neq 0, \quad (3.1)$$

que por meio de uma mudança adequada de variáveis

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

é transformada na equação reduzida

$$u_\xi + (C/A)u = 0 \quad (3.2)$$

Para resolver esta equação admitiremos que  $A, B, C$  sejam **funções reais** de classe  $C^1$  e vamos separar em dois casos:

#### a) Equação de coeficientes constantes

Neste caso uma transformação biunívoca pode ser tomada como sendo

$$\xi = \varphi(x, y) = x, \quad \eta = \psi(x, y) = Bx - Ay$$

Mantendo  $\eta$  fixo e integrando a equação reduzida em relação a  $\xi$  temos a **solução geral**

$$u(\xi, \eta) = e^{-(C/A)\xi} f(\eta)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária, da variável mantida fixa  $\eta$ , porém de classe  $C^1$ .

Em termos das variáveis originais esta solução torna-se

$$u(x, y) = e^{-(C/A)x} f(Bx - Ay) \quad (3.3)$$

onde

$$\tilde{u}(x, y) = f(Bx - Ay)$$

é solução da **parte principal** da equação, ou seja, de

$$Au_x + Bu_y = 0$$

Assim um atalho para determinar uma solução da equação proposta consiste em procurar  $u$  na forma

$$u(x, y) = e^{\alpha x} F(my + nx)$$

Pode-se mostrar que nas EDPLs de coeficientes constantes

$$Au_x + Bu_y + Cu = f(x, y),$$

$A \neq 0$  e  $f(x, y)$  contínua, se  $u_0(y)$  for uma função de classe  $C^1$  qualquer, então existe uma única solução  $u(x, y)$  tal que para todo  $y$ ,

$$u(0, y) = u_0(y)$$

Assim neste tipo de equação podemos achar a solução geral e a solução particular que satisfaz a condição acima, ou seja a condição  $u(0, y) = u_0(y)$  é apropriada para este tipo de equação.

A condição que o coeficiente de  $u_x$  deve ser diferente de zero é suficiente e também necessária para a condição auxiliar  $u_0(y)$  ser apropriada. Se esta condição não for satisfeita, então a EDP não terá solução para  $u_0(y)$  arbitrário, mas unicamente para funções particulares onde, neste caso, teremos não uma única solução mas uma infinidade delas. Isto ocorre por exemplo no problema

$$u_y - 2u = 0, \quad u(0, y) = u_0(y)$$

### b) Equação de coeficientes variáveis

Neste caso, como foi visto no capítulo anterior, tomamos uma transformação biunívoca na forma

$$\xi = \varphi(x, y) = x, \quad \eta = \psi(x, y)$$

onde para se determinar  $\psi(x, y)$  usamos o seguinte procedimento:

Resolve-se a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B}{A}$$

e após determinar a sua solução geral, definida implicitamente por  $\phi(x, y) = c^{te}$ , toma-se  $\eta = \phi(x, y)$ . Mantendo  $\eta$  fixo e integrando a equação reduzida em relação a  $\xi$  temos

$$u(\xi, \eta) = f(\eta) \exp \left[ - \int \frac{C(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)} d\xi \right] \quad (3.4)$$

Retornando às antigas variáveis  $(x, y)$  temos a **solução geral** da equação original. Assim **toda** EDPL do tipo

$$L_1 u \equiv A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = 0, \quad A \neq 0$$

tem uma solução da forma acima. Esta solução é chamada de *solução geral* ?? no sentido que toda solução desta EDP, pelo menos localmente, pode ser obtida da geral por particularização de  $f$  (ver [21]). *Solução particular* ?? é toda solução obtida da geral por particularização da função arbitrária.

Se  $u_p$  for uma solução particular da EDPL **não-homogênea**

$$L_1 u \equiv G(x, y),$$

onde  $G$  é também de classe  $C^1$  e  $u_h$  é a solução geral da equação homogênea correspondente, então a solução

$$u = u_p + u_h$$

da equação  $L_1 u = G$  será a **solução geral** desta EDPL não-homogênea no sentido que toda solução está contida na geral (ver [21]).

**Exemplo** - Ache a solução geral da equação

$$Lu \equiv x^2 u_x - xy u_y + yu = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

**Solução** - Por comparação com a equação dada acima os coeficientes são

$$A(x, y) = x^2, \quad B(x, y) = -xy, \quad C(x, y) = y$$

e a EDO toma a forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B}{A} = -\frac{y}{x}.$$

Concluimos que a equação

$$\phi(x, y) = xy = c^{te}$$

define implicitamente  $y = y(x)$  solução da EDO acima e assim, com a transformação

$$\xi = x, \quad \eta = xy,$$



a equação simplificada com coeficientes em termos de  $\xi$  e  $\eta$ , torna-se

$$u_\xi + (\eta/\xi^3) u = 0$$

Como

$$\int \frac{C(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)} d\xi = \int \frac{\eta}{\xi^3} d\xi = -\frac{\eta}{2\xi^2},$$

voltando às antigas variáveis, obtemos a solução geral

$$u(x, y) = e^{y/(2x)} f(xy)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária, de uma variável, porém de classe  $C^1$ .

Observe do que foi apresentado que toda **solução geral** da EDPLH de 1ª ordem é do tipo:

$$u(x, y) = \phi_1(x, y) f(\phi_2(x, y))$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são funções específicas e  $f$  arbitrária.

**COMENTÁRIO:** Diferentemente das EDP de 1ª ordem de coeficientes constantes que, sob certa condição, apresenta um conjunto apropriado, nas EDPs de 2ª ordem de coeficientes constantes não temos resultado equivalente, isto é, não existe um mesmo conjunto apropriado para qualquer equação pois este conjunto dependerá da sua classe.

### 3.3 Solução geral das EDPLs de 2ª ordem

Na seção anterior foi visto que toda EDPL de 1ª ordem, de coeficientes constantes ou não, pode ser resolvida fornecendo a **solução geral** a qual envolve **uma** função arbitrária. Diante disto podemos suspeitar que nas EDPLs de 2ª ordem, pelo menos as de coeficientes constantes, podemos também usar tal prática, no entanto, isto em geral **não** ocorre.

Vamos aqui estudar o caso de **coeficientes constantes** e reais

$$Lu = G, \quad u = u(x, y) \tag{3.5}$$

onde

$$L \equiv AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F, \tag{3.6}$$

Para entendermos melhor o procedimento a ser tomado neste tipo de equação consideraremos a seguinte equação particular

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} = 0$$

onde o operador  $L$  pode ser decomposto como

$$L \equiv D_x^2 - D_y^2 \equiv (D_x - D_y)(D_x + D_y) \equiv (D_x + D_y)(D_x - D_y)$$

Se  $u_1$  for solução da EDP de 1<sup>a</sup> ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \equiv D_x u - D_y u = 0,$$

então  $u_1$  **também** será solução da equação de 2<sup>a</sup> ordem, pois:

$$L u_1 \equiv [(D_x + D_y)(D_x - D_y)]u_1 = (D_x + D_y)[\mathbf{D}_x \mathbf{u}_1 - \mathbf{D}_y \mathbf{u}_1] \equiv 0$$

De modo semelhante se  $u_2$  for uma solução da EDP de 1<sup>a</sup> ordem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \equiv D_x u + D_y u = 0$$

então  $u_2$  será também uma solução da equação homogênea  $L u = 0$ .

Como as soluções gerais de

$$D_x u - D_y u = 0, \quad D_x u + D_y u = 0$$

são, respectivamente,

$$u_1 = f(x + y), \quad u_2 = g(x - y),$$

onde  $f$  e  $g$  são arbitrárias, a **solução geral** da equação homogênea correspondente será

$$u_h = f(x + y) + g(x - y)$$

Tal como neste exemplo se o operador  $L$  pode ser fatorado como **produto de operadores lineares de primeira ordem** e se estes forem comutativos, o que sempre ocorre nos operadores de coeficientes constantes, a **solução geral** da equação homogênea  $L u = 0$ , será obtida usando os resultados das EDPLs de primeira ordem.

Assim se o operador diferencial parcial de 2<sup>a</sup> ordem de **coeficientes constantes**  $L$ , pode ser decomposto na forma

$$L \equiv L_1 L_2 \equiv (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)$$

temos que  $L_1 L_2 = L_2 L_1$ , e se  $u_1$  for solução da EDP de 1<sup>a</sup> ordem  $L_1 u = 0$ , então  $u_1$  também será solução da equação de 2<sup>a</sup> ordem  $L u = 0$ , pois:  $L u_1 = (L_1 L_2) u_1 = (L_2 L_1) u_1 = L_2 (L_1 u_1) \equiv 0$

Da mesma forma se  $u_2$  for solução da equação de 1<sup>a</sup> ordem  $L_2 u \equiv 0$ , então  $u_2$  também será solução da equação de 2<sup>a</sup> ordem  $L u = 0$ .

Pela linearidade da equação temos que

$$u = u_1 + u_2$$

também é solução que é a **solução geral** da equação dada.

Quando a equação for não-homogênea e mantidas as demais condições temos

$$Lu \equiv (L_1 L_2) u \equiv [(a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)]u = g(x, y)$$

uma solução particular pode ser obtida por vezes da seguinte maneira:

Se denotarmos  $L_2 u = v$ , então

$$L_1 v = g(x, y)$$

Se  $v_p$  for uma solução particular desta equação de primeira ordem então a função  $u$  deve ser tal que  $L_2 u = v_p$ . Se  $u_p$  for uma solução desta última equação, ou seja se  $L_2 u_p \equiv v_p$ , temos que  $u_p$  é uma solução particular da equação dada. Isto acontece pois:

$$Lu_p = L_1 (L_2 u_p) = L_1 v_p = g(x, y)$$

Dependendo dos operadores  $L_1$  e  $L_2$  este procedimento permite achar diretamente a solução geral, tal como ocorre na equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

que será resolvida na próxima seção.

### COMENTÁRIOS:

- (1) No caso da EDPL de coeficientes variáveis  $Lu = 0$  desde que podemos decompor  $L$  em fatores de 1ª ordem comutativos podemos usar o mesmo procedimento.
- (2) No caso acima quando os operadores de 1ª ordem na forma fatorada,  $L_1$  e  $L_2$ , forem **iguais** temos apenas uma função arbitrária como solução. Neste caso precisamos procurar uma outra solução, o que será feito nas próximas seções.
- (3) Nos exemplos **específicos** apresentados de EDP linear e homogênea de 2ª ordem a **solução geral** pode ser escrita como uma soma de termos envolvendo funções arbitrárias do tipo

$$u(x, y) = \phi_1(x, y) f(\phi_2(x, y)) + \phi_3(x, y) g(\phi_4(x, y)),$$

onde  $f, g$  são arbitrárias e  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  e  $\phi_4$  são funções específicas. No entanto isto nem sempre ocorre, por exemplo a EDP de coeficientes constantes

$$u_{xx} = u_y$$

não possui uma solução da forma  $u = \phi_1(x, y) f(\phi_2(x, y))$ , para  $f$  arbitrária, ver referência [12].

- (4) Por abuso de linguagem, por vezes, de modo impreciso dizemos que solução geral de uma EDPL de ordem  $n$  como toda solução que tenha  $n$  funções arbitrárias suficientemente diferenciáveis, no entanto este resultado é impossível de ser provado de modo geral (*ver ref 21*). Deve-se tomar cuidado com a

nomenclatura por que se assim for nem sempre a **solução geral** é a mais geral no sentido de conter todas as outras soluções.

- (5) Nas EDP **não** lineares o comentário feito anteriormente fica mais evidente. Por exemplo a função

$$u(x, y) = xF(y) - [F(y)]^2,$$

onde  $F$  é uma função arbitrária porém diferenciável, satisfaz a EDP de 1ª ordem não-linear

$$u = x \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

e portanto é uma solução. Por outro lado podemos verificar que a função

$$u(x, t) = x^2/4$$

também satisfaz a mesma EDP, porém **não** está contida na anterior!

Tendo por base estes resultados, apresentaremos a seguir algumas técnicas mais diretas para se resolver uma pequena classe de EDPLs de 2ª ordem.

### 3.4 Solução obtida por meio de integrações

Por vezes a solução geral pode ser obtida através de integrações. Quando se integra em relação a uma variável em vez de constante arbitrária tem-se uma função arbitrária que depende das demais variáveis independentes. Para ilustrar apresentaremos dois exemplos:

**Exercício** - Ache a solução geral da EDP

$$u_{xy} = 0, \quad u = u(x, y)$$

**Solução** - Desde que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

integrando-se em relação a  $x$ , obtem-se

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F(y)$$

onde  $F$  é uma função arbitrária da variável suposta constante, porém diferenciável.

Integrando em relação a  $y$ , tem-se:

$$u(x, y) = \int F(y) dy + G(x)$$

onde  $G$  é uma função arbitrária, porém diferenciável, da variável suposta constante. Como a integral de uma função arbitrária é arbitrária, a solução pode ser dada como:

$$u(x, y) = H(y) + G(x)$$

Qual a alteração ocorreria nesta solução se  $u = u(x, y, z)$  em vez de  $u = u(x, y)$ ? ◀

**Exercício** - A partir da solução geral da EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

ache uma função que satisfaz as condições  $u(x, 0) = x^2$ ,  $u(1, y) = \cos y$ .

**Solução** - Desde que a equação dada é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = x^2 y$$

integrando-se em relação a  $x$ , obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3} x^3 y + F(y),$$

onde  $F$  é uma função arbitrária de  $y$ . Integrando esta última equação em relação a  $y$ , obtemos:

$$u(x, y) = \frac{1}{6} x^3 y^2 + \int F(y) dy + G(x),$$

onde  $G$  é uma função arbitrária de  $x$ . Este resultado pode ser escrito como:

$$u(x, y) = \frac{1}{6} x^3 y^2 + H(y) + G(x)$$

onde  $H$  e  $G$  são funções arbitrárias, porém de classe  $C^2$ .

Desde que  $u(x, 0) = x^2$ , temos:

$$x^2 = H(0) + G(x) \quad \text{ou} \quad G(x) = x^2 - H(0)$$

Assim a expressão para  $u(x, y)$  torna-se:

$$u(x, y) = \frac{1}{6} x^3 y^2 + H(y) + x^2 - H(0)$$

Desde que por imposição do problema deve-se ter,  $u(1, y) = \cos y$ , segue

$$\cos y = \frac{y^2}{6} + H(y) + 1 - H(0), \quad \text{ou}$$

$$H(y) = \cos y - \frac{1}{6} y^2 - 1 + H(0)$$

Substituindo  $H(y)$  na última expressão de  $u(x, y)$ , tem-se a solução desejada

$$u(x, y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + \cos y - \frac{1}{6}y^2 + x^2 - 1 \blacktriangleleft$$

### 3.5 Solução obtida por meio de técnicas das EDOs

Por meio de artifícios existe uma classe de EDP que pode ser resolvida usando métodos das EDO, é o caso quando uma EDP envolve derivadas com respeito a uma **única variável** sendo que as demais admitiremos como sendo parâmetros. Após resolver a EDO substitui as constantes arbitrárias, que aparecem na sua solução geral, por funções arbitrárias das variáveis mantidas constantes. Este procedimento pode ser usado inclusive nas EDPs de ordem superior. Os exemplos a seguir ilustram situações deste tipo.

**Exercício** - Ache a solução geral da EDP

$$u_{xx} - u = 0, \quad u = u(x, y)$$

**Solução** - Desde que  $y$  não está envolvida explicitamente podemos resolver esta equação como se fosse uma EDO, mantendo  $y$  constante no processo, obtendo a solução

$$c_1e^x + c_2e^{-x}$$

Para obter a solução geral da EDP substituímos as constantes arbitrárias por funções arbitrárias das variáveis mantidas constantes, neste caso  $y$ . Assim a solução geral torna-se:

$$u(x, y) = e^x f(y) + e^{-x} g(y)$$

**Exercício** - Ache a solução geral da EDP:

$$t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 2xt, \quad t > 0$$

**Solução** - Esta equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ t \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \right] = 2xt$$

Integrando-se em relação a  $x$ , obtemmos

$$t \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = x^2 t + F(t)$$

ou:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2}{t}u = x^2 + \frac{F(t)}{t}$$

Usando  $x$  como parâmetro esta equação é uma EDO linear com fator integrante

$$\exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2 \ln(t)} = t^2$$

Logo

$$t^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2tu = x^2 t^2 + tF(t)$$

é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t} (t^2 u) = x^2 t^2 + tF(t)$$

Integrando-se em relação a  $t$ , segue:

$$t^2 u = \frac{x^2 t^3}{3} + \int tF(t) dt + H(x)$$

Portanto, a solução geral torna-se

$$u(x, t) = \frac{x^2 t}{3} + G(t) + \frac{1}{t^2} H(x)$$

onde  $G$  e  $H$  são funções arbitrárias. ◀

### 3.6 Solução da equação $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$

Se a equação de 2ª ordem homogênea de **coeficientes constantes** tiver apenas a parte principal, isto é, se for do tipo

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \quad (3.7)$$

ela é chamada de *equação de Euler*. Como não apresenta derivadas de primeira ordem a sua forma canônica será do tipo

$$u_{\xi\xi} = 0, \text{ ou, } u_{\xi\eta} = 0$$

cujas soluções poderão ser obtidas diretamente por meio de duas integrações. No entanto podemos usar um atalho e a solução pode ser obtida sem efetuar estas integrações.

Admitindo-se que  $g_1$  e  $g_2$  são funções arbitrárias, porém suficientemente diferenciáveis, vamos investigar este tipo de equação a partir de exemplos específicos. Por meio de derivações podemos verificar que:

a)  $u = g_1(y + 2x/5)$ , satisfaz a EDP

$$25u_{xx} - 4u_{yy} = 0$$

64

b)  $u = g_2(y - 3x)$ , satisfaz a EDP

$$u_{xx} - 9u_{yy} = 0$$

Observe por estes exemplos que ambas EDPs têm soluções do tipo

$$u = F(y + mx)$$

com  $m = 2$ ,  $m = -3$ .

Diante deste resultado podemos suspeitar que as soluções da equação (3.7) tem a forma

$$u(x, y) = f(y + mx) \quad (3.8)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária de classe  $C^2$  e  $m$  é uma constante a ser determinada. É o que admitiremos a seguir.

Por derivação da função  $u$  segue que

$$\begin{aligned} u_{xx} &= m^2 f''(y + mx) \\ u_{xy} &= m f''(y + mx) \\ u_{yy} &= f''(y + mx) \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação tem-se

$$(Am^2 + Bm + C) f''(y + mx) = 0$$

Como  $f$  é arbitrária a função (3.8) será solução se  $m$  satisfizer a equação algébrica

$$Am^2 + Bm + C = 0 \quad (3.9)$$

Admitindo-se  $m_1$  e  $m_2$  raízes desta equação algébrica temos os seguintes casos a considerar:

**1º Caso:**  $A \neq 0$ ,  $m_1 \neq m_2$

Se  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias, então

$$f(y + m_1x) \quad \text{e} \quad g(y + m_2x)$$

são soluções. Logo a solução geral será:

$$u(x, y) = f(y + m_1x) + g(y + m_2x)$$

**2º Caso:**  $A \neq 0$ ,  $m_1 = m_2$

Neste caso tem-se apenas a solução independente:

$$f(y + m_1x)$$



Uma segunda solução será obtida usando o seguinte raciocínio: se  $m_1$  e  $m_2$  fossem diferentes e como a EDP é linear, a função

$$\frac{h(y + m_1x) - h(y + m_2x)}{m_2 - m_1}$$

também seria solução por tratar-se de uma combinação linear de soluções. Tomando-se o limite quando  $m_2 \rightarrow m_1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \lim_{m_2 \rightarrow m_1} \frac{h(y + m_1x) - h(y + m_2x)}{m_2 - m_1} = \\ & = \frac{\partial h(y + mx)}{\partial m} \Big|_{m=m_1} = \\ & = xh'(y + m_1x) \end{aligned}$$

Fazendo  $h' \equiv g$ , segue que:

$$xg(y + m_1x)$$

também é solução. Logo a solução geral é dada por:

$$u(x, y) = f(y + m_1x) + xg(y + m_1x)$$

**Exercício** - Ache a solução geral da EDP

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

**Solução** - Admitindo-se solução do tipo

$$u = f(y + mx),$$

a constante  $m$  deve satisfazer a equação quadrática:

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

cujas raízes são  $m_1 = m_2 = 2$ .

Logo a solução geral torna-se:

$$u(x, y) = f(y + 2x) + xg(y + 2x)$$

onde  $f$  e  $g$  são arbitrárias ◀.

**3º Caso:**  $A = 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $C \neq 0$ .

Neste caso a equação para  $m$  torna-se

$$Bm + C = 0$$

ou seja:

$$m_1 = -\frac{C}{B}$$

Logo, tem-se apenas a solução:

$$f\left(y - \frac{C}{B}x\right)$$

Por observação direta como  $g(x)$  também é solução, a solução geral torna-se:

$$u(x, y) = f\left(y - \frac{C}{B}x\right) + g(x)$$

Um outro método seria admitir uma solução do tipo:

$$u(x, y) = f(x + ny)$$

e determinar os valores de  $n$ , obtendo uma solução do tipo

$$u(x, y) = f\left(x - \frac{B}{C}y\right) + g(x).$$

**4º Caso:**  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C \neq 0$ .

Além de fazer diretamente a integração, pode-se obter a solução geral admitindo-se uma solução do tipo:

$$u(x, y) = f(x + ny)$$

e usar o resultado do 2º caso.

## COMENTÁRIOS

- (1) Quando a raiz da equação quadrática for complexa, aparecerá um argumento complexo nas funções arbitrárias.
- (2) Para evitar frações nos argumentos das funções arbitrárias em vez de se supor a solução da forma  $f(y + mx)$ , admite-se como sendo  $f(ny + mx)$ .

## 3.7 Princípio de Superposição

### 3.7.1 Princípio de Superposição para Equação Linear Homogênea

Se particularmente  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são soluções da EDP linear homogênea

$$Lu = 0,$$

isto é, se  $Lu_i \equiv 0$ , então tem-se

$$L[\sum_{i=1}^n c_i u_i] = \sum_{i=1}^n c_i Lu_i = 0,$$

e portanto, a combinação linear de soluções

$$u = \sum_{i=1}^n c_i u_i$$

**também** é solução. Este resultado é conhecido como princípio de superposição de soluções para EDPL homogênea. Este princípio pode também ser aplicado em condições de contorno lineares e homogêneas

**Exemplo** - Considere o problema linear composto da equação homogênea

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

com as duas condições de contorno homogêneas

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

Por substituição pode-se verificar que toda função da forma

$$u_n(x, t) = B_n e^{-n^2 \pi^2 a^2 t} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

satisfaz tanto a equação como as duas condições de contorno. Pelo princípio de superposição, particularmente a soma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^k B_n e^{-n^2 \pi^2 a^2 t} \sin(n\pi x),$$

para qualquer  $k$  inteiro (finito), também satisfaz a equação e as condições de contorno.

### 3.7.2 *Princípio de Superposição para Equação Linear não Homogênea*

Tal como nas EDOs, o princípio de superposição é muito útil para obter a solução geral de uma EDP linear não homogênea  $Lu = f$ . Esta solução é a soma da solução geral da equação homogênea correspondente, que indicaremos por  $u_h$ , com uma solução particular da equação completa que indicaremos por  $u_p$ .

Isto acontece pois desde que:

$$Lu_h \equiv 0 \quad \text{e} \quad Lu_p \equiv f$$

então:

$$L(u_h + u_p) = Lu_h + Lu_p \equiv f$$

e portanto,  $u_h + u_p$  também é solução.

Por vezes usa-se adaptar o método dos coeficientes indeterminados da teoria das EDOs para determinar  $u_p$ .

**Exercício** - Determine a solução geral da EDP

$$u_{xy} = 1$$

**Solução** - Anteriormente apresentamos a função

$$u_h = f(x) + g(y)$$

68

como sendo a solução geral de  $u_{xy} = 0$ . Por inspeção verifica-se que

$$u_p = xy$$

é uma solução particular da equação completa. Assim a solução geral desta equação será dada por:

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + xy \blacktriangleleft$$

O método dos coeficientes indeterminados usado nas EDOs pode ser adaptado para se achar uma solução particular  $u_p$ . Por exemplo, se a equação apresentar apenas derivadas de uma mesma ordem  $n$ , e se o 2º membro da equação for um polinômio homogêneo de grau  $k$ , procura-se uma solução na forma de um polinômio homogêneo de grau  $n + k$ .

**Exercício** - Determine uma solução particular da EDP de 1ª ordem

$$u_x + u_y = x^2 + xy$$

**Solução** - Como as derivadas são todas de ordem,  $n = 1$ , e o 2º membro é um polinômio homogêneo de grau  $k = 2$ , vamos procurar uma solução particular  $u_p$  como sendo um polinômio homogêneo de grau 3, ou seja, um polinômio da forma:

$$u_p = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$$

Introduzindo  $u_p$  na EDP uma solução ocorrerá quando  $A = 1/6$ ,  $B = 1/2$ ,  $C = D = 0$  e portanto uma solução particular será:

$$u_p = x^3/6 + x^2y/2 \blacktriangleleft$$

Se o polinômio não for homogêneo pode-se aplicar o princípio de superposição. Se o 2º membro não for polinômio, dependendo do caso, é possível fazer outra adaptação no método dos coeficientes indeterminados como ilustra o exercício a seguir.

**Exercício** - Ache a solução geral da equação:

$$u_{xx} - 4u_{yy} = e^{x+y}$$

**Solução** - Para a equação homogênea correspondente

$$u_{xx} - 4u_{yy} = 0$$

admitindo-se uma solução da forma

$$u(x, y) = f(y + mx)$$

tem-se:

$$m^2 - 4 = 0$$

e portanto a solução geral  $u_h$  será:

$$u_h = f(y + 2x) + g(y - 2x)$$

Para a equação completa usa-se procurar uma solução particular sob a forma:

$$u_p = \alpha e^{x+y}, \quad \alpha = cte$$

Substituindo na EDP encontra-se  $\alpha = -1/3$  e portanto uma solução particular será

$$u_p = -\frac{1}{3}e^{x+y}$$

e a solução geral torna-se:

$$u_h = f(y + 2x) + g(y - 2x) - \frac{1}{3}e^{x+y}$$

**Cuidado** - Deve-se verificar se a solução particular obtida não está incluída na solução geral da homogênea correspondente. Para esclarecer, se o 2º membro da equação fosse  $e^{2x+y}$ , uma solução do tipo  $u_p = \alpha e^{2x+y}$  já faria parte da homogênea pois esta inclui todas as funções do tipo  $f(y + 2x)$ . Neste caso deve-se procurar uma solução particular diferente da do tipo escolhido e, tal como ocorre nas EDOs, será admitido uma solução do tipo:

$$u_{p1} = \alpha x e^{2x+y} \quad \text{ou} \quad u_{p2} = \beta y e^{2x+y}$$

Substituindo na equação, encontra-se que  $\alpha$  deve ser  $1/4$ . Logo a solução geral, neste caso, torna-se:

$$u(x, y) = f(y + 2x) + g(y - 2x) + \frac{1}{4}x e^{2x+y} \blacktriangleleft$$

## COMENTÁRIOS

- (1) O princípio de superposição pode ser aplicado apenas se a EDP for **linear**.
- (2) Nas próximas lições o princípio de superposição será aplicado de forma a construir soluções mais elaboradas a partir de soluções mais simples.
- (3) Sob certas condições, que serão exploradas durante o curso, o princípio de superposição pode ser generalizado não apenas para uma solução na forma de uma série infinita, mas, dependendo do problema, para uma solução na forma de uma integral.
- (4) Embora no formato as EDPs se parecem com as EDOs, as teorias são profundamente diferentes. Isto ocorre principalmente devido ao fato do espaço solução de toda EDPL homogênea ter dimensão infinita.
- (5) Vimos o que venha ser solução de uma EDP mas não o que venha ser solução de um problema contendo condições auxiliares, o que não é tão óbvio, pois não basta que a função, candidata à solução, satisfaça a EDP e as condições impostas.

### 3.8 Outros métodos de resolução

A estratégia para resolver um problema físico envolvendo EDP geralmente é diferente dos que envolvem EDO. Enquanto que nos problemas envolvendo EDO acha-se primeiramente a solução geral e depois particulariza as suas constantes arbitrárias de forma a satisfazerem as condições auxiliares, nos que envolvem EDP este procedimento raramente é usado. A razão disto é que a solução geral para as equações parciais, em vez de constantes, depende de funções arbitrárias, o que dificulta a particularização destas. Em virtude disto, na maioria dos casos, não procuramos a solução geral, mas, em vez disso, soluções particulares convenientes. Alguns deste procedimentos, usados em situações específicas, são:

- (1) **Separação de variáveis, ou Método de Fourier** - Neste método é suposto que exista uma solução particular que seja um produto de funções que, em caso de sucesso, permite reduzir uma EDP de  $n$  variáveis, em  $n$  EDO's.
- (2) **Transformada Integral** - Este processo reduz uma EDP de  $n$  variáveis em outro de  $n - 1$  variáveis. É usado principalmente em domínios não limitados.
- (3) **Equação Integral** - Esta técnica altera uma EDP para uma equação integral a qual é resolvida por técnicas próprias.
- (4) **Método Variacional** - Por este método a EDP é reformulada para um problema de minimização cuja solução será a solução da EDP.
- (5) **Método Numérico** - Este método substitui uma EDP por um sistema de equações algébricas, o qual pode ser resolvido por técnicas próprias.
- (6) **Método de Perturbação** - Este método troca um problema não linear por uma sequência de problemas lineares, que resolvidos, aproxima a solução da equação original.
- (7) **Técnica Impulso/Resposta** - Por este processo decompomos o termo não homogêneo em funções mais simples (ímpusos simples) e encontramos a solução (resposta) individual para cada impulso. A solução procurada será obtida acrescentando as respostas simples encontradas.

### 3.9 Resumo

Solução clássica de uma EDP de ordem  $k$  num domínio  $\Omega \subset R^2$  (aberto e conexo) é toda função de classe  $C^k(\Omega)$  que satisfaz a equação identicamente.

Embora a solução geral frequentemente não seja utilizada na resolução de problemas físicos quer pela dificuldade da sua obtenção, quer pela dificuldade da particularização das funções arbitrárias envolvidas, em alguns problemas ela é importante. Quando possível, a solução geral da EDP é conseguida através dos seguintes meios:

- a) EDPL de 1ª ordem

$$L_1 u \equiv Au_x + Bu_y + Cu = 0, \quad A \neq 0,$$

Por meio da mudança de variáveis

$$\xi = \varphi(x, y) = x, \quad \eta = \psi(x, y),$$

onde  $\phi(x, y) = c^{te}$  define implicitamente a solução da EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B}{A},$$

esta equação é reduzida a

$$u_\xi + (C/A)u = 0$$

Mantendo  $\eta$  fixo e integrando esta equação em relação a  $\xi$  temos a **solução geral**

$$u = f(\eta) \exp \left[ -\int \frac{C(\xi, \eta)}{A(\xi, \eta)} d\xi \right]$$

No caso particular de coeficientes constantes a expressão para  $\eta$  torna-se:

$$\eta = \psi(x, y) = Bx - Ay$$

**b)** Admitimos que a EDPL de 2ª ordem de coeficientes constantes e reais  $Lu = G(x, y)$ , onde

$$L \equiv AD_x^2 + BD_x D_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F,$$

pode ser fatorada como

$$L \equiv L_1 L_2$$

onde

$$L_1 \equiv a_1 D_x + b_1 D_y + c_1, \quad L_2 \equiv a_2 D_x + b_2 D_y + c_2$$

são operadores comutativos, o que sempre ocorre em tais casos.

Se  $u_1$  for solução da EDP de 1ª ordem  $L_1 u = 0$  então  $u_1$  também será solução da EDP de 2ª ordem  $Lu = 0$ . De forma semelhante se  $u_2$  for solução da EDP de 1ª ordem  $L_2 u = 0$  então  $u_2$  também será solução da EDP de 2ª ordem  $Lu = 0$ . Pela linearidade da equação temos que

$$u = u_1 + u_2$$

também é solução da equação dada, e esta é a **solução geral**.

Desde que exista tal decomposição dos operadores e se estes forem comutativos podemos aplicar o método nas EDPs lineares em geral. A seguir apresentaremos algumas técnicas mais diretas de se resolver determinadas EDPLs de 2ª ordem.

1) integrando em relação a uma variável independente, admitindo-se as demais como parâmetros fixos (a função arbitrária dependerá desses parâmetros); como acontece em

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y, \quad \text{ou}$$

2) usando técnicas das EDO em relação a uma variável e tomando as demais como parâmetros fixos (a função arbitrária dependerá desses parâmetros), como acontece por exemplo na equação

$$u_{xx} + u = 0, \quad \text{ou}$$

3) admitindo-se uma solução do tipo  $u = f(y + mx)$ , para o caso da EDP de coeficientes constantes onde todos os termos são de mesma ordem de derivação, como em:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

Se a equação for linear não-homogênea e de coeficientes constantes, dependendo do caso, pode-se adaptar o método dos coeficientes indeterminados das EDOs, aliado ao princípio de superposição, para se obter uma solução particular.

### 3.10 Exercícios propostos

(1) Ache a solução geral das seguintes EDPs:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0 \quad \text{Resp: } F\left(x - \frac{y}{2}\right) + yG\left(x - \frac{y}{2}\right) \\ \text{(b)} & u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad \text{Resp: } F(x + y) + xG(x + y) \\ \text{(c)} & 4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad \text{Resp: } F(x + 2y) + yG(x + 2y) \end{array}$$

(2) A partir da solução geral ache uma função que satisfaz a equação  $xu_{xy} + u_y = 0$  e as condições

$$u(x, 0) = x^5 + x - 68/x, \quad u(2, y) = 3y^4, \quad \text{Resp: } u = x^5 + x + 6y^4/x - 68/x$$

(3) Se  $u = u(x, y, z)$ , ache a solução geral da EDP  $u_{yy} = 2$ .

$$\text{Resp: } u = y^2 + yf(x, z) + g(x, z)$$

(4) Ache a solução geral da EDP  $u_{xx} = 1$ , sendo  $u = u(x, y)$

$$\text{Resp: } u = \frac{x^2}{2} + xf(y) + g(y)$$

(5) Encontre a solução geral das seguintes equações:

$$\text{(a)} \quad u_{xxy} = 1, \quad u = u(x, y)$$

$$\text{(b)} \quad u_{xxx} + u_x = 0, \quad u = u(x, y, z)$$



- (6) Introduzindo a nova variável  $v$ ,  $v = ru(r, t)$ , mostre que a solução geral de  $u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = \frac{1}{c^2}u_{tt}$ , é dada por:

$$u = \frac{[F(r - ct) + G(r + ct)]}{r}$$

- (7) Determine as soluções das equações:

(a)  $u_x + 2u_y = x$  *Resp:*  $F(y - 2x) + x^2/2$

(b)  $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = x \sin y$  *Resp:*  $F(x + y) + G(2x + y) - \frac{x}{2} \sin y + \frac{3}{4} \cos y$

- (8) Usando o método dos coeficientes indeterminados ache a solução geral da EDP

$$u_{xx} + u_{yy} = 10e^{2x+y}$$

*Resp:*  $F(x + iy) + G(x - iy) + 2e^{2x+y}$

- (9) A partir da solução geral ache uma função que satisfaz a equação e as condições impostas nos seguintes problemas:

(a)  $u_{xx} = 2xy$ ,  $u(0, y) = y^2$ ,  $u_x(0, y) = y$  *Resp:*  $u = x^3y/3 + xy + y^2$

(b)  $u_{xy} = 1$ ,  $u = u_x = 0$  em  $x + y = 0$  *Resp:*  $u = xy + (x^2 + y^2)/2$

- (10) Encontre a solução geral da equação:  $u_{xx} - u = 0$  e a partir dela ache a função que também satisfaz as condições:

$$u(0, y) = \varphi(y) \quad \text{e} \quad u_x(0, y) = \psi(y)$$

- (11) Fazendo primeiramente  $u_x \equiv v$ , encontre a solução geral da EDP

$$u_{xy} + u_x = 0$$

*Resp:*  $f(x)e^{-y} + g(y)$

- (12) Mostre que  $f(x)\cos y + g(x)\sin y$  é a solução geral da ED

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$

- (13) Mostre que a equação

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + ku$$

não tem soluções da forma  $F(x - at)$ , a não ser que  $k = 0$ .

- (14) Resolva as seguintes equações:

$$u_{yy} = u, \quad u_{xx} + u = x + y$$

- (15) Determine uma solução particular das seguintes EDPs:

(a)  $u_{xx} - u_{yy} = x$  *Resp:*  $(1/6)x^3$

(b)  $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = \cos y$  *Resp:*  $(-1/2)\cos y$

- (16) Determine uma EDP linear que admita como solução a função:

74

$$(a) \quad u = F(x - 3y) + G(2x + y) \quad \text{Resp: } 3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} = 0$$

(17) Mostre que  $u = F(2x + y^2)$  satisfaz a EDP:

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(18) Obtenha uma EDP em  $u$ , de menor ordem, pela eliminação das funções arbitrárias.

$$(a) \quad u = F(x + y)$$

$$(b) \quad u = F(xy)$$

(19) Mostre que  $u(x, y) = F(x)G(y)$ , onde  $F$  e  $G$  são arbitrárias e de classes  $C^2$ , satisfaz a EDP

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0$$

(20) Supomos que  $u_1$  e  $u_2$  são soluções das equações abaixo. Para quais equações  $u_1 + u_2$  também será solução?

$$(a) \quad u_t = u_{xx} + e^t$$

$$(b) \quad u_t = e^{-t} u_{xx}$$

$$(c) \quad u_t = u_{xx} + u^2$$

(21) Verifique se o princípio de superposição é válido, ou não, nas equações:

$$(a) \quad x^2 u_x - uu_y = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = xy$$

$$(b) \quad u_x + u_t + \sin u = 0 \quad u_1 = \pi \quad u_2 = 2\pi$$

(22) Verifique que

$$u_1(x, y) = x^2/2 + e^y \sin x \quad \text{e} \quad u_2(x, y) = y^2/2$$

são soluções da EDP

$$u_{xx} + u_{yy} = 1$$

A soma destas soluções também é solução?

(23) As funções  $u_1(x, y) = 1$  e  $u_2(x, y) = xy$  são soluções da EDP

$$x^2 u_x - uu_y = 0$$

A soma destas soluções também é solução?

(24) Se  $A, B$  e  $C$  são constantes determine a solução geral da EDP

$$Au_x + Bu_y + Cu = G(x, y)$$

nos seguintes casos:

$$(a) \quad G \equiv 0, \text{ sendo } A \neq 0$$

$$(b) \quad G \equiv 0, \text{ sendo } A = 0$$

(c)  $G(x, y) = 4e^{ax+by}$  sendo, ou  $Aa + Bb + C \neq 0$ , ou  $Aa + Bb + C = 0$

(25) Seja  $u \in C^4$

(a) Verifique que

$$\nabla^4(xu) = x\nabla^2u + 4\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2u)$$

$$\nabla^4(yu) = y\nabla^2u + 4\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2u)$$

(b) Verifique que se  $u$  é solução da equação de Laplace então tanto  $xu$  como  $yu$  satisfazem a equação biarmônica mas em geral não satisfazem a equação de Laplace.

(26) Mostre que  $u(x, t) = 4\text{sen}(y - 3x)$  é uma função que satisfaz o problema:

$$u_x + 3u_y = 0, \quad u(0, y) = 4\sin y$$

(27) Verifique que  $u(x, y) = xF(2x + y)$  é solução geral de  $xu_x - 2xu_y = u$ . A partir desta solução mostre que a função que satisfaz esta equação e a condição  $u(1, y) = y^2$  é  $u(x, y) = x(2x + y - 2)^2$

(28) Dê duas EDPs de 2ª ordem lineares que surgem da eliminação das constantes arbitrárias na relação

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin y.$$

*Resp:*  $u_{xx} + u_{yy} + u = 0$  e  $u_{xy} = 0$

(29) Por meio de uma mudança adequada de variáveis resolva

$$xyu_x - x^2u_y + yu = 0$$

(30) Determine a solução geral da EDP:

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = y \quad \text{Resp } u = (-y/128)(y - x)(y - 9x) + f(y - 9x) + g(y - x)$$

(31) Considere a EDP

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$$

(a) Verifique que a transformação canônica é  $\xi = y - x$ ,  $\eta = y - x/4$ ,

(b) Verifique que a forma canônica é  $u_{\xi\eta} = \frac{1}{3}u_{\eta} - \frac{8}{9}$ .

(c) Faça  $v = u_{\eta}$  e verifique que a solução da equação resultante é

$$v = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{\xi/3}F(\eta)$$

(d) A partir deste resultado mostre que a solução da equação dada é

$$u(x, y) = \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + \frac{1}{3}g\left(y - \frac{x}{4}\right)e^{(y-x)/3} + f(y - x)$$

onde  $f$  e  $g$  são arbitrárias.

76

- (32) Mostre que a função  $u = f(x^2 + y^2)$ , onde  $f$  é arbitrária e de classe  $C^1$  satisfaz a EDP

$$yu_x - xu_y = 0$$

- (33) Mostre que a solução que satisfaz a equação

$$3u_x + 4u_y - 2u = 1$$

e a condição  $u(x, 0) = u_0(x)$ , onde  $u_0$  é de classe  $C^1$ , é dada por

$$u(x, y) = -1/2 + e^{y/2}[u_0(x - 3y/4) + 1/2]$$

- (34) Encontre a solução do problema

$$u_x - u_y + u = e^{x+2y}, \quad u(x, 0) = 0$$

- (35) Encontre todas as funções  $u_0(x)$  para que o problema

$$u_x - 2u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

tenha solução e para tais funções encontre todas as soluções possíveis.

Resp.  $u_0(x) = Ce^{2x}$ , onde  $C$  é constante. solução  $u(x, y) = f(y)e^{2x}$ , onde  $f$  é qualquer função de classe  $C^1$  que satisfaz a condição  $f(0) = C$

- (36) Admitindo que uma solução particular da equação de coeficientes constantes

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f_1(x) + f_2(y), \quad ab \neq 0$$

tem a forma

$$u_p = \phi_1(x) + \phi_2(y)$$

mostre que esta solução é dada por

$$u_p = \frac{1}{a} \int \phi_1(x) dx + \frac{1}{a} \int \phi_2(y) dy$$

e a solução geral como

$$u(x, y) = f(bx - at) + u_p$$

- (37) Utilize o procedimento anterior e resolva a EDP

$$u_x - 2u_y = 2x - e^y + 1$$

- (38) Determine as soluções particulares das equações

$$u_{xx} = 4x, \quad u_{yy} = -3 \cos y$$

Mostre que a EDP

$$u_{xx} - u_{yy} = 4x + 3 \cos y$$

tem por solução geral

$$u(x, y) = f(x - y) + g(x + y) + \frac{2x^3}{3} - \frac{2 \cos 2y}{4}$$



## Chapter 4

# Equação da Onda

**Finalidade** - A primeira etapa para se resolver um problema físico consiste em traduzi-lo em um modelo matemático por meio de uma ou mais EDPs com as respectivas condições auxiliares. As principais equações da física matemática apresentadas no 1º capítulo são válidas apenas sob certas condições, o que pode limitar seriamente a precisão do resultado. Assim para usar com segurança tais equações precisamos saber que condições são estas e porque foram impostas.

A finalidade desta lição será obter a equação unidimensional da onda bem como apresentar as condições auxiliares usadas com mais frequência, interpretar fisicamente tanto os termos da EDP quanto os destas condições, conhecer as reais limitações do modelo e ter condições de criar modelos menos restritivos. Este assunto, que envolve conceitos físicos, é extenso e será apresentado de forma simplificada.

### 4.1 Três Razões para se Conhecer a Dedução da Equação da Onda

Existem pelo menos três razões para justificar a dedução desta equação.

#### a) Limitação Matemática

Ao criar um modelo matemático de um problema físico para que a equação resultante não se torne demasiadamente complicada usamos admitir hipóteses simplificadoras. Assim, por exemplo, ao deduzir a equação da corda elástica admitiremos a restrição que  $\sin \alpha \simeq \alpha$ ! Deste modo torna-se imprescindível conhecer as reais limitações pois, caso contrário, tal modelo poderá estar sendo usado indevidamente!

#### b) Limitação Física

É quase impossível traduzir exatamente os fenômenos físicos por meio de equações pois ao formular um problema são necessárias algumas simplificações o que é feito à custa de se admitir condições físicas ideais. Para tais aproximações é indispensável conhecer a física do problema e ter familiaridade com as leis físicas e saber em que domínios são válidas. Por exemplo, para simplificar a equação que modela um problema envolvendo circuitos elétricos admite-se que os valores das resistências, capacitores, indutores, etc, não dependem da corrente que flui nos

mesmos!

### c) Interpretação Física do Problema Matemático

Para colocar as condições de contorno em uma EDP de tal forma que se tenha um modelo matemático cuja solução é única torna-se importante conhecer a parte física do problema. Em uma EDP com condições auxiliares pode ocorrer duas situações antagônicas: ou **não** tenha solução, o que ocorre ao atribuir um número excessivo de condições, ou, tenha **várias** soluções se houver poucas restrições. Neste último caso o problema matemático, que representa o problema físico, tem solução mas **não** é única. Uma forma de intuir o número de tais condições é associar ao problema matemático uma aplicação física. Tais problemas físicos sugerem condições auxiliares sob as quais o problema tem uma única solução. Em outras palavras é útil interpretar um problema fisicamente a fim de "julgar" se as condições auxiliares são adequadas.

## 4.2 Classificação das Propagações Ondulatórias

Embora não vistas somos cercados de ondas "por todos os lados". São ondas luminosas, ondas sonoras, ondas eletromagnéticas, etc. Podemos obter um diagnóstico médico através do resultado obtido de um aparelho de raio X, ou por ultrassom, ou por ressonância magnética, ou podemos ser multados por excesso de velocidade frugado por um radar.

Um exemplo de onda, que é visível, ocorre quando jogamos uma pedra na água em um lago. O ponto atingido pela pedra sofrerá uma perturbação. Quando a ondulação se espalha na superfície do lago, a partir do ponto atingido, observamos que uma onda se propaga. Se houver objetos flutuando na água estes não são transportados pelas ondas; apenas vibram para cima e para baixo, onde parte da energia mecânica que se deu à pedra aparece na oscilação destes objetos. O que está se movimentando, e transportando energia, não são as moléculas de água mas uma perturbação.

Fato semelhante ocorre com uma corda elástica esticada horizontalmente tendo uma extremidade fixa e a outra segurada por um operador. Se este fizer com a mão um rápido movimento para cima e para baixo, isto é um pulso, podemos perceber a ondulação se propagando ao longo da corda. Fato importante à observar é que as partículas da corda não se movem ao longo dela, mas apenas executam um movimento para cima e para baixo.

Outro exemplo é quando uma lâmina vibra no ar. Esta vibração provocará compressões e rarefações, isto é, variações periódicas de pressão propagando através do ar atingindo o ouvido da pessoa que, dependendo da frequência, pode produzir a sensação de som. Nosso aparelho auditivo, ao ser atingido por esta onda sonora, transforma a variação de pressão sofrida pela onda em estímulo nervoso que, ao chegar ao cérebro, nos dá a sensação auditiva. Sabe-se por meio de experimentos,



que isto ocorre na faixa de  $20\text{Hz}$  a  $20\text{kHz}$ , embora estes limites variem de indivíduo para indivíduo e por idade. Devido a limitações fisiológicas do corpo humano, fora desta faixa, mesmo alcançando nossos ouvidos **não** estimulam nossa audição.

Assim temos a seguinte classificação para as Ondas:

#### 4.2.1 *Tipos de Ondas*

##### a) **Onda Mecânica**

Ela se origina na deformação de um meio material

Os exemplos citados anteriormente são exemplos de **ondas mecânicas** que são perturbações que se deslocam num meio material transportando energia, porém não existe a propagação de matéria. É importante observar que este tipo de onda precisa de um meio material para a sua propagação, ou seja, estas ondas não se propagam no vácuo.

##### b) **Onda Eletromagnética**

Ela se origina de cargas elétricas aceleradas tais como ondas luminosas, raios gama, raios X, etc. Estas ondas não precisam de um meio e podem se propagar no vácuo.

#### 4.2.2 *Quanto à Direção da vibração*

a) **Ondas Transversais** - são ondas em que as vibrações ocorrem perpendicularmente à direção de propagação. Por exemplo, as ondas produzidas na corda esticada, as ondas produzidas por uma mola helicoidal com uma **perturbação transversal** na sua extremidade e ondas eletromagnéticas.

b) **Ondas Longitudinais** - são ondas **mecânicas** que se propagam na mesma direção em que ocorre a propagação da onda. Por exemplo, ondas em uma mola helicoidal que foi perturbada com um **pulso longitudinal** em sua extremidade e ondas sonoras que se propagam nos meios sólidos, líquidos e gasosos.

c) **Ondas Mistas** - são ondas **mecânicas** constituídas de vibrações transversais e longitudinais. Por exemplo a propagação de uma perturbação na superfície da água, apresenta movimento na horizontal e na vertical, de forma que as partículas descrevem trajetórias elípticas à passagem da onda.

#### 4.2.3 *Quanto à Dimensão*

A forma da onda criada e transmitida depende do meio que a carrega e da geometria da fonte que a produziu.

1) **Onda unidimensional** - A propagação ocorre sobre uma linha, é o caso da onda na corda esticada pois a corda é um meio unidimensional uma vez que cada elemento dela pode ser localizado por meio de uma única coordenada  $x$  quando o

meio estiver em equilíbrio.

**2) Onda Bidimensional** - A propagação da onda ocorre sobre uma superfície plana como quando perturbarmos a superfície da água num lago. Os casos mais frequentes são:

a) **circular** - é criada ao perturbarmos um ponto na superfície. Neste caso as frentes de ondas são circulares e o raio de onda é radial;

b) **reta** - surge quando perturbarmos a superfície com um régua, neste caso a frente de onda são retas paralelas à régua e o raio de onda são retas perpendiculares.

**3) Onda Tridimensional** - A propagação ocorre sobre todo espaço tal como ocorre com o som propagando-se no ar. A onda tridimensional **plana** é provocada por uma membrana que vibra em paralelo e a onda tridimensional **esférica** é gerada, por exemplo, por uma fonte sonora.

### COMENTÁRIOS:

- (1) Não se deve confundir as ondas de uma corda vibrante que são **transversais** com as ondas sonoras emitidas por estas cordas que são **longitudinais**.
- (2) O som da voz de um homem é normalmente mais **grave**, isto é, de menor frequência que a da mulher. No homem varia de 100 a 200Hz e a voz da mulher, que é mais **aguda**, de 200 a 400Hz.
- (3) Outras espécies de animais podem ouvir frequências muito mais altas. Por exemplo, o morcego podem ouvir acima de 120kHz e os delfins, acima de 240kHz. Contudo nas baixas frequências ambos são limitados a 10kHz, e portanto nem sempre estão aptos a apreciar a nossa música!
- (4) No caso **unidimensional** e na ausência de dissipação a amplitude **não** varia com  $x$  e  $t$ . É uma consequência do fato de que a energia inicial dada ao sistema deve ser transferida para todo ponto  $x$ . Neste caso o pulso se propaga ao longo da corda mas **não** se espalha, isto é, mantém a mesma forma. Nos casos **bi** e **tridimensionais** a situação é totalmente diferente e a amplitude de vibração decresce com o aumento da distância da origem. Por exemplo, se **não** há absorção do meio, pode-se mostrar que numa onda esférica se a distância  $r$  da fonte for muito maior que o comprimento de onda  $\lambda$ , isto é,  $r \gg \lambda$ , então a amplitude  $A$  é proporcional ao inverso da distância até a fonte, isto é,  $A = k/r$ .

Neste texto vamos abordar prioritariamente o caso da corda vibrante unidimensional.

### 4.3 Matemática das Ondas Unidimensionais

Os fenômenos oscilatórios geralmente são descritos por equações do tipo hiperbólico e uma das principais equações deste tipo é a **equação da vibração transversal**

**de uma corda elástica** que será estudada a seguir.

Considere uma corda (fio) elástica esticada sob tensão no eixo  $x$  entre os pontos fixos  $x = 0$  e  $x = L$ . Como o peso será considerado desprezível se comparado com a tensão na posição de equilíbrio ela está no eixo  $x$  entre esses dois pontos; para fixar idéia imagine a corda de um violino. Ao romper o equilíbrio, com um deslocamento inicial perpendicular a  $x$ , ela começa a vibrar num plano  $xu$  com deslocamentos verticais que indicaremos por  $u(x, t)$ . O objetivo desta seção será determinar a equação que governará  $u(x, t)$ .

Para obtê-la vamos admitir as seguintes hipóteses:

- não existem forças externas atuantes, exceto a própria tensão que mantém a corda esticada;
- a corda é perfeitamente flexível de seção transversal constante e homogênea, isto é tem densidade  $\rho$  constante;
- os deslocamentos horizontais da corda são desprezíveis quando comparado com os deslocamentos verticais e estes ocorrem unicamente no plano  $xu$ ;
- os deslocamentos transversais são pequenos, e;
- a corda está fortemente esticada pela tensão o que assegura que o posterior esticamento ocasionado pela onda transversal não aumente significativamente esta tensão.

Para determinar a equação da onda será usada a 2<sup>a</sup> lei de Newton:

$$\text{soma das forças} = \text{massa} \times \text{aceleração}$$

num "pequeno" segmento da corda que se estende da coordenada  $x$  até  $x + dx$ .

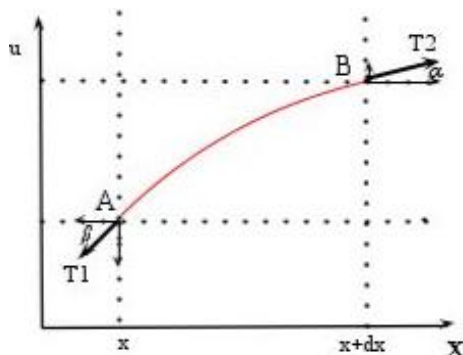
Vamos achar inicialmente as forças que atuam sobre este segmento. A parte da esquerda puxa-a com uma força de **módulo**  $T_1$  e a da direita com uma força de **módulo**  $T_2$  atuando num sentido que não é bem oposto à direção da outra força por causa da curvatura da corda.

Para aplicar esta lei no segmento  $\Delta s$  da corda devemos determinar a força resultante que atua sobre este segmento. A força resultante é a soma vetorial das forças que atuam nas extremidades.

#### a) Componente no eixo do x da força resultante

Admite-se que o movimento do segmento da corda de comprimento  $\Delta s$  ocorra entre os pontos  $A$  e  $B$  e como a corda é suposta perfeitamente flexível, a tensão sempre será na direção tangente à corda. Uma vez admitidos apenas pequenos deslocamentos transversais, ambos os ângulos são "pequenos" e portanto

$$T_2 \cos \alpha - T_1 \cos \beta \simeq T_2 - T_1$$



Como por hipótese será admitido movimento puramente transversal ao eixo  $x$ , devemos ter  $T_1 = T_2 \equiv T$ . Com esta condição a corda não se move apreciavelmente nesta direção e assim todos os segmentos da corda movem-se apenas na **direção perpendicular**.

#### b) Componente $u$ da força resultante

Quando  $\alpha$  é pequeno temos

$$\sin \alpha \simeq \tan \alpha = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx},$$

onde a declividade do segmento,  $\tan \alpha$ , foi expressa por meio da derivada  $u_x = \tan \alpha$ . De modo semelhante temos

$$\sin \beta \simeq \tan \beta = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x$$

Assim a grandeza da força resultante na direção e sentido de  $u$ , e que é uma boa aproximação da força perpendicular resultante que atua sobre  $\Delta s$ , é dada por

$$F_u = \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad (4.1)$$

Por outro lado como a **massa do elemento** é  $\rho \Delta s$  e a aceleração  $u_{tt}$ , pela 2ª lei de Newton, para o caso de  $T$  não depender de  $x$ , temos

$$T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = (\rho \Delta s) u_{tt}(\bar{x}, t)$$

onde  $\bar{x}$ ,  $x < \bar{x} < x + \Delta x$  representa a coordenada do centro de massa do elemento em questão. O comprimento de  $\Delta s$  é dado por

$$\Delta s = \sqrt{1 + (u_x)^2} \Delta x$$

Admitindo-se apenas "pequenos" deslocamentos transversais da corda temos  $\Delta s \simeq \Delta x$  e tomando o limite destas expressões, quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , então  $\bar{x} \rightarrow x$ , e usando

novamente a definição de derivada tem-se a *equação da onda*

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad a^2 \equiv T/\rho, \quad (4.2)$$

que descreve o movimento transversal de uma corda quando os deslocamentos transversais são pequenos.

### Interpretação Geométrica

Ao rompermos o equilíbrio da corda com uma força inicial qualquer ela começa a vibrar. Se  $u(x, t)$  representa o deslocamento vertical então  $u$  satisfaz a EDPL homogênea anterior na qual  $u_{tt}$  é proporcional a  $u_{xx}$  sendo que a constante de proporcionalidade  $a^2$  depende das propriedades mecânicas do sistema. Em qualquer instante temos que:

- $u_x(x, t_0)$  é a inclinação da corda em qualquer ponto  $x$  no instante  $t_0$  ;
- $u_{xx}(x, t_0)$  mede a variação da inclinação da corda, isto é, a sua curvatura e de acordo com o seu sinal, se é para "baixo" ou para "cima".

a)  $u_{xx}$  é fisicamente proporcional à força resultante que atua sobre o segmento pois originou da expressão  $T(\tan \beta - \tan \alpha)$

b)  $u_t(x, t)$  é a velocidade transversal e  $u_{tt}(x_0, t)$  a aceleração vertical pois é a derivada de 2ª ordem do deslocamento em relação ao tempo.

Assim **pela equação** temos que:

- a aceleração de um segmento qualquer da corda, em qualquer ponto e em qualquer instante, é proporcional à curvatura deste segmento, ou em outras palavras, a aceleração que é devida a tensão, é tão grande quanto a curvatura que é dada por  $u_{xx}$ ;
- se a curvatura está para cima,  $u_{xx}(x_0, t_0) > 0$ , então a aceleração é positiva,  $u_{tt}(x_0, t_0) > 0$ , e a velocidade é crescente no intervalo, caso contrário se, a curvatura está para baixo,  $u_{xx}(x_0, t_0) < 0$ , a velocidade é decrescente.

### COMENTÁRIOS:

- (1) Expandindo  $(T \frac{\partial u}{\partial x})_{x+dx}$  em série de Taylor em torno de  $x$  e desprezando os termos de ordem  $(dx)^2$  e de ordem superior, a grandeza de  $F_u$  torna-se

$$F_u = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx$$

que é a resultante da tensão vertical no elemento  $\Delta s \simeq \Delta x$ .

- (2) A constante  $a$ , que é dada por  $a^2 = T/\rho$ , tem a dimensão física de comprimento/tempo, isto é, de **velocidade**. No próximo capítulo será visto que esta é a velocidade de propagação da onda ao longo da corda.
- (3) No violão a tensão na corda não perturbada é "bastante grande" e os deslocamentos transversais da onda são "pequenos" e assim satisfazem muito bem a

condição de tensão constante.

- (4) Para se obter esta equação consideramos pequenas deformações onde usamos

$$\Delta s = \sqrt{1 + (u_x)^2} \Delta x \simeq \Delta x,$$

ao admitir que  $(u_x)^2 \ll 1$ . Para grandes deslocamentos a equação obtida não é mais válida e neste caso a equação resultante será uma EDP não linear.

- (5) Nem todas equações importantes da física matemática são deduzidas como foi a equação da onda, por exemplo, as equações de Schrodinger e de Dirac da mecânica quântica são admitidas como axiomas de uma teoria.
- (6) Se na referida corda no ponto  $x = 0$  tivermos uma fonte de ondas que realiza um movimento harmônico simples vertical de período  $T$ , amplitude  $A$  a perturbação introduzida nesta extremidade propaga-se e na corda como um MHS vertical com as mesmas características da fonte:
- Período  $T$**  - Mede o tempo de passagem da onda por um ponto determinado;
  - Frequência  $f$**  - Mede o número de ondas que passam por um ponto da corda em cada unidade de tempo, **é a mesma da fonte emissora**;
  - Comprimento de onda  $\lambda$**  - é a distância entre dois pontos consecutivos do mesmo meio que vibram em fase;
  - Velocidade** - Temos a velocidade de propagação da onda,  $v = \lambda/T$ , e a velocidade transversal  $v_t$  dos pontos da corda que vibram verticalmente em MHS.

#### 4.4 Equação da Onda com Forças Externas

Se a força externa que age sobre o segmento  $\Delta s$ , por **unidade de comprimento**, na direção e sentido do eixo  $u$  for  $F(x, t)$ , a componente em  $u$  da resultante das forças sobre o segmento passa a ser

$$(T \sin \theta)_{x+\Delta x} - (T \sin \theta)_x + F(\bar{x}, t) \Delta x \quad (4.3)$$

Particularizando  $F(x, t)$  para os casos mais conhecidos tem-se:

**Força gravitacional** - Neste caso  $F(x, t)$  tem a forma  $F = -mg = -\rho g \Delta x$ ,  $g > 0$

**Força de amortecimento ou fricção** (linear) - Se a corda vibra num meio que oferece resistência esta força, no caso linear, é proporcional a velocidade, transversal, ou seja,  $F(x, t) = -\beta u_t$ ,  $\beta \geq 0$ .

**Força restauradora** - É a força proporcional ao deslocamento que age na direção oposta ao deslocamento da corda para trazê-la para a posição  $u \equiv 0$ . Assim

ela é dada por  $F(x, t) = -\gamma u$ ,  $\gamma > 0$ , e, portanto, se o deslocamento  $u$  é positivo (para cima) então esta força é negativa (para baixo), e vice-versa.

Usando as mesmas considerações da seção anterior, desde que  $\rho\Delta x$  é a massa,  $u_{tt}$  a aceleração e se  $f(x, t)$  representa as demais forças por unidade de comprimento na direção do eixo  $u$ , pela *lei de Newton*, tem-se:

$$(\rho\Delta x) u_{tt} \cong T [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + f(x, t) \Delta x - (\beta u_t) \Delta x - (\gamma u) \Delta x \quad (4.4)$$

Dividindo ambos os lados por  $\rho\Delta x$  e fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$ , tem-se a equação

$$\mathbf{u}_{tt} = \mathbf{a}^2 \mathbf{u}_{xx} - \beta_1 \mathbf{u}_t - \gamma_1 \mathbf{u} + \mathbf{f}_1(x, t) \quad (4.5)$$

onde  $\beta_1 = \beta/\rho$ ,  $\gamma_1 = \gamma/\rho$ ,  $f_1 = f/\rho$ .

Esta equação, que é chamada de *equação do telefone* ou da *linha de transmissão*, apresenta alguns casos particulares interessantes tais como:

a) *Vibrações livres*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

b) *Vibrações forçadas*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_1(x, t) \quad (4.6)$$

c) *Vibrações amortecidas* (linear)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \beta_1 u_t, \quad \beta_1 > 0 \quad (4.7)$$

d) *Vibrações sob força restauradora*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \gamma_1 u \quad (4.8)$$

### COMENTÁRIOS:

- (1) Ao simplificar uma equação precisamos saber a ordem de grandeza dos seus termos, por exemplo, se levarmos em conta o peso da corda e se  $f(x, t)$  for uma força externa transversal a corda por unidade de comprimento temos a equação

$$T \mathbf{u}_{xx} + f(x, t) - \rho(x) g = \rho(x) \mathbf{u}_{tt}$$

Se  $\rho(x) g$  for pequeno comparado a  $f(x, t)$  este termo poderá ser desprezado e se não houver forças externas então teremos apenas

$$T \mathbf{u}_{xx} = \rho(x) \mathbf{u}_{tt}$$

Note que devido ao fato de termos vibrações rápidas  $\mathbf{u}_{tt}$  pode ser grande e assim o termo  $\rho(x) \mathbf{u}_{tt}$  não pode ser desprezado. Por outro lado, embora  $\mathbf{u}_{xx}$  possa ser relativamente pequeno porém  $T \mathbf{u}_{xx}$  terá em geral um valor razoável pois  $T$  é "grande".

- (2) A equação da onda apresentada serve também para formular outros problemas físicos tais como os que aparecem em: ondas sonoras (ondas longitudinais), vibração em sólidos, vibração transversal de membranas e vibração angular de barras. Serve também para formular problemas envolvendo ondas eletromagnéticas que são ondas **transversais** originadas de cargas elétricas oscilantes.

#### 4.5 Condições Auxiliares mais Usadas

Na formulação de um problema físico as condições auxiliares desempenham papel tão importante quanto à própria equação e as principais serão aqui discutidas e interpretadas fisicamente. É evidente que a deflexão da corda  $u(x, t)$  em qualquer ponto e instante dependerá tanto do deslocamento como da velocidade inicial, que admitiremos ser em  $t_0 = 0$ ,

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L$$

sendo ambas admitidas conhecidas. Para ilustrar, no caso da vibração da corda de uma harpa tem-se  $f(x) \neq 0$  e  $g(x) = 0$  (a corda é deslocada e solta) enquanto que no piano tem-se  $f(x) = 0$  e  $g(x) \neq 0$  (a corda em repouso é posta a vibrar com um golpe).

A deflexão dependerá também das condições de contorno e assim temos, geralmente, os seguintes modelos básicos para problemas envolvendo a equação da onda:

**a) EDP:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

**b) Condições Iniciais (CI):**

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L$$

**c) Condições de contorno (CC):**

O número de condições de contorno depende do intervalo ser **limitado**, ou **não**, e estas condições serão analisadas nos três casos a seguir.

##### 4.5.1 Corda finita: $0 < x < L$

Neste caso devemos especificar o que acontece nas extremidades da corda,  $x = 0$  e  $x = L$ , e as condições de contorno são geralmente do tipo Dirichlet, ou Neumann ou de Robin, que apresentaremos a seguir.

**1 - Deslocamentos** Especificados no Contorno - Condições de contorno de 1ª espécie ou de **Dirichlet**



Neste caso tem-se **extremos controlados** onde são prescritos os movimentos nas extremidades da corda

$$u(0, t) = g_1(t) \quad u(L, t) = g_2(t)$$

Aqui controla-se os pontos extremos para se moverem verticalmente ao plano  $xt$ , segundo as funções descritas por  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$ , efeitos estes provocados por algum mecanismo externo. Se nas extremidades ocorrer,

$$g_1(t) = g_2(t) = 0,$$

temos um problema de **extremidade fixa** em que as condições de contorno são **homogêneas**.

**2 - Força** Especificada no Contorno - Condições de contorno de 2ª espécie ou de **Neumann**

Em vez do movimento nas extremidades da corda pode-se prescrever as forças que ai agem. Para fazer uma interpretação física será admitido que na extremidade da corda existe uma massa **m** que se move, **sem** atrito, verticalmente em um trilho.

A componente vertical da tensão da corda sobre a massa **m** na extremidade  $x = 0$  é  $T(0, t) \sin \theta$  a qual, para pequena inclinações, pode ser aproximada por:

$$T(0, t) \sin \theta \cong T(0, t) \tan \theta = T(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

Aplicando a 2ª lei de Newton no movimento da massa **m**, tem-se:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = T(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + f_1(t), \quad t > 0 \quad (4.9)$$

onde  $f_1$  representa a componente vertical de todas as outras forças que agem sobre **m**.

Se  $m$  for suficientemente **pequena** (desprezível) esta equação toma a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -f_1(t) / T(0, t), \quad t > 0$$

Particularmente se não existe força agindo nesta extremidade, exceto a própria tensão na corda, esta equação torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

que é uma condição de **contorno homogênea do tipo Neumann**. Esta condição assegura que quando a extremidade de uma corda esticada é **livre de forças externas**, ou seja, quando as extremidades deslizam sem atrito sobre trilhos colocados perpendiculares nas extremidades, a inclinação dela será **zero**.

De forma semelhante, se na extremidade  $x = L$  a função  $f_2(t)$  representar a componente vertical da resultante das forças que agem neste ponto, a condição de *Neumann* torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = f_2(t) / T(L, t), \quad t > 0$$

**Resumindo** - As condições de contorno de Neumann aparecem quando as extremidades da corda estão **sem massa** e movem verticalmente sem atrito sob a influência de forças especificadas.

### 3 - Enlace Elástico - Condição de Robin ou de 3ª espécie

Um caso mais geral que o anterior é se na extremidade da corda  $x = 0$  tiver a presença de uma massa  $m$  em **cima de uma mola** colocada na posição vertical ao plano  $xt$ . Ao aplicar a lei de Newton tem-se:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = T(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - ku(0, t) + f_1(t), \quad t > 0 \quad (4.10)$$

onde  $f_1(t)$  representa a componente vertical da resultante das outras possíveis forças agindo sobre  $m$ . Para o caso de massa **desprezível** e tensão constante, a equação toma a forma:

$$-T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + ku(0, t) = f_1(t), \quad t > 0$$

De forma semelhante na extremidade  $x = L$  tem-se:

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + ku(L, t) = f_2(t), \quad t > 0$$

Estas condições, que são da forma

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - \gamma_1 u(0, t) &= g_1(t) \\ u_x(L, t) + \gamma_2 u(L, t) &= g_2(t) \end{aligned} \quad ,$$

são chamadas de **enlace elástico** ou *condição de Robin ou de 3ª espécie*. Para maiores detalhes consulte a referência [1].

#### 4.5.2 Corda infinita

Neste caso, que corresponde ao estudo de ondas num espaço não limitado  $-\infty < x < \infty$ , usa-se apenas as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad e \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

que descrevem o deslocamento e a velocidade da corda em algum tempo inicial, que admitimos ser em  $t = 0$ .

### 4.5.3 Corda semi infinita

Tal como no caso anterior usa-se geralmente as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x) \quad e \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

porém como a corda está no intervalo  $0 < x < \infty$  será necessário indicar o que se acontece na extremidade  $x = 0$ , ou seja deve-se atribuir as condições de contorno neste ponto. Geralmente usa-se as mesmas descritas anteriormente no ponto  $x = 0$ .

Poderia se perguntar: por que considerar uma corda "semi-infinita" ou "infinita"?

Existem situações nas quais esse modelo é vantajoso. Por exemplo admita uma corda razoavelmente longa de extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ , em repouso no eixo  $x$ , onde no ponto médio  $x = L/2$  aplica-se uma perturbação **localizada**. Como veremos no próximo capítulo o efeito desta perturbação viaja ao longo da corda em ambas as direções no sentido de  $x = 0$  e  $x = L$ . **Antes** desta perturbação alcançar as extremidades, a corda reage como se **não** tivesse o efeito das extremidades. Assim se tivermos interesse apenas na análise inicial desta perturbação o problema "infinito" geralmente fornece explicações mais diretas do que o caso da corda finita. Na próxima lição vamos continuar a abordar este tipo de problema.

#### COMENTÁRIOS:

- (1) Em casos mais gerais a condição de contorno pode ser **não** linear, por exemplo, quando num enlace elástico que não se submete a lei de Hooke.
- (2) As derivadas em relação a  $t$  podem aparecer também na condição de contorno. Por exemplo, se na extremidade da corda  $x = 0$  tivermos uma pequena placa de peso desprezível cujo plano é perpendicular ao eixo  $u$ , e está em movimento vertical com uma resistência do meio proporcional a velocidade deste movimento, ela tem a forma:

$$Tu_x(0, t) = -\alpha u_t(0, t)$$

- (3) Outras condições de contorno menos usuais podem ocorrer, por exemplo, em problemas envolvendo a vibração vertical de duas cordas atadas com densidades diferentes ou quando existe na corda uma massa  $M$  ou uma força concentrada num ponto. Em ambos os casos resolvemos a equação da onda em cada trecho e usamos condições adequadas ao problema. Ao resolver problemas envolvendo estas condições, pelo método de separação de variáveis, método este que será visto oportunamente, é possível que a constante de separação de variáveis apareça tanto na EDO como também nas suas condições de contorno, fato este que traz uma dificuldade maior!

#### 4.6 Equação da Energia de uma Corda Vibrante

Como a propagação de ondas envolve transmissão de energia é importante saber a equação da **energia transportada**. Essa equação é importante não apenas sob o aspecto físico mas também do ponto de vista matemático pois para mostrar a **unicidade** da solução de problemas envolvendo a equação da onda geralmente recorre-se a ela. Vamos começar abordando a energia cinética e potencial de um segmento tensionado da corda elástica.

A energia cinética é devida a massa de um segmento da corda vibrante que naquele instante está "subindo ou descendo". Se  $\Delta s$  for este segmento e se a deformação for pequena, a energia cinética deste elemento em movimento é dada por

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} (\Delta m) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \cong \frac{1}{2} \rho(x) dx \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2, \quad (4.11)$$

sendo que  $\partial u / \partial t$  é a velocidade transversal deste elemento e  $\Delta m = \rho(x) dx$  a sua massa. "Somando" a energia que ocorre em todos os elementos no intervalo  $x = 0$  e  $x = L$  e tomando o limite  $\Delta x \rightarrow 0$ , encontramos a energia cinética de toda corda como sendo

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4.12)$$

Mas o pulso que se propaga ao longo da corda **não** transporta somente energia cinética, pois para que o pulso possa se formar houve uma deformação do elemento  $\Delta x$  para  $\Delta s$  e portanto temos energia potencial de deformação elástica. Pode-se mostrar de forma semelhante, porém envolvendo outros conceitos físicos, referências [5] e [8], que a energia potencial de pequenas deformações da corda, é dada por

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} T_e \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.13)$$

onde  $T_e$  é a tensão na corda. Segue que a *energia potencial total* contida no intervalo  $[0, L]$  é

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L T_e \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.14)$$

e portanto a **energia total** da corda neste intervalo é

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [T_e u_x^2 + \rho(x) u_t^2] dx \quad (4.15)$$

Vamos a seguir analisar a energia da corda admitindo-se que  $u(x, t)$  seja a solução da equação da onda

$$\rho(x) u_{tt} = T(t) u_{xx} + f(x, t, u) \quad (4.16)$$

Multiplicando esta equação membro a membro por  $u_t$  e integrando em relação a  $x$  no intervalo  $0 < x < L$ , tem-se

$$\int_0^L \rho(x) u_t u_{tt} dx = \int_0^L T(t) u_t u_{xx} dx + \int_0^L u_t f(x, t, u) dx$$

Usando a identidade

$$u_t u_{tt} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2)$$

na primeira integral e, integrando por partes a segunda, tem-se

$$\int_0^L \rho(x) u_t u_{tt} dx \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho(x) u_t^2 dx = T(t) u_x u_t \Big|_0^L - \int_0^L T(t) u_x u_{tx} dx + \int_0^L u_t f(x, t, u) dx$$

Acrescentando a hipótese que  $T(t) = T_e$  **não** depende de  $t$ , esta expressão pode ser colocada na forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^L \rho(x) u_t^2 dx + \int_0^L T_e u_x^2 dx \right] = T_e u_x u_t \Big|_0^L + \int_0^L u_t f(x, t, u) dx \quad (4.17)$$

ou então, usando a expressão de  $E(t)$ , segue

$$\frac{d}{dt} E(t) = T_e u_x u_t \Big|_0^L + \int_0^L u_t \tilde{f}(x, t, u) dx \quad (4.18)$$

que é denominada *equação de energia* para a equação da onda no intervalo  $[0, L]$ .

Se o problema dado for tal que o 2º membro da equação de energia se anula, temos apenas

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad (4.19)$$

e neste caso, se conclui que a energia  $E(t)$  **não varia** com o tempo e que portanto o princípio de conservação de energia para a vibração da corda foi preservado, isto é, o sistema é **conservativo**.

Diante disto faz-se necessário a seguinte pergunta: Em quais condições sobre a corda teremos um sistema conservativo?

Como o 2º membro da equação de energia deve ser nulo, **uma** condição para que isto ocorra é  $\tilde{f} = 0$ , e que

$$T_e u_x u_t \Big|_0^L$$

também se anule. Isto ocorre, por exemplo :

a) quando a corda tiver **extremidades livres** em  $x = 0$  e  $x = L$ , isto é,

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,$$

94

ou quando;

**b)** a corda tiver **extremidades fixas**, isto é,  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ,  $t > 0$ , que significa que nas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$  a função de  $x$  e de  $t$  é identicamente nula, ou seja que:

$$u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$$

e portanto:

$$u_x u_t \Big|_0^L \equiv 0$$

Em **resumo** se a corda **não** tiver forças externas atuantes e se tiver extremidades **fixas**, ou **livres**, a energia total da corda é **constante** para todo  $t > 0$ .

#### 4.7 Complementos\*

Com um grau de dificuldade maior poderemos ter equação **não** linear e condições de contorno diferentes das anteriores, por exemplo:

##### Equação não Linear da Onda

Ao obter a equação da onda foi usada uma série de simplificações que poderão, dependendo do caso, comprometer a resposta que se espera do problema. Assim a seguir analisaremos um caso mais geral.

A força resultante que age sobre o elemento da corda na direção  $u$ , e que é responsável pelo movimento, é dada por

$$(T \sin \beta)_{x+\Delta x} - (T \sin \alpha)_x$$

Como a massa  $\Delta m$  do elemento é  $\Delta m = \rho \Delta s$ , onde  $\rho = \rho(x, t)$  é a densidade da corda, pela 2ª lei de Newton a aceleração num ponto  $(\bar{x}, t)$  produzida no elemento por estas forças é dada por

$$T \sin \beta - T \sin \alpha \equiv (T \sin \theta)_{x+\Delta x} - (T \sin \theta)_x = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \Delta m(\bar{x}, t) \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} \right] \quad (4.20)$$

onde  $\bar{x}$ ,  $x < \bar{x} < x + \Delta x$ , é a coordenada do centro de massa do elemento da corda em questão. Sendo o comprimento do arco  $\Delta s$ ,

$$\Delta s = \sqrt{1 + (u_x)^2} \Delta x,$$

dividindo-se a expressão acima por  $\Delta x$ , segue que:

$$\frac{(T \sin \theta)_{x+\Delta x} - (T \sin \theta)_x}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \sqrt{1 + (u_x)^2} \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} \right]$$

Tomando-se o limite de ambos os membros quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , tem-se,  $\bar{x} \rightarrow x$  e pela definição de derivada obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \sqrt{1 + (u_x)^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right]$$

que é a equação diferencial **não linear** da corda sem forças externas atuantes.

Se o problema também tiver forças externas a equação anterior será alterada. Neste caso se  $F(x, t)$  for a componente em  $u$ , da resultante das forças externas que agem sobre o segmento considerado, **por unidade de comprimento**, usando o mesmo raciocínio anterior a soma destas forças passa a ser

$$(T \sin \theta)_{x+\Delta x} - (T \sin \theta)_x + F(\bar{x}, t)\Delta x$$

e fazendo o limite,  $\Delta x \rightarrow 0$ , segue a equação

$$\frac{\partial}{\partial x}(T \sin \theta) + F(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}[\rho \sqrt{1 + (u_x)^2} \frac{\partial u}{\partial t}] \quad (4.21)$$

Como o movimento é por hipótese puramente transversal ao eixo  $x$ ,  $T$  depende **apenas** de  $t$ .

A equação não linear da corda é de difícil abordagem e carece de simplificações. Quando a inclinação do deslocamento da corda,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , for "pequena" muito menor que a unidade,  $u_x \ll 1$ ,

$$\sqrt{1 + (u_x)^2} \simeq 1$$

os ângulos, em radianos, são "pequenos", e portanto

$$\sin \theta \simeq \theta \simeq \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Com estas hipóteses a equação torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}(T \frac{\partial u}{\partial x}) + F(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}[\rho \frac{\partial u}{\partial t}]$$

Se usarmos a mesma simplificação anterior, com os módulos da tensão e a densidade constantes, esta equação torna-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F}{\rho}, \quad c^2 \equiv T/\rho$$

que é um modelo, para **pequenas vibrações** transversais de uma corda perfeitamente esticada com tensão e densidade constantes.

## Outras Condições de Contorno

### I - Condições de contorno de duas cordas atadas com densidades diferentes

Supomos que duas cordas elásticas atadas e esticadas, a 1ª densidade  $\rho_1$  e comprimento  $x_1$  está no eixo  $x$  entre os pontos  $x = 0$  e  $x = x_1$ , a 2ª de densidade  $\rho_2$  e comprimento  $x_2$ , entre os pontos  $x = x_1$  e  $x = x_1 + x_2$ . Neste caso as condições de salto são:

a) **Continuidade da corda**

$$u(x_1^-, t) = u(x_1^+, t), \quad t > 0$$

b) **Força agindo em  $x_1$** 

$$u_x(x_1^-, t) = u_x(x_1^+, t), \quad t > 0$$

**II - Condições de contorno quando existe uma massa  $M$  e uma força concentrada num ponto**

Supomos que existe uma massa  $M$  e uma força de grandeza  $f_0(t)$  na direção positiva de  $u$ , ambas no ponto  $x_1$ . Neste caso a condição de continuidade anterior é mantida, porém a segunda deve ser substituída por outra que determinaremos a seguir.

Como foi visto a componente  $T_u$  da tensão na corda perpendicular a ela e na direção positiva de  $u$  é dada por

$$T_u = T \sin \theta \cong T \tan \theta = \pm T \frac{\partial u}{\partial x}$$

Devida a presença da massa  $M$  e da força  $f_0(t)$  em  $x = x_1$  a condição torna-se

$$T[u_x(x_1^+, t) - u_x(x_1^-, t)] = -f_0(t) + M u_{tt}(x_1, t), \quad t > 0 \quad (4.22)$$

que é a equação do movimento da massa sob ação das forças de tensão na corda **no ponto dado**. Neste equação  $u_{tt}(x_1, t)$ ,  $t > 0$ , pode ser  $u_{tt}(x_1^+, t)$  ou  $u_{tt}(x_1^-, t)$ , isto é devido a equação de continuidade acima uma vez que é verdadeira para qualquer  $t > 0$ .

Um caso particular de interesse é o caso no qual a massa é desprezível e portanto colocamos  $M = 0$ , e neste caso a condição de salto torna-se

$$T[u_x(x_1^+, t) - u_x(x_1^-, t)] = -f_0(t), \quad t > 0$$

**III** - Em eletromagnetismo a dedução das condições de contorno em uma superfície que demarca a fronteira entre dois meios se faz por meio das equações de Maxwell. Neste caso as componentes, tangencial ou normal, a esta superfície dos vetores de campo  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D})$  podem se caracterizar por continuidade, ou **descontinuidade**, entre estes dois meios. Assim nesta interface temos, por exemplo,

- a componente tangencial do vetor  $\vec{E}$  é contínua;
- quando pelo menos um dos meios for condutor de eletricidade a componente tangencial do vetor  $\vec{H}$  é descontínua;
- a componente normal de  $\vec{B}$  é contínua;
- a componente normal de  $\vec{D}$  é descontínua.



No dia a dia a transição destes vetores através da interface entre meios diferentes pode ser manifestada, por exemplo, quando passamos de carro com o rádio ligado por um túnel, onde dependendo do caso, o som desaparece completamente..

#### 4.8 Resumo

Sob condições ideais os deslocamentos **transversais** da corda elástica,  $u(x, t)$ , satisfazem a seguinte EDP

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \beta_1 u_t - \gamma_1 u + f(x, t)$$

$u$  - deslocamento vertical

$a = \sqrt{T/\rho}$  - velocidade da onda

$a^2 u_{xx}$  - força devido a tensão na corda

$u_{tt}$  - aceleração vertical da corda

$f(x, t)$  - força externa por unidade de comprimento na direção do eixo  $u$ , que independe de  $u$ , agindo no sistema

$\beta_1 u_t$  - termo devido a força da fricção (amortecimento)

$\gamma_1 u$  - termo devido a força restauradora.

A equação acima é conhecida como **equação telegráfica** ou do **telefone** e

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

como a **equação da onda**.

No caso da corda finita  $0 \leq x \leq L$ , temos geralmente as seguintes condições auxiliares:

##### I) Condições Iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L$$

que descrevem respectivamente o seu deslocamento inicial  $f(x)$  e a sua velocidade inicial  $g(x)$ .

##### II) Condições de Contorno

As principais condições de contorno são:

###### a) Pontos fixos controlados

Descrevem o movimento no contorno, isto é, nas extremidades da corda.

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(L, t) = g_2(t)$$

Se  $g_1(t) = g_2(t) = 0$ , temos **extremidades fixas**.

###### b) Força prescrita

Descrevem a ação de uma força agindo na direção do eixo  $u$  sobre o contorno:

$$u_x(0, t) = g_1(t), \quad u_x(L, t) = g_2(t)$$

Se  $g_1(t) = g_2(t) = 0$  temos **extremidades livres**.

### c) Condição elástica

Surge quando as extremidades da corda estão atadas nas extremidades por uma mola

$$u_x(0, t) - \gamma_1 u(0, t) = g_1(t), \quad u_x(L, t) + \gamma_2 u(L, t) = g_2(t)$$

Se a corda for infinita  $-\infty < x < \infty$  usamos apenas as condições iniciais e se for semi-infinita,  $0 < x < \infty$ , além destas condições usamos também uma condição de contorno em  $x = 0$ , tal como especificada acima.

## 4.9 Exercícios Propostos

- (1) Se  $\lambda/T = \sqrt{T_e/\rho}$  onde  $T_e$  é a tensão na corda,  $T$  é o período e  $\lambda$  é o seu comprimento de onda. Verifique que a função

$$f(x, t) = A \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

é uma solução da equação da onda.

- (2) Mostre que nas ondas progressivas  $u = f(x \pm at)$  a energia cinética é igual a energia potencial.  
 (3) Por substituição na equação da onda para uma corda esticada, mostre que a função

$$u(x, t) = Ae^{-B(x-vt)^2}$$

é uma solução da equação se  $v = \pm\sqrt{T_e/\rho}$  onde  $T_e$  é a tensão na corda e  $\rho$  é a sua densidade.

- (4) Mostre que para uma função de onda qualquer  $u(x, t)$  avançando no eixo  $x$  positivo, desde que seja suficientemente diferenciável, tem-se

$$u_x = \frac{u_t}{v}$$

ou seja, para qualquer  $x$  ou  $t$  a inclinação da corda é igual a **velocidade transversal** dividida pela **velocidade da onda**.

- (5) Use o resultado anterior e mostre que para qualquer forma de pulso as densidades de energia potencial e densidade de energia cinética **são iguais**.  
 (6) Uma corda esticada é substituída por uma outra do mesmo material mas com o diâmetro duas vezes maior. Qual deveria ser a razão da nova tensão relativamente à antiga para que a velocidade da onda permanecesse a mesma?

(7) Considere a equação homogênea com amortecimento

$$u_{tt} + 2\gamma u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad \gamma > 0$$

(a) Verifique que a solução desta equação é da forma  $u(x, t) = e^{-\gamma t} v(x, t)$  onde  $v(x, t)$  satisfaz a equação

$$v_{tt} - \gamma^2 v - a^2 v_{xx} = 0$$

(b) Admitindo que a solução particular desta última equação é da forma

$$v(x, t) = \psi(x) e^{\pm i\omega t}$$

mostre que

$$\psi(x) = A e^{\pm kx} \quad \text{onde} \quad k^2 = (w^2 + \gamma^2) / a^2$$

onde  $A$  é constante.

(c) Mostre que a solução da equação são ondas que viajam com velocidade

$$a' = w/k = aw / \sqrt{w^2 + \gamma^2} < a$$

tendo amplitude variável  $A' = A e^{-\gamma t}$



## Chapter 5

# Solução da Equação da Onda: Método das Características

**Finalidade** - Uma vez obtido o modelo matemático do problema físico cabe procurar a sua solução. Para tanto deve-se escolher o método mais indicado o qual dependerá de vários fatores, dentre eles, da geometria e extensão do domínio e da linearidade e homogeneidade do problema. Embora o uso da solução geral nem sempre é eficaz, nas equações hiperbólicas temos importantes problemas resolvidos por meio dela e que permite também apresentar interessantes interpretações a partir das curvas características.

A finalidade deste capítulo será encontrar a solução de um problema da corda elástica **infinita** com condições iniciais do tipo

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

nos casos de **vibração livre** (equação **homogênea**) e **vibração forçada** (equação **não homogênea**). Além disso resolver o problema de propagação de uma corda na **semireta**  $x \geq 0$ , com estas mesmas condições iniciais e com a condição de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

### 5.1 Interpretação Física da Solução

Como foi apresentado no 2º capítulo a equação característica,  $y = y(x)$ , da equação de coeficientes constantes

$$Lu \equiv Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

para  $A \neq 0$ , é dada por

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \frac{dy}{dx} + C = 0.$$

No caso da equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.1)$$

admitindo-se que a equação característica  $x(t)$  e fazendo as devidas adaptações, a equação característica torna-se

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0$$

Assim

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

e as **curvas características** são:

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2$$

Como foi visto no 2<sup>o</sup> capítulo, a **transformação canônica**

$$\xi = x + at$$

$$\eta = x - at$$

reduz a equação da onda para a simples equação

$$u_{\xi\eta} = 0$$

que integrando fornece a **solução geral**

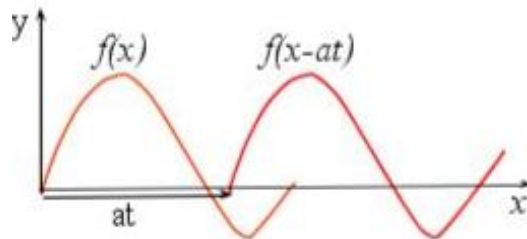
$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \Psi(\eta)$$

Então

$$u(x, t) = \phi(x + at) + \Psi(x - at), \quad a > 0 \quad (5.2)$$

onde  $\phi$  e  $\Psi$  são de classe  $C^2$ , porém arbitrárias, é a **solução geral** da equação dada.

Desde que o gráfico de  $f_1(x - at)$  é obtido a partir do gráfico de  $f_1(x)$  transladando  $at$  unidades para a direita, conforme a figura abaixo, a solução geral permite uma interessante interpretação física que passaremos a apresentá-la



Sejam

$$u_1(x, t) = \phi(x + at), \quad u_2(x, t) = \Psi(x - at)$$

Observe que a solução  $u_1$  permanece constante ao longo da curva característica

$$x + at = c_1,$$

pois  $\phi(c_1) = c^{te}$  assim ao longo desta curva,  $u_1$  **propaga sem se deformar**, em outras palavras, os impulsos seguem a característica.

Por outro lado derivando-se a expressão

$$x + at = c_1$$

em relação a  $t$ , temos a velocidade, ou velocidade de fase da onda

$$\frac{dx}{dt} = -a$$

Assim  $\phi(x + at)$  representa uma onda que se **propaga** para a **esquerda** ao longo do eixo do  $x$  sem se deformar com **velocidade a**.

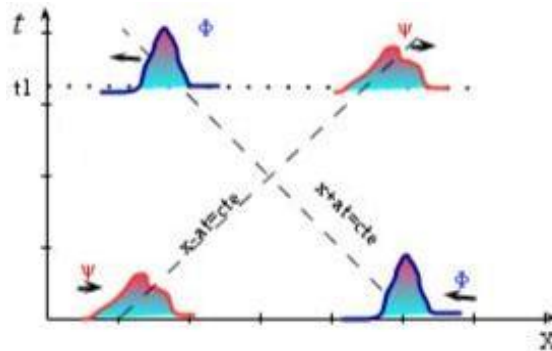
De modo análogo  $u_2(x, t) = \Psi(x - at)$  representa uma onda que se **propaga** para a **direita** ao longo do eixo  $x$ , sem deformar, também com a **velocidade a**.

**Conclusão:** A **solução geral** representa a superposição de duas ondas de perfis arbitrários viajando **com a mesma velocidade** mas em **sentidos opostos** ao longo do eixo  $x$ .

A onda  $\phi(x + at)$  é denominada de *onda regressiva*, e  $\Psi(x - at)$  *onda progressiva*. Observe que depois de decorrido um tempo  $t_0$ , no ponto  $x_2$  será reproduzido o abalo imposto no ponto  $x_1$ , onde a única diferença está no **atraso**  $t_0$ .

Por exemplo:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sin(x - at) && \text{onda movendo para a direita} \\ u(x, t) &= (x + at)^2 && \text{onda movendo para a esquerda} \\ u(x, t) &= \sin(x - at) + (x + at)^2 && \text{ondas opostas movendo com velocidade. } a \end{aligned}$$



Vamos admitir que  $\phi \equiv 0$  e que o pulso em  $t = 0$  seja dado por  $\Psi(x)$ , diferente de zero **apenas** no intervalo  $(x_1, x_2)$ . Traçando as características passando por estes

104

pontos, obtemos as retas no plano  $(x, t)$ :

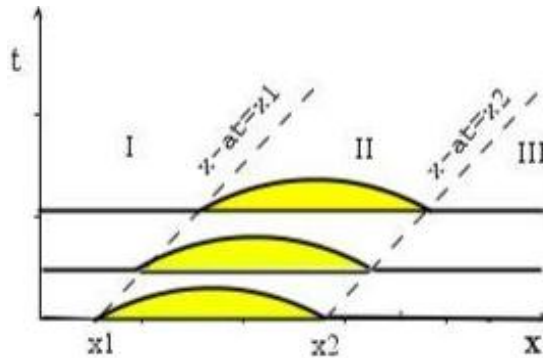
$$x - at = x_1 \quad , \quad x - at = x_2$$

Estas características dividem o plano  $(x, t)$ ,  $t \geq 0$ , chamado de *plano de fase*, em *três* regiões: *I, II e III*.

A solução  $u = \Psi(x - at)$  é **diferente de zero** apenas na região **II** e as características.

$$x - at = x_2 \quad e \quad x - at = x_1$$

representam as *frentes de onda*, dianteira e trazeira, que se propagam para a **direita**



**Exemplo** - Um fio de material resistente é tensionado com a força de 60,5 N. O fio tem seção transversal constante igual a  $2,50 \cdot 10^{-4} m^2$  e densidade igual a  $2,0 \cdot 10^3 kg/m^3$ . Determine a velocidade de uma onda transversal que se propaga neste fio.

**Solução** - Como a expressão da velocidade de  $v$  é dada por

$$v = \sqrt{\frac{T_e}{dS}} = \sqrt{\frac{60,5}{2,0 \cdot 10^3 \cdot 2,50 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{121}$$

Logo a velocidade é de  $11 m/s$ . ◀

**Exercício** - Mostre que a função dada por

$$u(x, t) = A \sin\left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

satisfaz a equação da onda e portanto é uma onda progressiva, desde que  $\lambda/T = \sqrt{T_e/\rho}$ .

**Solução** - Calculando as derivadas parciais de 2ª ordem em relação a  $x$  e a  $t$  após substituir na equação da onda e simplificar teremos

$$\frac{T^2}{\lambda^2} = \frac{\rho}{T_e}$$



ou então:

$$\frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{T_e}{\rho}}$$

onde consideramos o sinal positivo da raiz quadrada pois as grandezas envolvidas são positivas. Portanto a velocidade do pulso é

$$a = v = \lambda/T$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $T$  é o período. Desde que  $T = 1/f$  tem-se

$$v = \lambda f$$

que é válida para qualquer tipo de onda periódica que se propaga através de qualquer meio. Frequentemente a função de onda é escrita em termos de outros parâmetros como

$$u(x, t) = A \sin[kx - \omega t]$$

onde  $\omega = 2\pi/T$  é a frequência angular (número de ciclos em  $2\pi$  segundos de um ponto qualquer da corda) e  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de ondas (se  $\lambda$  for dado em  $cm$ ,  $k$  é o número de ondas contido em  $2\pi$   $cm$ ).

## COMENTÁRIOS

- (1) Estudaremos aqui apenas o caso de *ondas planas* ou seja o caso onde as ondas vibram num **mesmo plano**, perpendicular ao eixo  $x$ .
- (2) Se a corda for ideal e para pequenas vibrações transversais qualquer pulso se propaga mantendo a mesma forma da perturbação inicial. Um meio em que um pulso se propaga sem deformar-se é chamado **não dispersivo** e neste a velocidade de propagação fica inalterada.
- (3) Nos meios dispersivos a velocidade da onda depende não só do meio mas de outros fatores tais como frequência e amplitude.
- (4) Quando impomos um pulso numa corda este progride ao longo da corda. Deve ficar claro que o que progride não são as partículas que constituem a corda, mas sim o pulso. Quando dissermos velocidade da onda, que é uma grandeza escalar, significa a velocidade da perturbação e **não a velocidade transversal** de qualquer elemento que é dada por  $v_e = \partial u / \partial t$ .

## 5.2 Primeiro Problema de Cauchy.

Consiste em encontrar a solução do **problema de valor inicial** (PVI)

$$\begin{array}{ll} \text{EDP} & a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ \text{CI} & u(x, 0) = f(x) \quad \text{desloc.inicial} \quad -\infty < x < \infty \\ \text{CI} & u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{veloc.inicial} \quad -\infty < x < \infty \end{array}$$

onde as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são conhecidas.

### 5.2.1 Solução de D'Alembert

Desde que a solução geral é

$$u(x, t) = \phi(x + at) + \Psi(x - at)$$

vamos a seguir **determinar**  $\phi$  e  $\Psi$  de modo a satisfazerem as condições impostas. Usando as condições iniciais obtemos:

$$\begin{aligned} \phi(x) + \Psi(x) &= f(x) \\ a\phi'(x) - a\Psi'(x) &= g(x) \end{aligned}$$

Integrando esta última equação temos o sistema

$$\begin{aligned} \phi(x) + \Psi(x) &= f(x) \\ \phi(x) - \Psi(x) &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x g(r) dr + k, \end{aligned}$$

onde  $x_0$  e  $k$  são constantes arbitrárias, que resolvido fornece:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(r) dr + \frac{k}{2} \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(r) dr - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Uma vez determinadas as expressões para  $\phi$  e  $\Psi$ , a partir da solução geral temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_{x_0}^{x+at} g(r) dr - \int_{x_0}^{x-at} g(r) dr \right]$$

ou simplesmente

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(r) dr \quad (5.3)$$

Esta expressão é chamada de *solução* ou *fórmula* de D'Alembert do 1º Problema de Cauchy para a equação da onda unidimensional. Se  $f$  for de classe  $C^2$  e  $g$  de classe  $C^1$ , facilmente verifica-se que  $u(x, t)$ , dado por esta expressão é solução do problema a qual é **unicamente** determinada pelas condições iniciais. Do raciocínio usado para obter a solução de D'Alembert temos que a solução é **única**. Para que

o problema seja **bem posto** deve-se verificar também a **dependência contínua** dos dados (estabilidade) - é isto será feito na próxima seção.

**Exercício** - Encontre a solução do PVI.

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, & & t > 0 \\ u(x, 0) &= \text{sen } x, & u_t(x, 0) &= \cos x, & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

**Solução** - Desde que  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $g(x) = \cos x$ , a fórmula de D'Alembert permite escrever

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\text{sen}(x + at) + \text{sen}(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \cos r dr = \\ &= \text{sen } x \cos at + \frac{1}{2a} [\text{sen}(x + at) - \text{sen}(x - at)] \\ &= \text{sen } x \cos at + \frac{1}{a} \cos x \text{sen } at \end{aligned}$$

que é a solução do problema dado ◀.

#### COMENTÁRIO

A discussão apresentada mostra que se o problema tem solução ele é dado pela fórmula de D'Alembert. Reciprocamente se  $f$  é de classe  $C^2$  e  $g$  de classe  $C^1$  para todo  $x$  então temos efetivamente a solução do problema apresentado. Com estas hipóteses temos não apenas a existência mas a unicidade de solução.

### 5.3 Estabilidade da Solução\*

Para verificar a dependência contínua da solução sobre os dados iniciais (estabilidade) usamos o seguinte procedimento.

Seja  $u^*$  a solução do mesmo problema quando as condições  $f$  e  $g$  forem substituídas respectivamente por  $f^*$  e  $g^*$ . O problema será estável se para cada  $\varepsilon > 0$  e para cada intervalo  $[0, t_0]$  for possível encontrar um número  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , tal que para cada  $t \in [0, t_0]$  tem-se que

$$|u(x, t) - u^*(x, t)| < \varepsilon,$$

sempre que

$$|f(x) - f^*(x)| < \delta \quad e \quad |g(x) - g^*(x)| < \delta$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$

Este resultado ocorre, pois pela solução de D'Alembert, temos

$$u(x, t) - u^*(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) - f^*(x + at)] + \frac{1}{2}[f(x - at) - f^*(x - at)] \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [g(r) - g^*(r)] dr$$

que implica na desigualdade

$$|u(x, t) - u^*(x, t)| \leq \frac{1}{2}|f(x + at) - f^*(x + at)| + \frac{1}{2}|f(x - at) - f^*(x - at)| + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |g(r) - g^*(r)| dr$$

Se nesta última expressão tomarmos  $\delta$  como sendo

$$\delta = \varepsilon/(1 + t_0)$$

temos

$$|u(x, t) - u^*(x, t)| \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{1 + t_0} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{1 + t_0} + \frac{1}{2a} \frac{\varepsilon}{1 + t_0} (2at_0) = \varepsilon$$

e portanto a solução é **estável pois**

$$|u(x, t) - u^*(x, t)| < \varepsilon$$

## 5.4 Interpretação da Solução de D'Alembert

Vamos considerar separadamente os casos  $u_t(x, 0) = g(x) = 0$  e  $u_t(x, 0) = g(x) \neq 0$

### 5.4.1 Velocidade inicial nula $u_t(x, 0) = g(x) = 0$

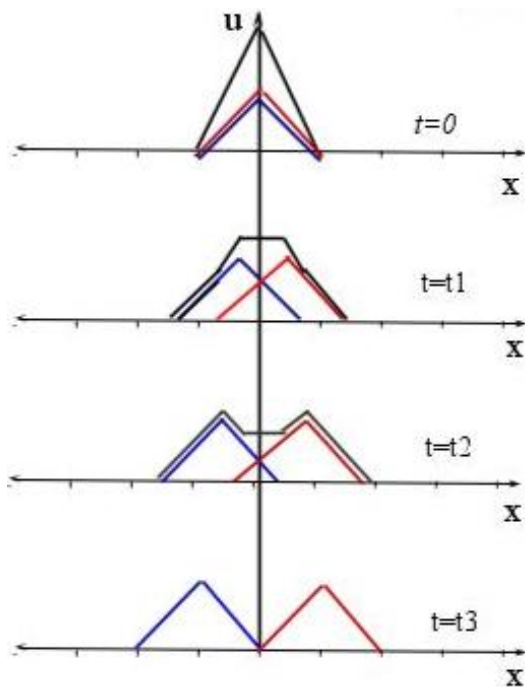
Admitindo-se que a vibração da corda seja causada **apenas** pelo deslocamento inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , ou seja, a velocidade inicial  $g(x)$  é **nula**, a fórmula D'Alembert, para  $a = 1$ , fornece:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + t) + f(x - t)]$$

Assim para cada  $t$ , a solução  $u(x, t)$  é a soma das ondas progressiva e regressiva. Embora  $f$  deva ser de classe  $C^2$ , para facilitar a compreensão considere o caso de uma função **apenas contínua**, dada por.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Fazendo os gráficos para  $t = 0$ ,  $t = 1/2$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ , temos:



Podemos dar uma outra interpretação para a solução de D'Alembert. Desde que as retas características são

$$x - at = c_1 \quad x + at = c_2$$

as que passam por um ponto fixo  $(x_0, t_0)$  são dadas por:

$$x - at = x_0 - at_0$$

$$x + at = x_0 + at_0$$

Uma vez que  $g(x) \equiv 0$ , a fórmula de D'Alembert torna-se

$$u(x_0, t_0) = \frac{f(x_0 - at_0) + f(x_0 + at_0)}{2}$$

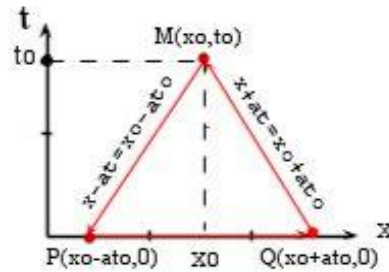
ou simplesmente

$$u(M) = \frac{f(P) + f(Q)}{2},$$

onde

$$M = (x_0, t_0) \quad , \quad P = (x_0 - at_0, 0) \quad e \quad Q = (x_0 + at_0, 0)$$

Assim geometricamente a solução  $u$  no ponto  $M$  é a **média do deslocamento inicial**  $f(x)$  nos vértices do triângulo (isósceles)  $PMQ$ , o qual é denominado *triângulo característico*

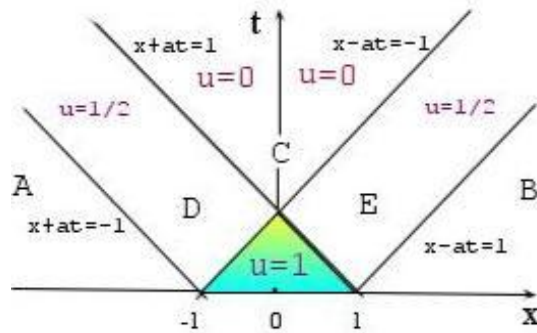


**Exercício** - Usando esta interpretação da solução de D'Alembert, forneça as possíveis soluções no plano  $x-t$  do seguinte PVI.

$$\text{EDP} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{CI} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = g(x) \equiv 0 \end{cases}$$

**Solução** - Traçamos as características que passam pelos pontos  $-1$  e  $1$ , as quais dividirão o semiplano  $t \geq 0$  em **seis** regiões conforme a figura abaixo. Vamos analisá-las tomando o ponto  $M$  nestas regiões.



$A, B$  e  $C$  - Correspondem a regiões cujos pontos **não** são afetados pela perturbação inicial e portanto a **solução é nula**.

$D$  - **influência** apenas da **onda inversa**, a solução é  $u = 1/2$

$E$  - **influência** apenas da **onda direta**, a solução é  $u = 1/2$ .

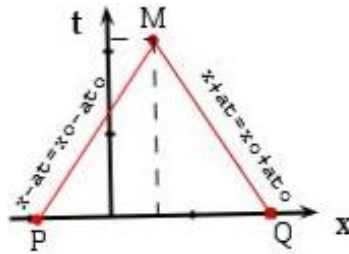
$F$  - **influência** das ondas **direta e inversa** e solução é  $u = 1$ .

No gráfico apresentado considere a reta vertical ao eixo  $x$  passado por um ponto  $M$  da região  $C$ . Este ponto ocupou, num tempo anterior, pelo menos uma das

regiões  $D$ ,  $E$  ou  $F$ . Assim podemos concluir que nos pontos da **região  $C$**  o **efeito** da perturbação inicial,  $u(0, t) = f(x)$ , já **passou** e retornou ao **repouso**.

#### 5.4.2 Velocidade inicial não nula $u_t(x, 0) = g(x) \neq 0$

Considere as curvas características que passam pelo ponto fixo  $M = (x_0, t_0)$ , conforme a figura abaixo.



Pela figura, a solução de D'Alembert no ponto  $M$  é

$$u(M) = \frac{f(P) + f(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} g(r) dr$$

**Conclusão - A solução  $u$  no ponto  $M$**  do 1º Problema de Cauchy é unicamente determinada pelos valores iniciais:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

ao longo do segmento  $\overline{PQ}$ . Mais especificamente, a solução no ponto  $M$  depende:

- a) dos valores de  $f$  nos extremos  $P$  e  $Q$ ; e
- b) dos valores de  $g$  no intervalo  $\overline{PQ}$

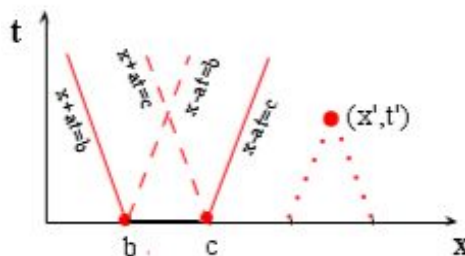
Isto significa que qualquer alteração que se faça no deslocamento inicial  $f$  e/ou na velocidade de  $g$  **fora deste intervalo, não alterará a solução no ponto  $M$** . Em outras palavras, o valor da solução  $u(x, t)$  no ponto  $M$  só depende deste intervalo chamado de domínio de dependência conforme a seguinte definição. Chama-se *domínio de dependência* do ponto  $M = (x_0, t_0)$  como sendo:

$$D(x_0, t_0) = \{x; \quad x_0 - at_0 \leq x \leq x_0 + at_0\} \quad (5.4)$$

Por outro lado supomos que  $[b, c]$  seja um intervalo do eixo  $x$  e queremos saber quais os pontos  $(x, t)$  do plano  $x, t$ , em que a solução se modifica quando alterarmos os valores iniciais  $f$  e  $g$  em  $[b, c]$ . O conjunto de pontos  $(x, t)$  satisfazendo estas condições chama-se *domínio de influência*, ou seja

$$D_{\text{inf}}[b, c] = \{(x, t); \quad x + at = b \leq x \leq x - at = c, \quad 0 \leq t \leq \infty\} \quad (5.5)$$

Se  $b = c$  temos o domínio de influência de um ponto.



**Exercício** - Encontre o domínio de dependência do problema de Cauchy:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 4x^2$$

no ponto  $M = (x, t) \equiv (-3, 5)$

**Solução** - Como  $a = 1$ , as retas características são:

$$x - t = c_1 \quad x + t = c_2$$

Para  $x = -3$  e  $t = 5$ , temos  $c_1 = -8$  e  $c_2 = 2$  e portanto as características que passam por  $M$  são:

$$x - t = -8, \quad x + t = 2$$

Desde que para  $t = 0$  temos,  $x = -8$  e  $x = 2$ , o domínio de dependência do ponto  $(-3, 5)$  é  $-8 \leq x \leq 2$ . ◀

### COMENTÁRIOS

- (1) No 1º Problema de Cauchy a configuração inicial  $u(x, 0) = f(x)$  é chamada de *perfil da onda*.
- (2) A **onda progressiva** também é chamada de *onda direta* ou do *futuro* e a **regressiva** de *onda inversa* ou do *passado*.
- (3) Se definirmos:

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x g(r) dr$$

a solução de D'Alembert pode ser escrita como:

$$u(x, t) = \left[ \frac{f(x + at)}{2} + \tilde{g}(x + at) \right] + \left[ \frac{f(x - at)}{2} - \tilde{g}(x - at) \right]$$

sendo a primeira parte uma **onda inversa**, e a segunda uma **onda direta**.

- (4) No 1º Problema de Cauchy temos um fenômeno interessante quando  $g(x) \equiv 0$  para todo  $x$  e  $f(x) \neq 0$  apenas no intervalo  $[a, b]$ : fixado um ponto  $x_0$  **fora** deste intervalo, a perturbação demora um certo tempo até chegar a  $x_0$ , perturba este ponto durante certo tempo, e depois passa deixando o ponto



novamente em **repouso para sempre**. Este fato é característico de ondas **unidimensionais** e **tridimensionais** (ondas sonoras no  $R^3$ ), e **não** ocorre nas ondas bidimensionais (membranas vibrantes, ondas na superfície da água), onde a perturbação inicial contínua sempre afetando o ponto  $x_0$  - é o que se passa quando uma pedra é jogada na superfície da água. Ao contrário do que acontece para ondas unidimensionais, no caso de ondas tridimensionais isto ocorre **mesmo** se a velocidade inicial  $g$  for diferente de zero [8].

- (5) A expressão de  $u$  dada pela fórmula de D'Alembert sem restrições sobre  $f$  e  $g$  é simplesmente uma candidata à solução. Como  $u$  satisfaz as condições iniciais,  $u$  será solução se exigirmos que  $f$  seja de classe  $C^2$  e  $g$  de classe  $C^1$  e portanto  $u$  de classe  $C^2$  em todo semiplano  $t \geq 0$ . Esta *solução* é chamada de *estrita*. No caso em que  $f$  e/ou  $g$  não satisfaçam estas condições, podemos ampliar o conceito de solução, considerando a *solução generalizada*. Para maiores detalhes consulte a referência [8].

## 5.5 Segundo Problema de Cauchy

O problema de valor inicial para a equação **não** homogênea

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = -F(x, t) \quad -\infty < x < \infty; \quad t \geq 0 \quad (5.6)$$

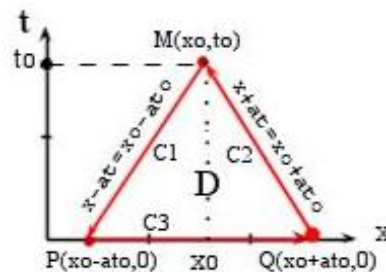
$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (5.7)$$

é chamado de **2º problema de Cauchy** para a equação da onda unidimensional.

A função  $F(x, t)$  é suposta ser contínua em  $(x, t)$  e  $f$  e  $g$  são supostas de classe  $C^2$  e  $C^1$  respectivamente.

Seja  $M(x_0, t_0)$  um ponto qualquer do plano  $x_0 t_0$ , no qual desejamos determinar a solução do problema, e  $D$  o triângulo característico determinado por este ponto.

Integrando ambos os membros da equação acima na região  $D$  obtemos:



$$\int_D (a^2 u_{xx} - u_{tt}) dx dt = - \int_D F(x, t) dx dt \quad (5.8)$$

Usando a fórmula de Green no plano  $xOt$ , que é dada por

$$\int_D \int \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial t} \right) dxdt = \oint Mdx + Ndt, \quad (5.9)$$

e tomando  $N = a^2 u_x$  e  $M = u_t$  obtemos:

$$\int_D \int [a^2 u_{xx} - u_{tt}] dxdt = \oint_C u_t dx + a^2 u_x dt \quad (5.10)$$

onde  $C$  é a fronteira de  $D$ . Parametrizando  $C$  segue:

$$C_1 : x - at = x_0 - at_0 \quad \text{onde} \quad x_0 - at_0 \leq x \leq x_0$$

$$C_2 : x + at = x_0 + at_0 \quad \text{onde} \quad x_0 \leq x \leq x_0 + at_0$$

$$C_3 : t = 0 \quad \text{e} \quad x_0 - at_0 \leq x \leq x_0 + at_0 \quad (\text{domínio de dependência})$$

Para calcular a integral de linha acima vamos decompor a curva  $C$  nos seguintes trechos:

a) Sobre  $C_3$  :  $dt = 0$

$$\int_{C_3} u_t dx + a^2 u_x dt = \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} u_t(x, 0) dx$$

b) Sobre  $C_1$  :  $dx = a dt$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} u_t dx + a^2 u_x dt &= \int_{C_1} u_t a dt + a^2 u_x dt = \int_{C_1} u_t a dt + a^2 u_x \frac{dx}{a} = a \int_{C_1} du = \\ &= a[u(x_0 - at_0, 0) - u(x_0, t_0)] \end{aligned}$$

c) Sobre  $C_2$  :  $dx = -a dt$

$$\int_{C_2} u_t dx + a^2 u_x dt = \int_{C_2} u_t (-a dt) + a^2 u_x \left(-\frac{dx}{a}\right) = -a \int_{C_2} du = -a[u(x_0, t_0) - u(x_0 + at_0, 0)]$$

Somando-se estes três resultados tem-se:

$$\int_C u_t dx + a^2 u_x dt = a[u(x_0 + at_0, 0) + u(x_0 - at_0, 0)] - 2au(x_0, t_0) + \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} u_t(x, 0) dx \quad (5.11)$$

Com este resultado e usando (15.12) segue que:

$$a[u(Q) + u(P)] - 2au(M) + \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} u_t(x, 0) dx = - \int_D \int F(x, t) dxdt \quad (5.12)$$

de onde se conclui que:

$$u(M) = \frac{1}{2}[f(x_0 + at_0) + f(x_0 - at_0)] + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} g(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_D \int F(x, t) dxdt$$

Desde que  $M(x_0, t_0)$  é um ponto escolhido arbitrariamente, segue que a solução é:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_D \int F(x, t) dx dt \quad (5.13)$$

Reciprocamente, se  $f \in C^2$ ,  $g \in C^1$  e  $F(x, t)$  contínua, esta última função satisfaz as condições do problema dado.

**Exercício** – Encontre a solução do 2<sup>o</sup> Problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= 1, & -\infty < x < \infty; & t > 0, \\ u(x, 0) &= x^2, & u_t(x, 0) &= 1 \end{aligned}$$

**Solução** - Desde que as retas características são

$$x + t = c_1 \quad , \quad x - t = c_2$$

Num ponto  $(x_1, t_1)$  do plano, usando a expressão 10.3 temos

$$u(x_1, t_1) = \frac{(x_1 + t_1)^2 + (x_1 - t_1)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_1 - t_1}^{x_1 + t_1} 1 dx - \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \int_{t+x_1-t_1}^{-t+x_1+t_1} 1 dx dt$$

Resolvendo as integrais, segue que a solução é dada por:

$$u(x_1, t_1) = x_1^2 + t_1^2/2 + t_1$$

### COMENTÁRIOS:

- (1) Observe que esta solução pode ser decomposta em duas funções  $v$  e  $w$

$$u = v + w$$

onde:

- (a) A função  $v$  é a solução do 1<sup>o</sup> problema de Cauchy:
- $$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty; \quad t \geq 0, \\ v(x, 0) = f(x), \quad v_t(x, 0) = g(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$
- (b) A função  $w$  é a solução da equação da onda não homogênea com condições iniciais homogêneas:

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = F(x, t) & -\infty < x < \infty; \quad t \geq 0, \\ w(x, 0) = 0 \quad , \quad w_t(x, 0) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

- (2) Demonstra-se, de modo análogo ao 1<sup>o</sup> problema de Cauchy, que o 2<sup>o</sup> problema também é bem posto.
- (3) Existe um método, chamado método de Riemann (referência [5]), que permite resolver uma classe mais geral de problemas de valor inicial consistindo da EDP

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

e das condições iniciais na curva  $\mathcal{C}$  :

$$u|_{\mathcal{C}} = g(x), \quad u_n|_{\mathcal{C}} = h(x)$$

onde  $u_n$  é a derivada normal à curva  $\mathcal{C}$ .

## 5.6 Reflexão na Corda Semi Infinita

Os problemas tratados anteriormente eram apenas PVIs pois a corda estava no intervalo  $-\infty < x < \infty$ . Quando a corda for **semi-infinita**  $x \geq 0$ , ou finita,  $0 \leq x \leq L$ , teremos condições de contorno que alterarão a solução. Aqui trataremos apenas o primeiro caso e a estratégia será adaptar a solução de D'Alembert obtida anteriormente para o problema da **corda infinita**

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

que é dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(r) dr$$

Para investigar tais problemas a seguinte propriedade, que é uma consequência da solução de D'Alembert, será fundamental.

**Propriedade:** Se no problema acima  $u(x, t)$  for solução e as condições iniciais  $f$  e  $g$  forem **funções ímpares então**  $u(0, t) = 0$ , e se forem **pares**  $u_x(0, t) = 0$ .

Isto ocorre pois:

a) Tomando a solução de D'Alembert em  $x = 0$  tem-se:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f(at) + f(-at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} g(r) dr,$$

e devido ao fato de  $f$  e  $g$  serem **ímpares** segue que

$$u(0, t) = 0 \tag{5.14}$$

b) Como a derivada de uma função definida por uma integral é dada por

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} G(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x} dy + G[x, b] \frac{db}{dx} - G[x, a] \frac{da}{dx},$$

derivando-se a solução de D'Alembert em relação a  $x$  segue que:

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} [f'(x+at) + f'(x-at)] + \frac{1}{2a} [g(x+at) - g(x-at)]$$

Fazendo nesta expressão,  $x = 0$ ,

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2}[f'(at) + f'(-at)] + \frac{1}{2a}[g(at) - g(-at)],$$

e devido ao fato da derivada de uma função **par** ser **ímpar**, temos:

$$u_x(0, t) = 0 \quad (5.15)$$

Consideraremos o problema básico de propagação de uma onda na **semireta**  $x \geq 0$ , dado por:

$$\begin{array}{lll} \text{EDP} & u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < \infty \quad t > 0 \\ \text{CI} & u(x, 0) = f(x) & u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x < \infty \\ \text{CC} & u(0, t) = 0 & t \geq 0 \end{array}$$

É evidente que neste problema **não** se pode usar a **solução** de **D'Alembert** já obtida para a corda infinita. Isto porque embora  $x + at$  seja **sempre positivo**,  $x - at$  **pode ser negativo** e neste caso não podemos usar  $f$  e  $g$  pois estas funções estão definidas **apenas** para argumentos **positivos**.

Assim para  $x - at > 0$ , ou seja  $x > at$ , a solução é a mesma já encontrada na corda infinita, ou em outras palavras nessa região a condição de contorno  $u(0, t) = 0$  **não** é sentida.

Para poder adaptar a solução de D'Alembert a este problema usaremos funções auxiliares. Indicando por  $\tilde{f}(x)$ ,  $\tilde{g}(x)$  as extensões ímpares, respectivamente, de  $f$  e  $g$ , isto é,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

e como estão definidas em **toda reta**, podemos assim usar a solução de D'Alembert. Portanto

$$u(x, t) = \frac{\tilde{f}(x + at) + \tilde{f}(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(r) dr, \quad t > 0$$

o que implica em  $\mathbf{u(0, t) = 0}$ .

Além do mais esta função satisfaz as seguintes **condições iniciais** para  $t = 0$  e  $x > 0$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \tilde{f}(x) = f(x) \\ u_t(x, 0) = \tilde{g}(x) = g(x) \end{array} \right\} \text{ se } x > 0$$

Voltando às funções originais, isto é, usando as definições de  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  para  $x > 0$  e

uma vez que  $x + at > 0$ , podemos escrever

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(r) dr, \quad x - at > 0, \quad x > 0 \quad (5.16)$$

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) - f(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} g(r) dr, \quad x - at < 0, \quad x > 0 \quad (5.17)$$

Esta última expressão foi obtida usando o fato de  $\tilde{g}$  ser ímpar e a decomposição

$$\int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}(r) dr = \int_{x-at}^0 -g(-r) dr + \int_0^{x+at} g(r) dr$$

e fazendo na 1º integral do 2º membro  $s = -r > 0$ , que fornecerá  $\int_{at-x}^0 g(s) ds$ .

Observe que na região  $t < x/a$  a influência das condições de contorno **não** é sentida e a expressão para  $u(x, t)$  **coincide** com a solução na corda infinita.

**Exercício** - Determine a solução do problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \text{sen } x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \text{para } x \geq 0 \\ u(0, t) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

**Solução** - Para  $x > 2t$  temos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [f(x + 2t) + f(x - 2t)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{sen}(x + 2t) + \text{sen}(x - 2t)] \end{aligned}$$

Para  $x < 2t$  temos:

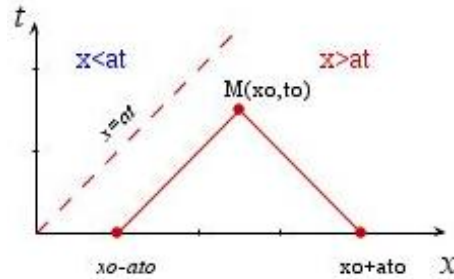
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [f(x + 2t) - f(2t - x)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{sen}(x + 2t) - \text{sen}(2t - x)] \end{aligned}$$

Note que  $u_t(x, 0) = 0$  também é satisfeita. ◀

A solução encontrada para a corda semi infinita a partir da Solução de D' Alembert permite interessante interpretação no **plano de fase**  $x0t$

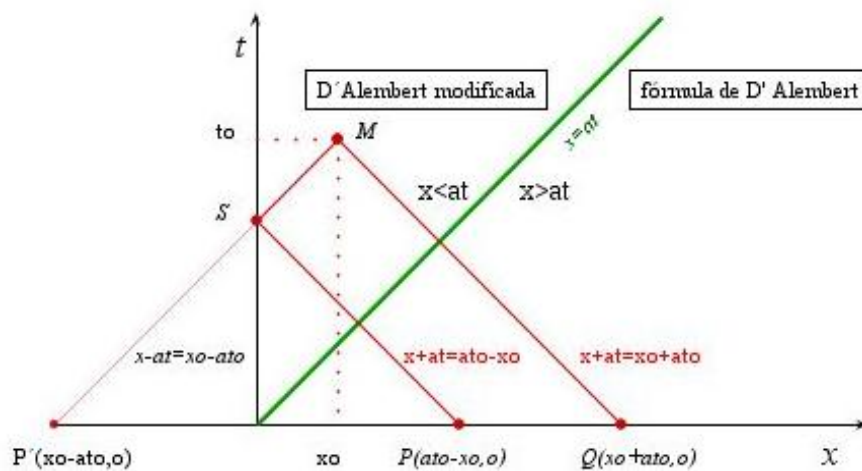
#### a) Região $x > at$

Traçando as características que passam no ponto  $M = (x_0, t_0)$ , tal como ocorria na corda infinita o deslocamento em  $M$  é determinado pelos valores iniciais no intervalo  $0 \leq x_0 - at_0 \leq x \leq x_0 + at_0$ .



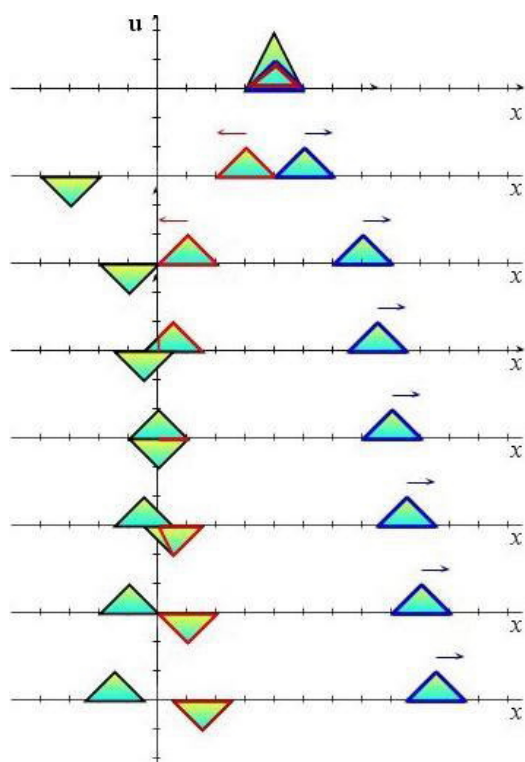
**b) Região  $0 < x < at$**

- Se o ponto  $M = (x_0, t_0)$  estiver na região onde  $x < at$ , a característica  $x + at = x_0 + at_0$  intercepta o eixo  $x$  no ponto  $Q = (x_0 + at_0, 0)$ .
- A outra característica que passa por este ponto  $M$ ,  $x - at = x_0 - at_0$ , intercepta o eixo  $t$  em  $S = (0, t_0 - x_0/a)$  e a característica  $x + at = c_2$ , que passa por este ponto  $S$  e que é  $x + at = at_0 - x_0$ , vai interceptar o eixo  $x$  em  $P = (at_0 - x_0, 0)$ .



Assim o valor  $f(P)$  no instante  $t = 0$  se propagará para a esquerda ao longo da características com velocidade  $a$  até encontrar a extremidade da corda onde se reflete. A fórmula de D'Alembert, adaptada para este caso, afirma que nesta reflexão há uma troca de sinal da função  $f$ , passando a ser  $-f(at_0 - x_0)$ .

Os valores iniciais de  $u_t(x, 0) = g$  também são refletidos.



Para ilustrar fisicamente o processo de propagação vamos admitir que no intervalo  $0 < a < b$  temos:

$$u_t(x, 0) = g(x) \equiv 0 \quad u(x, 0) = f(x)$$

onde  $f$  tem como gráfico os lados iguais de um triângulo isósceles, sendo nula fora do intervalo  $a < x < b$ . A solução deste problema se obtém estendendo os dados iniciais de modo **ímpar** em toda reta.

No início o processo é igual ao da corda infinita: a perturbação  $f(x)$  se divide em duas ondas que se movem em sentidos opostos com a mesma velocidade até que a onda, que caminha para a esquerda, chega ao ponto  $x = 0$ .

Neste momento pela esquerda ( $x \leq 0$ ), onde temos processo análogo, chega ao ponto  $x = 0$  a onda com **fase oposta**. Nos momentos subsequentes tem lugar a **reflexão da onda** no extremo fixo. O perfil da onda que se reflete vai aos poucos desaparecendo e aparecendo com sinal oposto até que a onda refletida caminha para à direita atrás da onda que já estava se propagando neste sentido. Deste modo quando uma onda se reflete em um extremo fixo de uma corda, seu **perfil troca de sinal**. Os gráficos abaixo permitem a visualização.

Para uma corda semi infinita,  $x \geq 0$ , com **extremidade livre** em



$x = 0$  com as seguintes condições

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \infty \\ u_x(0, t) &= 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \leq t \leq \infty \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

podemos determinar a solução de modo semelhante ao caso anterior. Fazendo uma **extensão par dos dados iniciais**  $f$  e  $g$ , lembrando que a **derivada de uma função par é ímpar**, vamos obter a seguinte solução:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(r) dr \quad \text{se} \quad x > at \quad (5.19)$$

$$(5.20)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{x+at} g(r) dr + \int_0^{at-x} g(r) dr \right] \quad \text{se} \quad x < at$$

que satisfaz as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

e a condição de fronteira  $u_x(0, t) = 0$  na região  $x \geq 0$ .

Em resumo temos:

**Para achar a solução do problema da corda na reta semi-infinita temos:**

- (1) **se for dada a condição**  $u(0, t) = 0$  **devemos fazer uma extensão ímpar das condições iniciais;**
- (2) **se for dada a condição**  $u_x(x, t) = 0$ , **fazemos uma extensão par destas condições.**

Observe que para existir esta solução é preciso que  $f$  seja de classe  $C^2$  e  $g$  de classe  $C^1$  além de  $f'(0) = g'(0) = 0$  (ver referência [2]).

Quando o problema da corda semi-infinita, tratado anteriormente, tiver condições de contorno não homogêneas usamos o princípio de superposição e decomposmos o problema em dois da seguinte maneira.

Problema 1 - Com as condições iniciais impostas anteriormente, mas com condição de contorno nula

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x < \infty$$

$$u_1(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

cuja solução foi apresentada anteriormente.

Problema -2- .Com condições iniciais nulas mas com a condição de contorno imposta ao problema:

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_{2t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$u_2(0, t) = h(t), \quad t \geq 0$$

A solução será a soma destas duas soluções,  $u_1$  e  $u_2$  (referências [5] e [8]).

Para determinar a solução deste último problema observe que depois de ocorrer a reflexão, isto é depois de  $x - at \leq 0$ , teremos uma onda que caminhará para a direita com velocidade  $a$ . Assim vamos tentar para este problema uma solução do tipo

$$u_2(x, t) = \phi(x - at)$$

onde o objetivo será determinar a função  $\phi$  em termos da função  $h$ .

Pela condição de contorno temos

$$u_2(0, t) = \phi(-at) = h(t), \quad t \geq 0$$

Fazendo  $r = -at$  concluímos que a função  $\phi$  está definida por:

$$\phi(r) = h(-r/a)$$

e portanto a solução procurada é

$$u_2(x, t) = h(t - x/a), \quad t \geq x/a$$

que está definida apenas em  $x - at \leq 0$ , pois  $t \geq 0$ . Para valores  $t < x/a$  definimos a função  $h$  como sendo igual a zero neste intervalo. Desta forma esta função  $h$  está definida para todos os argumentos e satisfazendo as condições iniciais nulas.

Somando a solução do primeiro problema com a do segundo temos a solução da corda semi-infinita:

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(r) dr, \quad t < x/a, \quad x > 0 \quad (5.21)$$

$$u(x, t) = h(t - x/a) + \frac{f(x + at) - f(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} g(r) dr, \quad t > x/a, \quad x > 0$$

## COMENTÁRIOS

- (1) No caso da corda semi infinita ao estendê-la devemos tomar o cuidado para que a extensão de  $f$  seja de classe  $C^2$  e  $g$  de classe  $C^1$ , sendo necessariamente  $f(0) = g(0) = 0$  na extensão ímpar.
- (2) Para o caso da corda no intervalo  $0 \leq x \leq L$  consulte a referência [5].

- (3) O problema de corda infinita é uma idealização matemática para uma corda muito longa. Se nos interessa o fenômeno durante um intervalo de tempo, no qual a influência da fronteira não é essencial, em lugar do problema completo pode-se considerar o problema limite com condição inicial para uma região não limitada  $-\infty < x < \infty$ . Se ao contrário estudarmos o fenômeno nas cercanias de uma fronteira,  $x = 0$ , e a influência da 2ª fronteira  $x = L$  não possui significado substancial durante o intervalo de tempo que nos interessa, tomamos o problema na semireta  $0 \leq x < \infty$ .
- (4) O fato das equações hiperbólicas (onda) terem duas famílias reais e distintas de curvas características propicia a obtenção da solução de uma classe de problemas envolvendo este tipo de equação, processo este que **não** se aplica nas equações parabólicas (calor) e elípticas (potencial).

## 5.7 RESUMO

Um problema ideal de corda elástica muito importante é o primeiro problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

que é resolvido a partir da solução geral.

Como esta EDP hiperbólica é de coeficientes constantes as suas características são as famílias de retas

$$x + at = c_1, \quad x - at = c_2$$

e a solução geral é dada por

$$u = u_1 + u_2$$

onde:

$$u_1 = \phi(x + at) \quad u_2 = \Psi(x - at)$$

sendo  $u_1$  constante ao longo da característica  $x + at = c_1$  e  $u_2$  constante ao longo da característica  $x - at = c_2$ . Fisicamente representa a superposição de duas ondas de perfis arbitrários viajando com a mesma velocidade mas em sentidos opostos ao longo do eixo  $x$ .

Por meio da solução geral e usando as condições iniciais, a solução deste problema, chamada de solução de D'Alembert para a corda infinita, é dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(r) dr$$

Uma consequência desse resultado, e que será útil na obtenção da solução da equação da corda **semi infinita**, é a seguinte:

1 - Se  $f$  e  $g$  são ímpares então  $u(0, t) = 0$

2 - Se  $f$  e  $g$  são pares então  $u_x(0, t) = 0$

Desde que as características que passam por um ponto fixo  $M = (x_0, t_0)$  são

$$x + at = x_0 + at_0 \quad , \quad x - at = x_0 - at_0,$$

se designarmos

$$P = (x_0 - at_0, 0) \quad \text{e} \quad Q = (x_0 + at_0, 0),$$

a solução de D'Alembert num ponto  $M$  é dada por:

$$u(M) = \frac{1}{2}[f(P) + f(Q)] + \frac{1}{2a} \int_{PQ} g(r) dr$$

Assim a solução  $u$  neste ponto é determinada pelos valores iniciais de  $f$  e  $g$  ao longo do segmento  $\overline{PQ}$ .

Qualquer alteração em  $f$  e/ou  $g$  fora desse domínio não influenciará a solução em  $M$ . O intervalo  $\overline{PQ}$  é chamado de domínio de dependência do ponto  $M = (x_0, y_0)$  e o triângulo formado a partir das características, de triângulo característico.

A solução  $u$  no ponto  $M = (x_0, t_0)$  do segundo Problema de Cauchy.

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= F(x, t), & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

é encontrada calculando a integral dupla membro a membro da EDP, no triângulo característico do ponto  $M = (x_0, t_0)$ . Nessa integral usando a fórmula de Green, obtem-se:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + at_0) + f(x_0 - at_0)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at_0}^{x_0+at_0} g(r) dr + \frac{1}{2a} \int_D \int F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

## 5.8 Exercício Propostos

- (1) Por meio da solução de D'Alembert analise graficamente a propagação de ondas do 1º problema de Cauchy para o caso de

$$f(x) = 1/(1 + 8x^2), \quad g(x) = 0,$$

nos pontos,  $at = 0$ ,  $at = 1/2$ ,  $at = 1$

- (2) Interprete graficamente no plano
- $xt$
- as soluções do PVI:

$$\begin{aligned}u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0 & -\infty < x < \infty, & \quad 0 < t < \infty \\u(x, 0) &= 0 \\u_t(x, 0) &= 1, & -1 < x < 1, & \quad u_t(x, 0) = 0, \quad |x| \geq 1\end{aligned}$$

*Resp:* Regiões  $A$  e  $B$ ,  $u = 0$ ;  $C$ ,  $u = 1/a$ ;  $F$ ,  $u = t$ ;  $D$ ,  $u = (1 + x + at)/(2a)$ ;  $u = (1 - x + at)/(2a)$ .

- (3) Encontre as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad u_{xx} - u_{tt} &= 0 & u(x, 0) = \text{sen } x, & \quad u_t(x, 0) = \cos x \\ \text{(b)} \quad u_{xx} - u_{tt} &= 0 & u(x, 0) = \ln(1 + x^2), & \quad u_t(x, 0) = 0 \\ \text{(c)} \quad u_{xx} - u_{tt} &= 0 & u(x, 0) = x, & \quad u_t(x, 0) = x\end{aligned}$$

- (4) Encontre as soluções dos seguintes problemas .

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad u_{xx} - u_{tt} &= x + 2t, & u(x, 0) = x, & \quad u_t(x, 0) = x \\ \text{(b)} \quad u_{xx} - u_{tt} &= e^x + \text{sen } t, & u(x, 0) = \ln(1 + 2x^2), & \quad u_t(x, 0) = 0 \\ \text{(c)} \quad u_{xx} - u_{tt} &= e^{x+t} + \cos xt, & u(x, 0) = 1 - x^2, & \quad u_t(x, 0) = \sinh x\end{aligned}$$

- (5) Resolva o problema de valor inicial:
- $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$
- com as condições
- $u(x, 0) = \text{sen } x$
- ,
- $u_y(x, 0) = x$
- .

- (6) Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}u_{tt} - 9u_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \notin [1, 2] \end{cases} \\ u_t(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

Determine as regiões do semi-plano  $t > 0$  onde  $u(x, t) = 0$ . Calcule o valor de  $u$  nos pontos  $(3/2, 1/10)$ ,  $(5, 7/6)$ .

*Resp:*  $u = 0$  em  $x + 3t > 2$ ,  $x - 3t > 2$ ;  $x + 3t < 1$ ;  $u(3/2, 1/10) = 1$ ,  $u(5, 7/6) = 1/2$ .

- (7) Considere o problema de Cauchy

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) &= \begin{cases} \text{sen } x & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}\end{aligned}$$

e determine os pontos do semiplano  $t > 0$  onde  $u(x, t) = 0$

*Resp:*  $u = 0$  em  $x + t \geq \pi$ ,  $x - t \leq -\pi$ ;  $x - t \geq -\pi$ ;  $x + t \leq -\pi$ ,  $x = 0$

- (8) Considere o fenômeno de vibração de uma corda descrito por

$$\begin{aligned}u_{tt} &= 4u_{xx} & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \text{sen } 2x & u_t(x, 0) = \cos 2x & -\infty < x < \infty\end{aligned}$$

Calcule o deslocamento e a velocidade no ponto  $x = 0$ , para  $t > 0$ .

*Resp:*  $u(0, t) = \sin(4t)/4$   $u_t(0, t) = \cos 4t$

- (9) Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= xe^{-x^2}, & u_t(x, 0) &= \cos 2x, & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

Calcule  $u(0, t)$  e  $u_t(0, t)$  e compare as respostas obtidas com as do exercício anterior.

*Resp:* É a mesma do exercício anterior.

- (10) A velocidade inicial de uma corda vibrante, sem ação de forças externas, é dada por  $xe^{-x^2}$ . Calcule a posição inicial da corda para que a função  $u(x, t)$ , seja uma onda progressiva, isto é, seja da forma  $F(x - at)$

*Resp:*  $u(x, t) = e^{-(x-at)^2}/2a + c^{te}$

- (11) Os deslocamentos de uma corda infinita em vibração transversal são dados por  $u(x, t) = \cos(x - at)$ . Determine a EDP que rege essas vibrações bem como a posição e a velocidade inicial da corda.

*Resp:*  $u_{tt} = a^2u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = \cos x$ ,  $u_t(x, 0) = -a \sin x$

- (12) Considere a equação

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + du$$

e mostre que a onda harmônica  $e^{i(wt-\beta x)}$  é solução se  $w^2 - a^2\beta^2 + d = 0$

**Nota:** A velocidade de propagação dessa onda é  $v = w/\beta$  e portanto

$$v = \frac{w}{\sqrt{w^2 + d}}a$$

mostra que essa velocidade de fase depende da frequência, a não ser que  $d = 0$  a qual é chamada de *condição de ausência de deformação*. Quando a velocidade da onda harmônica depende da frequência, dizemos que há *dispersão*. Assim se  $d \neq 0$ , um sinal será transmitido **com** deformação posto que temos dispersão. Se  $d = 0$  podemos ter uma onda amortecida porém **sem** deformação.

## Chapter 6

# Equação da Condução do Calor

### FINALIDADE

Tal como na equação da onda a abrangência da equação do calor é restrita e assim torna-se importante conhecer as simplificações efetuadas para saber as reais limitações do modelo, caso contrário, o modelo poderá ser usado indevidamente. Em outras palavras, podemos estar usando um procedimento errado para curar uma doença!

Para "sentir" estas limitações, bem como conhecer o significado físico dos termos equação e das condições auxiliares, será necessário saber como se chegar na equação do calor. A finalidade aqui será obter, sob condições ideais, a equação que governa o fluxo de calor transferido por condução em uma haste ou num fio fino e propiciar condições para que se obtenha modelos menos restritivos.

### 6.1 Princípio da troca de calor e lei de Fourier

Calor é uma forma de energia que é transferida de um corpo para outro devido à diferença entre suas temperaturas. O estudo da equação de condução do calor num corpo sólido teve origem por volta de 1800 com Joseph B. Fourier e para deduzí-la e interpretar as condições auxiliares mais usadas usa-se as seguintes leis da física. Vamos aqui considerar um caso ideal consistindo de uma haste cilíndrica fina de comprimento  $L$  coincidindo com o eixo  $x$  tendo suas extremidade em  $x = 0$  e  $x = L$ .

- **Princípio da troca de calor - Equação da calorimetria**

Quando dois corpos trocam entre si calor, a quantidade de calor cedida por um deles é igual a quantidade recebida pelo outro. A quantidade de calor recebida, ou cedida, durante a troca faz com que o corpo sofra variação de temperatura chama-se *calor sensível*. Neste caso a quantidade de calor  $Q$  necessária para elevar a temperatura  $u$  do corpo de massa  $m$  em  $\Delta u$  unidades é:

$$Q = mc\Delta u \quad (6.1)$$

onde  $c$  é o *calor específico* do material ou seja a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura em uma unidade, uma unidade de massa do material. Esta equação é conhecida como a *equação da calorimetria*.

- **Lei de resfriamento de Newton :**

No interior de um corpo sólido a energia térmica é **transferida por condução** de regiões **mais quentes para as mais frias**. Esta lei, que é empírica, afirma: Se duas placas paralelas de mesma área  $A$  e de temperaturas constantes  $T_1$  e  $T_2$  estiverem separadas por uma distância  $d$ , uma quantidade de calor passará da placa **mais quente para a mais fria**. Além disso, esta quantidade de calor  $Q$ , por unidade de tempo, é dada por:

$$Q = \frac{kA(T_2 - T_1)}{d}, \quad k > 0 \quad (6.2)$$

onde  $k$  é a *condutividade térmica* do material entre as placas.

- **Lei do fluxo de calor - Lei de Fourier**

O *fluxo de calor* ou *densidade de fluxo de calor* é a quantidade de calor por **unidade de área** e por unidade de tempo que atravessa uma seção  $x_0$  da haste na direção **positiva** do eixo do  $x$ . A *lei de Fourier* afirma que este fluxo, cuja dimensão é calorias por  $cm^2$  por *segundo*, é dado por:

$$q(x_0, t) = -ku_x(x_0, t), \quad k > 0 \quad (6.3)$$

### 6.1.1 Interpretação da lei de Fourier

O sinal " $-$ " é interpretado da seguinte forma: se a temperatura  $u$  cresce com  $x$ ,  $u_x$  será positiva, mas como o fluxo  $q$  é negativo o calor fluirá para a esquerda, ou seja, da região mais quente para a mais fria, é o que acontece no ponto A. Se  $u$  decresce com  $x$ ,  $u_x < 0$ , o fluxo é positivo e o calor fluirá para a direita, é o que acontece no ponto B. Uma ilustração é dada na figura a seguir





### COMENTÁRIOS:

- (1) *Caloria* é a quantidade de calor necessária para elevar de 1 grau, de  $14,5^\circ$  a  $15,5^\circ$ , a temperatura de 1 grama de água pura em pressão normal. ( $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ j}$ )
- (2) O calor se propaga do corpo de temperatura mais alta para o de temperatura mais baixa e por se tratar de um **corpo sólido** a propagação do calor na haste é feita por **condução** onde a energia se propaga, porém, as partes do corpo não se deslocam. Outros dois processos são a **convecção**, que é a transferência de calor pela **matéria em movimento** e ocorre nos fluídos onde os materiais são pouco condutores ( $k$  muito pequeno), e a **radiação** que é o processo pelo qual o calor flui quando os mesmos estão separados no espaço ainda que exista vácuo entre eles. Aqui só ocorre transporte de energia, não havendo transporte de matéria.
- (3) A condutibilidade térmica  $k$ , mede como o material conduz calor. Materiais com os **maiores valores** de  $k$  (metais) indicam serem **bons condutores**, e os de pequenos  $k$ , isolantes térmicos. Por exemplo:

$$k(\text{prata}) = 0,99 \quad , \quad k(\text{água}) = 0,0014$$

- (4) *Capacidade Térmica*,  $C$ , é a razão  $C = Q/\Delta T$  onde  $Q$  é a quantidade de calor de um sistema que ocasionou uma mudança de temperatura  $\Delta T$  sem mudança de estado, ela mede numericamente a quantidade de calor produzida por uma variação unitária de temperatura. Por exemplo se  $C = 20 \text{ cal} / ^\circ\text{C}$  significa que a cada  $20 \text{ cal}$  que o corpo recebe, sua temperatura aumenta de  $1^\circ\text{C}$ .

- (5) *Calor específico*  $c$  é a razão  $c = C/m$  onde  $m$  é a massa do corpo e  $C$  a capacidade térmica. Significa numericamente a **quantidade de calor** que propicia uma variação unitária de temperatura em uma unidade de massa do corpo. Depende do estado de agregação (sólido, líquido ou gasoso) e mede a capacidade do material da haste em armazenar calor. De um modo geral os metais apresentam baixo calor específico, e a água, um dos maiores  $c$  (água) = 1,00, enquanto que o ferro é  $c$  (ferro) = 0,11. Assim para elevar a temperatura de 1g de ferro em  $1^\circ C$  devemos fornecer 0,11cal, enquanto que na água este valor será de 1cal exigindo, portanto, mais calor. Por outro lado, quando água baixa sua temperatura de  $1^\circ C$ , fornece muito mais calor que qualquer outro corpo.
- (6) É mais intuitivo referir ao fluxo de calor como se o calor fosse um fluido ou gás o qual se difunde de regiões de **alta concentração** para regiões de **baixa concentração**.
- (7) A **lei de Fourier** adaptada para um corpo sólido condutor térmico de superfície  $S$  é

$$q = -k\nabla u \cdot \vec{n} = -k \frac{\partial u}{\partial n}$$

onde  $\vec{n}$  é o versor normal exterior a essa superfície e  $q$  o fluxo através dela. Observe por esta equação que o fluxo é positivo quando a temperatura  $u$  diminui na direção  $\vec{n}$ , isto é, o calor flui na direção da temperatura decrescente

- (8) No caso da haste unidimensional temos
- a) extremidade  $x = L$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \nabla u \cdot \vec{i};$$

- b) na extremidade  $x = 0$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial (-x)} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

## 6.2 Dedução da Equação do Calor

As principais equações da física matemática descritas por equações parabólicas são: **Condução do calor** em barra ou sólido; **Difusão de concentração** em líquidos ou gás; **Difusão de neutrons** em pilhas atômicas e **Transmissão telegráfica** em cabos de baixa indutância ou capacitância.

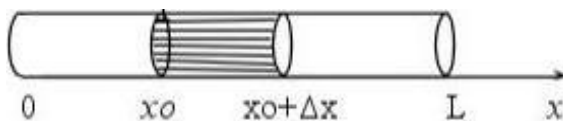
Vamos aqui considerar o caso básico consistindo de uma haste cilíndrica fina de comprimento  $L$  coincidindo com o eixo  $x$  tendo suas extremidade em  $x = 0$  e  $x = L$ , com as seguintes características:

- Haste condutora de calor e homogênea (uniforme), isto é, tem as mesmas propriedades térmicas em cada ponto.

- Haste de **densidade**  $\rho$  e seção transversal de área  $A$ , ambas constantes sendo que a temperatura é **igual** em todos os pontos de uma mesma seção, o que é conseguido tomando-se uma haste suficientemente fina.
- Não tem fontes externas de calor e nenhum calor é gerado no interior da haste.
- O calor específico  $c$  e a condutividade térmica  $k$  do material da haste são constantes.
- Superfície lateral **isolada** termicamente de modo a **não** permitir através dela transferência de calor com o meio, exceto nas extremidades. Assim o calor não "entra" e nem "sai" da haste a não ser através de suas extremidades. Uma forma de se obter este dispositivo seria encapar a haste lateralmente com algum isolante térmico.

A uniformidade do material e o isolamento térmico lateral implicam que o fluxo de calor se dê somente na direção  $x$  e portanto temos um problema unidimensional. Mais precisamente as várias grandezas físicas são constantes em cada seção transversal.

Vamos analisar primeiramente a quantidade de calor armazenada no elemento de **comprimento**  $\Delta x$  entre os pontos  $P_1(x_0)$  e  $P_2(x_0 + \Delta x)$  desta haste.



Pela lei do fluxo de calor a quantidade de calor por **unidade de tempo** que entra no elemento (**da esquerda para a direita**) através de  $P_1$  é:

$$q_1(x_0, t) = -kAu_x(x_0, t)$$

e a quantidade de calor que sai do elemento pela face  $P_2$  é: elemento recebe calor por condução

$$q_2(x_0 + \Delta x, t) = -kAu_x(x_0 + \Delta x, t)$$

Logo quantidade de calor condução que o elemento  $\Delta x$  absorve, por **unidade de tempo**, é

$$q_1(x_0, t) - q_2(x_0 + \Delta x, t) = kAu_x(x_0 + \Delta x, t) - kAu_x(x_0, t)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal da haste. Portanto, a **quantidade total** de calor armazenada nesse elemento **no intervalo de tempo**  $\Delta t$  é dada por:

$$Q = A[ku_x(x_0 + \Delta x, t) - ku_x(x_0, t)] \Delta t \quad (6.4)$$

Por outro lado este calor absorvido pelo elemento é responsável pela elevação de sua temperatura em  $\Delta u$  unidades. Assim pela **equação da calorimetria**, (6.1),

132

desde que a massa do elemento  $\Delta x$  é:

$$m = \rho A \Delta x,$$

temos:

$$Q = (\rho A \Delta x) c \Delta u \quad (6.5)$$

Usando o **princípio da troca de calor**, isto é, igualando as expressões de  $Q$ , segue:

$$A [ku_x(x_0 + \Delta x, t) - ku_x(x_0, t)] \Delta t = \rho c A \Delta u \Delta x \quad (6.6)$$

Dividindo por  $A \Delta x \Delta t$  e fazendo  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.7)$$

Se  $k$  for constante, temos

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (6.8)$$

onde  $\alpha^2 = k / (\rho c)$  é chamada de *difusibilidade térmica* ou *coeficiente de condutividade de temperatura*. Observe que o termo  $u_{xx}$  é o termo responsável pela difusão do calor dentro da haste e que em estado estacionário, quando  $u_t = 0$ ,  $u$  é uma função linear da distância  $x$ .

### COMENTÁRIOS:

- (1) Alguns valores da difusibilidade  $\alpha^2$  são: prata 1,71; cobre 1,41; alumínio 0,86; água 0,00144. A dimensão de  $\alpha^2$  é de  $(\text{comprimento})^2 / \text{tempo}$ .
- (2) Num caso mais geral a equação de condução de calor num corpo sólido é dada por

$$\alpha^2 \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

Para se chegar a esta equação, além das idealizações anteriores, deve-se impor também que o corpo seja isotrópico, isto é, que tenha as mesmas propriedades em todas as direções.

- (3) A **equação do calor** envolve a derivada de 1ª ordem em relação ao tempo, enquanto que a **equação da onda** envolve a derivada de 2ª ordem. e esta "pequena" diferença ocasiona um comportamento totalmente diferente nas suas soluções.

### 6.3 Interpretação da Equação do Calor

Como foi visto a equação básica que descreve a temperatura  $u(x, t)$  dada em  $^{\circ}C$ , que admitiremos por hipótese que seja de classe  $C^2$  na região  $0 < x < L$ ,  $t > 0$ , é dada por

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty$$

sendo:

- $u_t$  - taxa de alteração da temperatura ( $^{\circ}C/segundo$ );
- $u_x$  - inclinação da curva temperatura ( $^{\circ}C/cm$ );
- $u_{xx}$  - concavidade do perfil da temperatura ( $^{\circ}C/cm^2$ )

Vamos interpretar  $u_{xx}$  em termos de  $u_t$ .

Aproximando  $u_{xx}$  pela equação diferença correspondente temos

$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)]$$

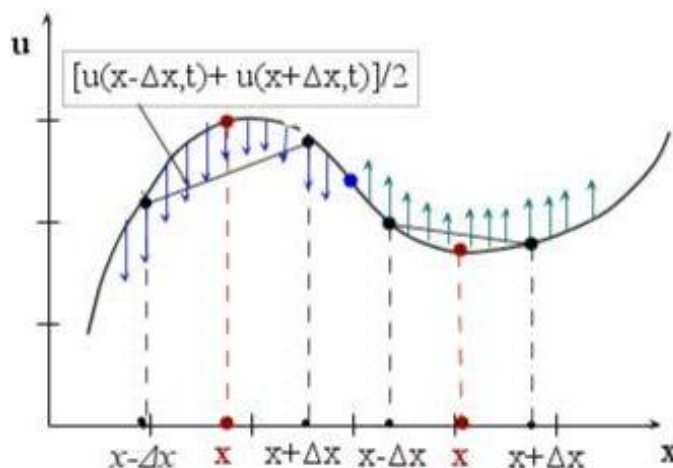
ou equivalentemente

$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right] \quad (6.9)$$

Assim a partir da equação do calor temos :

- Se a temperatura  $u(x, t)$  for **menor** que a **média** de duas temperaturas vizinhas então  $u_{xx}(x, t) > 0$  e portanto  $u_t(x, t) > 0$ ;
- Se a temperatura  $u(x, t)$  for **igual** a **média** de duas temperaturas vizinhas então  $u_{xx} = 0$  e portanto  $u_t = 0$ ; e
- Se a temperatura  $u(x, t)$  for **maior** que a **média** de duas temperaturas vizinhas então  $u_{xx}(x, t) < 0$  e portanto  $u_t(x, t) < 0$ .

Em outras palavras se a temperatura no ponto  $x$  é maior que a média das temperaturas em dois pontos vizinhos  $x - \Delta x$  e  $x + \Delta x$ , então a temperatura em  $x$  será decrescente. O gráfico abaixo ilustra as diversas situações:



Em resumo, para  $t$  fixo, o sinal de  $u_t(x, t)$  é determinado pela concavidade do gráfico de  $u(x, t)$ , pois  $u_t(x, t)$  e  $u_{xx}$  **sempre** tem o mesmo sinal. Assim sob o aspecto geométrico quando a concavidade está para cima, ou seja,  $u_{xx}(x, t) > 0$  pela equação  $u_t(x, t)$  também é positivo, e quando está para baixo,  $u_{xx}(x, t) < 0$ , temos que  $u_t(x, t) < 0$ .

**Exercício** - Uma barra de metal de 10 cm está isolada de modo que o calor pode fluir ao longo da barra mas não ser irradiado para o ar exceto nas extremidades. A temperatura  $u(x, t)$   $^{\circ}C$  a  $x$  cm de uma extremidade e no tempo  $t$  satisfaz a equação do calor

$$u_t(x, t) = 0, 1u_{xx}(x, t)$$

A **temperatura inicial** em vários pontos é dada por:

$x$ (cm)	0	2	4	6	8	10
$u(x, 0)$ ( $^{\circ}C$ )	50	52	56	62	70	80

- a) A temperatura no ponto  $x = 6$  está crescendo ou decrescendo quando  $t = 0$ ?
- b) Avalie a temperatura  $u(6, 1)$ .

**Solução** - a) O gráfico de  $u(x, 0)$  sugere que  $u(x, 0)$  tem concavidade para cima de modo que  $u_{xx}(6, 0) > 0$ . Como  $u_t(6, 0) = 0, 1u_{xx}(6, 0) > 0$ , e portanto  $u_t(6, 0) > 0$ , a temperatura em  $x = 6$  está crescendo. Esta conclusão se baseia na interpretação anterior e no gráfico dos dados desta tabela.

Poderíamos ter chegado a esta mesma conclusão por outro caminho: a temperatura  $62^{\circ}C$  em  $x = 6$  está abaixo da média  $(56 + 70)/2 = 63^{\circ}C$  das temperaturas vizinhas e portanto a concavidade está voltada para cima. Com este raciocínio o que aconteceria se no ponto  $x = 8$  a temperatura fosse alterada para  $66^{\circ}C$ ?

b) Vamos avaliar primeiramente a variação da temperatura em relação ao tempo  $u_t(6, 0)$ . Como  $u_t(6, 0) = 0,1u_{xx}(6, 0)$  devemos determinar então o valor de  $u_{xx}(6, 0)$ , que é a taxa de variação de  $u_x(x, 0)$ , em  $x = 6$ . Assim vamos avaliar  $u_x$  em dois pontos próximos de  $x = 6$ .

$$u_x(5, 0) \simeq [u(6, 0) - u(4, 0)] / (6 - 4) = (62 - 56) / 2 = 3$$

$$u_x(7, 0) \simeq [u(8, 0) - u(6, 0)] / (8 - 6) = 4$$

Portanto:

$$u_{xx}(6, 0) \simeq [u_x(7, 0) - u_x(5, 0)] / (7 - 5) = 0,5$$

Assim

$$u_t(6, 0) = 0,1u_{xx}(6, 0) = (0,1)(0,5) = 0,05^{\circ}C/seg$$

Como a temperatura em  $x = 6$  é  $62^{\circ}C$  e determinamos que a temperatura está crescendo a  $0,05^{\circ}C/seg$ , a temperatura, quando  $t = 1$ , é aproximadamente  $62,05^{\circ}C$ .

#### 6.4 Presença de Fontes de Calor

A equação de condução de calor obtida representa o caso de um problema muito simplificado onde existe **apenas a troca de calor nas extremidades** da haste. Em casos mais gerais, no entanto, é possível existir fontes de calor, externa ou interna e troca de calor na lateral da haste.

Se existir uma fonte de calor com uma intensidade de  $f(x, t)$  calorias por **unidade de volume e por unidade de tempo** e se esta não depende de  $u$  e de suas derivadas, dizemos que  $f$  é uma *fonte densidade* e neste caso a equação é dada por

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t) \quad (6.10)$$

onde:

$$F = \frac{1}{c\rho} f(x, t)$$

sendo que  $\mathbf{F} \geq \mathbf{0}$  significa que temos uma *fonte* e o calor será **adicionado**,  $\mathbf{F} \leq \mathbf{0}$  temos um *poço* e o calor está sendo **retirado**.

Observe que a equação resultante é linear e **não homogênea** e ela surge, por exemplo, quando o calor é devido ao fluxo de uma corrente elétrica num fio., ou quando o calor é provocado por uma reação química.

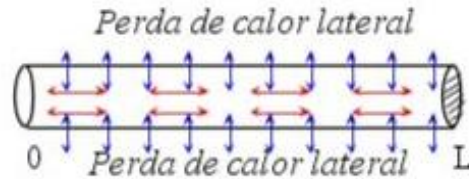
Quando a haste **não** está **isolada mas está em contato com o meio circundante** além da presença de fontes de calor, podemos ter também ganho, ou perda, de calor através da **superfície lateral**. Neste caso uma hipótese razoável, fornecida pela lei de Newton, é admitir que haja perda ou ganho de calor proporcional a diferença entre a temperatura da haste  $u(x, t)$  e a temperatura  $u_0$  do meio, ou seja admitir que a fonte seja do tipo:

$$F_0 = -h(u - u_0) \quad (6.11)$$

onde  $h > 0$  é o *coeficiente de intercâmbio térmico*. Assim a equação do calor torna-se

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - h(u - u_0), \quad h > 0 \quad (6.12)$$

e descreve o fluxo de calor na haste tendo difusão  $\alpha^2 u_{xx}$  e perda (ou ganho) de calor na superfície lateral. Se  $u > u_0$  temos **transferência** de calor da superfície lateral para o meio de temperatura  $u_0$  e dizemos que a equação é chamada de *equação de radiação*, se  $u < u_0$  temos **ganho** de calor. Fisicamente temos algo parecido com a figura abaixo:



Se  $h$  for "muito grande" quando comparado com  $\alpha^2$ , o fluxo de calor ao longo da haste será pequeno em relação ao fluxo de calor na lateral e teremos a equação aproximada:

$$u_t = -h(u - u_0) \quad (6.13)$$

Se já existe uma fonte de intensidade  $F_1(x, t)$  a equação resultante torna-se:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - hu + f(x, t) \quad h > 0 \quad (6.14)$$

onde

$$f(x, t) = hu_0 + F_1(x, t)$$

A intensidade da fonte pode depender da própria função  $u$  e o caso **linear** que aparece com maior frequência é quando esta for **proporcional** à temperatura, ou seja, quando

$$F(x, t, u) = r(x, t)u(x, t) \quad (6.15)$$



no que resulta numa equação linear homogênea. É lógico que podemos ter uma combinação de fontes como em

$$F(x, t, u) = ru + f_1(x, t) \quad (6.16)$$

e a equação resultante é linear e não homogênea.

### COMENTÁRIOS:

- (1) Num caso mais geral,  $k$ ,  $c$  e  $\rho$  dependem da própria temperatura e neste caso temos uma equação não linear. No entanto se a variação de temperatura não for tão grande podemos admitir que estes parâmetros não dependem de  $u$ .
- (2) Dependendo do problema a temperatura  $u_0$  do meio pode ser variável.
- (3) Num caso mais geral se a haste for de seção transversal constante  $A$  e de material **não homogêneo**, sendo  $k$ ,  $c$  e  $\rho$  funções contínuas de  $x$ , a equação da condução do calor com fonte  $F(x, t, u)$ , torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} [k(x) \frac{\partial u}{\partial x}] + F(x, t, u) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.17)$$

Esta equação é chamada de equação de *condução do calor generalizada*

## 6.5 Condições Auxiliares numa Haste

Além da EDP que governa o fluxo de calor é importante conhecer a **condição inicial**, que descreve o fenômeno físico no início da experiência, e também as condições nas **extremidades da haste**. pois como estas **não** estão isoladas termicamente pode haver **entrada ou saída** de calor o que certamente influenciará o valor de  $u(x, t)$  no interior da haste. Assim em problemas de condução do calor geralmente temos **duas condições de contorno**, que descrevem como as extremidades da haste trocam calor com o meio, e **uma condição inicial** que prescreve a sua temperatura em algum tempo inicial.

### 6.5.1 Condições Iniciais

Em problemas de condução de calor numa haste usualmente deve-se conhecer da distribuição de temperatura num instante inicial, digamos  $t = 0$ . Assim a função:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

deve ser conhecida. Uma vez dada **não** podemos prescrever arbitrariamente o valor de  $u_t(x, 0)$ . Isto porque, desde que a equação do calor é

$$u_t(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

válida em  $0 < x < L$ ,  $t > 0$ , para  $t = 0^+$ , torna-se

$$u_t(x, 0^+) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, 0^+)}{\partial x^2} + F(x, 0^+)$$

Admitindo-se continuidade de  $u$  e de suas derivadas, além da função  $F$ , como o 2º membro é conhecido pois  $u(x, 0) = f(x)$ , temos que  $u_t(x, 0)$  é determinada por meio de  $f$  e assim **não** se deve prescrever  $u_t(x, 0)$  de modo arbitrário.

### 6.5.2 Condições de Contorno

Elas podem ser de vários tipos e para estudá-las vamos admitir que a haste seja ideal, ou seja, delgada, homogênea de mesma seção transversal, isolada termicamente na lateral e localizada no eixo  $x$  entre  $x = 0$  e  $x = L$ .

**1 - Temperatura especificada nas extremidades - Condições de contorno de Dirichlet ou de 1ª espécie**

Neste caso admitimos que as temperaturas nas extremidades da haste sejam pré-fixadas, ou seja,  $u(0, t) = g_1(t)$ ,  $u(L, t) = g_2(t)$ , conhecidas. Essas temperaturas podem ser conseguidas por meio de um termostato colocado nestas extremidades.

**Curiosidade:** O objetivo final de um problema nem sempre é o de encontrar a solução final  $u$  a partir das temperaturas  $g_1$  e  $g_2$ , conhecidas no contorno. Em siderúrgicas, por exemplo, é frequentemente necessário determinar as condições de contorno para que a temperatura do material dentro do forno tenha uma certa temperatura conhecida!

**2 - Contorno isolado**

Como a lei de Fourier para o fluxo de calor

$$q(x_0, t) = -ku_x(x_0, t)$$

é válida para toda seção transversal se nas extremidades não há passagem de calor o fluxo de calor é **nulo** e temos a condição de isolamento

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0$$

Assim *condições de contorno isoladas, ou perfeitamente refletoras*, são aquelas que não permitem fluxo e portanto a **derivada normal** é igual a zero no contorno.

**3 - Transferência de calor nas extremidades**

Em vez de definir as temperaturas nas extremidades da haste como sendo  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$ , podemos colocar estas extremidades em contato com um meio que tenha essas temperaturas. Supomos por exemplo que a extremidade  $x = 0$  está num reservatório com líquido na temperatura  $g_1(t)$  e a extremidade  $x = L$  está num outro com temperatura  $g_2(t)$ . Neste caso os meios têm condutividades térmicas diferentes,  $k_1$  e  $k_2$ , e o fluxo de calor irá do mais quente para o mais frio.



Neste tipo de condição de contorno não podemos afirmar que as temperaturas nas extremidades da haste serão as mesmas que a dos líquidos, mesmo porque estas extremidades podem estar oxidadas, com graxa, etc. Pela lei de resfriamento de Newton o fluxo de calor é proporcional a diferença entre as temperaturas, da haste e a do líquido, ou seja

$$\text{Fluxo de calor exterior (em } x = 0) = h [u(0, t) - g_1(t)], \quad h > 0$$

$$\text{Fluxo de calor exterior (em } x = L) = h [u(L, t) - g_2(t)], \quad h > 0$$

onde  $h$  é o *coeficiente de troca de calor* ou *emissividade* e o fluxo de calor (exterior) para fora é o número de calorías atravessando as extremidades da haste por segundo. Note que o fluxo exterior de calor será positivo em cada extremidade desde que a temperatura da haste é maior que a do meio. Vamos associar este fluxo com a lei de Fourier .

Em  $x = 0$  o fluxo de calor da **esquerda para a direita** é dado por  $-ku_x(0, t)$ . Deste modo o fluxo de calor para o exterior da barra, ou seja da direita para a esquerda é  $ku_x(0, t)$ . Em  $x = L$  o fluxo de calor para o exterior, ou seja da **esquerda para a direita** é  $-ku_x(L, t)$ . Assim fazendo  $\lambda = -h/k$ , temos as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \lambda [u(0, t) - g_1(t)] \\ u_x(L, t) &= -\lambda [u(L, t) - g_2(t)] \end{aligned} \quad (6.18)$$

Se as extremidades estão em contato com o meio ambiente de temperatura  $u_0$  estas condições resultam em:

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \lambda [u(0, t) - u_0] \\ u_x(L, t) &= -\lambda [u(L, t) - u_0] \end{aligned}$$

Quando  $g_1(t) = g_2(t) = 0$  temos:

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \lambda u(0, t) & t > 0 \\ u_x(L, t) &= -\lambda u(L, t) & t > 0 \end{aligned}$$

e o fluxo de calor através dos extremos é proporcional à temperatura. Estas condições são chamadas de *condições de radiação*.

Observe que  $h = 0$  corresponde o caso quando o contorno está isolado

**Exercício** - Formule o problema matemático para uma haste de cobre de 200 cm de comprimento,  $0 < x < 200$ , isolada lateralmente sabendo-se que :

- a) a temperatura inicial é  $0^{\circ}C$ ;
- b) a extremidade em  $x = 0$  está isolada e em  $x = 200$  está imersa em água mantida a temperatura constante de  $20^{\circ}C$ .

**Solução:** O modelo matemático para este problema é:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < 200 & , \quad 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= 0^{\circ}C & 0 < x < 200 \\ u_x(0, t) &= 0, & 0 < t < \infty \\ u_x(200, t) &= -\frac{h}{k} [u(200, t) - 20], & 0 < t < \infty \end{aligned}$$

**Exercício** - Uma barra delgada com difusibilidade  $\alpha^2$  tem suas extremidade  $x = 0$  e  $x = L$  no eixo  $x$ . Sua superfície lateral é isolada de modo que o calor não penetra e nem sai dela. Estabeleça o PVIC nos seguintes casos, onde a temperatura inicial é  $f(x)$  :

- a) As extremidades são mantidas à temperatura **zero** grau.
- b) Em  $x = 0$  a temperatura é mantida a zero grau e a haste é isolada termicamente na extremidade  $x = L$ .

**Solução** - Trata-se de um problema de condução de calor unidimensional onde a temperatura será denotada por  $u(x, t)$ . A equação do calor, para este caso é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

onde a temperatura inicial é

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L$$

- a) Como as extremidades são mantidas à temperatura zero, temos:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Por consideração física, a temperatura deve ser limitada logo:

$$|u(x, t)| < M, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Um problema equivalente a este é o de uma parede infinita de material condutor limitada pelos planos  $x = 0$  e  $x = L$ , onde os planos são mantidos à temperatura zero e a distribuição de temperatura é dada inicialmente por  $f(x)$ .

b) Se a extremidade  $x = L$  está isolada, então o fluxo de calor em  $x = L$  é zero e portanto

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{ou} \quad u_x(L, t) = 0$$

### COMENTÁRIOS

- (1) O coeficiente de troca de calor  $h$  ou **emissividade**, depende da natureza da interface e geralmente é obtido por meio de experiências. Mede quantas calorías flui através das extremidades por unidade da diferença de temperatura por segundo e por cm.
- (2) Observe que a condição de contorno

$$u_x(0, t) = \lambda [u(0, t) - g_1(t)]$$

não exige que a temperatura no contorno seja  $g_1(t)$ . No entanto quando o coeficiente de troca de calor  $h$  for "grande", então esta condição essencialmente afirma que a temperatura no contorno  $u(0, t)$  é aproximadamente igual a  $g_1(t)$ , ou seja, corresponde a um extremo mantido a uma dada temperatura.

- (3) Em alguns modelos matemáticos da equação do calor numa haste delgada de comprimento **suficientemente "grande"**, tal como ocorre na equação da onda, o efeito nas extremidades podem ser desprezados e nestes caso não teremos condições de contorno, mas apenas a condição inicial.

## 6.6 Problemas em Estado Estacionário

Uma distribuição de temperatura  $u$  é *estacionária*, ou está em *equilíbrio*, quando a temperatura for independente do tempo, ou seja,  $\partial u / \partial t = 0$ .

Para ilustrar considere o problema com fonte de calor  $f(x, t) = \text{sen}(\pi x)$

$$\begin{array}{ll} \text{EDP} & u_t = u_{xx} + \text{sen}(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \\ \text{CC} & u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < \infty \\ \text{Ci} & u(x, 0) = \text{sen}(3\pi x), \quad 0 < x < 1 \end{array}$$

Para encontrar a solução  $u(x, \infty)$ , se ela existe, tomamos  $u_t = 0$  e resolvemos o problema de contorno:

$$\begin{array}{ll} u_{xx} = -\text{sen}(\pi x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}$$

cuja solução é:

$$u(x, \infty) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x)$$

Assim a temperatura, que inicialmente era  $\text{sen}(3\pi x)$ , na medida em que o tempo aumenta, gradualmente se aproxima de

$$\frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x)$$

## 6.7 Equação de difusão

Sob certas condições a equação do calor também modela problemas envolvendo *difusão*, que é o processo de uma substância se misturar a outra devido ao movimento molecular. A difusão acontece, por exemplo, quando as moléculas de um gás ou líquido move entre as moléculas de uma substância que está sendo penetrada. Muito embora estes casos são os mais comuns temos também a difusão de gás e líquidos através de sólidos, difusão de neutrons, etc. Eis alguns exemplos:

- Se uma garrafa de amônia é aberta em um canto de uma sala fechada, depois de algum tempo o odor será sentido em todas as partes da sala, mesmo não tendo corrente de ar. As moléculas de amônia alcançam o observador pelo seu próprio movimento, passando entre as moléculas de ar e ocasionando colisões.
- Colocando água em uma jarra contendo cristais de sulfato de cobre, estes se dissolvem e a cor azul aparecerá primeiramente no fundo e depois de um certo tempo o líquido estará colorido. Desde que a solução mais densa está no fundo não ocorre aqui o processo de convecção mas sim o de difusão.
- Se colocarmos uma colher de açúcar cristal em uma xícara de chá, e não mexermos, demorará possivelmente horas até que o chá se torne uniformemente açucarado. Se mexermos com uma colher podemos conseguir o resultado num instante.
- Disseminação de epidemia numa região.
- Concentração de um poluente levado pela correnteza de um rio com velocidade  $v$ .

De modo semelhante ao problema do calor haverá difusão de uma substância de local de maior para o de menor concentração e o processo de difusão pode ser descrito mediante a função  $\mathbf{u}(x, t)$  que representa a **concentração** na seção  $x$  no instante  $t$ .

Admitindo um tubo de seção constante  $A$  onde a concentração do gás, ou de uma solução, é igual em cada ponto  $x$ , a equação de difusão é semelhante a equação de condução de calor e dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = C \frac{\partial u}{\partial t}$$

onde  $D$  é o *coeficiente de difusão* e  $C$  o de *porosidade*.

Nesta análise não levou-se em conta fontes externas ou internas e nem a difusão através das paredes do tubo. Com estas suposições teríamos equações similares as

já obtidas pela equação do calor. Por exemplo numa reação química a concentração  $u$  de uma solução pode ser dada por:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \beta (u - u_0)$$

ou seja a razão de alteração  $u_t$  da substância é devida a difusão  $a^2 u_{xx}$  (na direção  $x$ ) e ao fato da substância estar sendo criada,  $u > u_0$ , ou destruída,  $u < u_0$ , por uma reação química que é suposta proporcional a diferença entre as duas concentrações  $u$  e  $u_0$ .

Em problemas de difusão podemos ter movimento do meio, o que faz **diminuir a concentração**. Neste caso a equação que governa tal fenômeno é a equação de difusão-convecção dada por

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

onde  $v$  é a velocidade do meio (ver ref.[1]). Em outras palavras a taxa de variação da concentração da substância  $u_t$  é composta de duas parcelas:  $\alpha^2 u_{xx}$  é a contribuição da adifusão, e  $-v u_x$  é a influência da convecção.

Uma vez deduzida a equação do calor, ou da difusão, cabe a seguinte pergunta: como se faz para resolver problemas envolvendo tais equações?

O método das características usado anteriormente nas equações hiperbólicas (equação da onda) **não** se aplica pois nas equações parabólicas (equação do calor) existe apenas **uma** família de curvas características. No próximo capítulo começaremos a desenvolver um método que, aliado a Série de Fourier, permitirá resolver uma classe importante de problemas deste tipo.

## 6.8 RESUMO

A quantidade de calor por unidade de área por unidade de tempo que atravessa uma seção  $x_0$  de uma haste ideal condutora de calor (fluxo de calor) na direção positiva do eixo  $x$  é dada por:

$$q(x_0, t) = -k u_x(x_0, t) \quad , \quad k > 0$$

sendo  $u$  a temperatura e  $k$  a condutividade térmica.

O calor flui de regiões mais quentes para as mais frias e a temperatura no ponto  $x$  e no tempo  $t$  obedece a seguinte equação:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + F_0 + f(x, t)$$

onde

- $u$  - temperatura da haste
- $\alpha^2 = k/\rho c$  - difusibilidade térmica
- $\alpha^2 u_{xx}$  - difusão do calor
- $u_t$  - taxa de alteração da temperatura

$f(x, t)$  - fonte de calor ( $f > 0$  calor será adicionado,  $f < 0$  o calor será subtraído)

$F_0 \equiv h(u - u_0)$  - ganho (ou perda) de calor através da superfície lateral onde  $u$  é a temperatura da haste,  $u_0$  é a temperatura do meio e  $h > 0$  é o coeficiente de intercâmbio térmico. Se  $u > u_0$  temos perda de calor e dizemos que a equação é de radiação. Se  $u < u_0$  temos ganho de calor. Se  $h = 0$  a haste está lateralmente isolada.

No caso da haste finita  $0 \leq x \leq L$  as condições de contorno mais usadas são:

a) temperatura especificada nas extremidades:

$$u(0, t) = g_1(t) \quad u(L, t) = g_2(t)$$

b) transferência de calor nas extremidades:

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \lambda[u(0, t) - g_1(t)] \\ u_x(L, t) &= -\lambda[u(L, t) - g_2(t)] \end{aligned}$$

onde a extremidade  $x = 0$  está em contato com um meio a temperatura  $g_1(t)$  e a extremidade  $x = L$  em contato com um meio a temperatura  $g_2(t)$ , sendo  $\lambda \equiv h/k$ .

Dois casos particulares merecem destaque:

1) Extremidades termicamente isoladas

O fluxo em  $x = 0$  e  $x = L$  é nulo, ou seja

$$u_x(0, t) = 0 \quad , \quad u_x(L, t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty$$

o que equivale a  $h = 0$ .

2) Condição de radiação

Ocorre quando  $g_1(t) = g_2(t) = 0$ , fornecendo

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \lambda u(0, t) \quad , \quad t > 0 \\ u_x(L, t) &= -\lambda u(L, t) \quad , \quad t > 0 \end{aligned}$$

O processo de uma substância de se misturar a outra devido ao movimento molecular é chamado de difusão e a equação no caso ideal da concentração de um gás, ou de uma solução, em um tubo de seção constante, sem fontes e nem difusão através das paredes do tubo, é igual a equação do calor:

## 6.9 Exercícios Propostos

(1) Supomos uma haste metálica tem perda de calor na superfície lateral segundo a equação:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u \quad , \quad 0 < x < 1$$

tal que  $u(0, t) = 1$  e  $u(1, t) = 1$ . Encontre a temperatura em estado estacionário da haste.



- (2) Dê uma interpretação para o PVIC abaixo?

$$\text{EDP} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{CC} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 1 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{CI} \quad u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

- (3) Dê uma interpretação física ao problema

$$\text{EDP} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{CC} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{CI} \quad u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

- (4) Encontre a temperatura de equilíbrio em uma haste ideal quando:

- (a) A extremidade  $x = 0$  é mantida na temperatura 0 e  $x = L$  é mantida na temperatura  $T$ .
- (b) A extremidade  $x = 0$  é isolada e a extremidade  $x = L$  é mantida na temperatura  $T$ .

- (5) Considere o problema de encontrar a temperatura em equilíbrio em um haste uniforme quando o fluxo em
- $x = 0$
- é
- $F$
- e o fluxo em
- $x = L$
- é
- $G$
- . Explique porque este problema nem sempre tem solução.

- (6) Supomos que uma haste tem uma fonte de calor interna e que a equação que descreve o fluxo de calor interno é

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad 0 < x < 1$$

Supomos fixas as temperaturas no contorno:  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$ . Qual é a temperatura em estado estacionário na haste? Em outras palavras a temperatura  $u(x, t)$  converge para uma temperatura  $U(x)$  independente do tempo?

- (7) Supomos uma haste metálica de comprimento
- $L$
- lateralmente isolada tendo uma temperatura inicial de
- $20^\circ C$
- . Sabendo-se que para
- $t > 0$
- , em
- $x = 0$
- a temperatura é fixa e igual
- $50^\circ C$
- e o resto da haste está imerso em um líquido de temperatura de
- $30^\circ C$
- , qual é o PVIC que descreve este problema?

- (8) Encontre o modelo matemático para a distribuição de temperatura em uma haste de comprimento
- $\pi$
- , sabendo-se que:

- (a) As extremidades  $x = 0$  e  $x = \pi$  estão isoladas
- (b) A distribuição inicial de temperatura é  $f(x)$

- (c) Está sendo gerado na haste calor na razão de
- $g(x, t)$
- por unidade de tempo.

*Resp:*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + g(x, t) & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 < x < \pi \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{aligned}$$

- (9) Considere a EDP

$$au_{xx} - bu_t + cu = 0$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes. Simplifique essa equação e dê uma interpretação física.

- (10) Ache a temperatura em estado estacionário numa barra isolada no extremo  $x = 0$  e mantida à temperatura constante  $0^\circ C$  no extremo  $x = L$ .
- (11) Qual é a interpretação física do seguinte PVIC dentro do quadrado  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ :

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u_y(x, 0) - h[u(x, 0) - 2] &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(x, 1) &= 1, \quad 0 < x < 1 \\ u_x(0, y) &= u_x(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

- (12) Desenvolva em série de Taylor
- $u(x + \Delta x)$
- e
- $u(x - \Delta x)$
- em torno de
- $x$
- , e ao somar mostre que

$$u_{xx} \simeq \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)]$$

- (13) Uma haste com condições físicas ideais e de comprimento
- $L$
- que está no eixo
- $x$
- no intervalo
- $[0, L]$
- . Se a temperatura inicial é
- $f(x)$
- , isto é,
- $u(x, 0) = f(x)$
- ,
- $0 < x < L$
- , modele os problemas abaixo fornecendo a EDP e as condições de contorno para a temperatura
- $u(x, t)$
- :

- (a) Extremidade esquerda mantida à temperatura zero e a da direita está isolada.

$$\begin{aligned} \text{Resp: } a^2 u_{xx} &= u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

- (b) A extremidade esquerda é mantida à temperatura de
- $100^\circ$
- e há transferência de calor na extremidade direita para um meio envolvente à temperatura zero.

$$\begin{aligned} \text{Resp: } a^2 u_{xx} &= u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 100, \quad u_x(L, t) = -hu(L, t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

- (c) Existe transferência de calor na extremidade esquerda para o meio envolvente à temperatura de
- $20^\circ$
- e a extremidade direita está isolada.

- (d) A extremidade esquerda está a uma temperatura  $\sin(\pi t/L)$ , a extremidade direita é mantida em *zero* e existe transferência de calor a partir da superfície lateral da haste para o meio circundante à temperatura zero.

$$\text{Resp: } a^2 u_{xx} - hu = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad h = c^{te}$$

$$u(0, t) = \sin(\pi t/L), \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

- (e) As extremidades estão isoladas e há transferência de calor na superfície lateral da haste para o meio circundante mantido a uma temperatura de  $50^\circ$ .

- (14) Uma placa retangular fina coincide com a região no plano  $xy$  definida por  $0 \leq x \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . A extremidade esquerda e a base estão isoladas. A parte de cima é mantida à temperatura zero e a extremidade direita da placa é mantida à temperatura  $f(y)$ . Modele este problema de contorno sabendo-se que a temperatura  $u(x, t)$  está em regime permanente, isto é,  $u_t(x, t)$

$$\text{Resp: } u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < t < 2;$$

- (a)  $u_x(0, y) = 0, \quad u(4, y) = f(y), \quad 0 < y < 2;$   
 $u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 4$

- (15) A temperatura numa placa bidimensional é descrita pela EDP

$$u_t = A(u_{xx} + u_{yy})$$

onde  $x$  e  $y$  são as variáveis de posição e  $t$  é o tempo. Determine a relação sobre  $a$ ,  $b$  e  $c$  tal que

$$u(x, y, t) = e^{-at} \sin(bx) \sin(cy)$$

satisfaça a EDP.

$$\text{Resp: } a = A(b^2 + c^2), \quad a > 0$$



## Chapter 7

# Método de Separação de Variáveis

**Finalidade** - Nem sempre é possível obter a **solução geral** de uma EDPL e, quando for, frequentemente não é útil. Neste capítulo será introduzida uma das mais importantes técnicas de resolução de problemas envolvendo EDP que embora **não** sendo geral permitirá obter um tipo importante de **solução particular**. Trata-se do método de separação de variáveis, que aliado a série de Fourier, permitirá resolver uma classe importante de problemas da Física Matemática. Este método, que não pode ser aplicado indistintamente, consiste essencialmente em transformar uma **EDP** linear e homogênea em tantas **EDOs** quantas forem o número de variáveis. Uma vez resolvidas, para se determinar a solução do problema usa-se uma combinação adequada de soluções de forma a satisfazer as condições impostas.

### 7.1 Separação de Variáveis na Resolução da EDP

Antes de descrever o método será apresentado um exemplo ilustrativo. Considere a EDPL homogênea:

$$3u_x - 2u_y = 0$$

Será que esta equação admite uma solução do tipo abaixo?

$$u(x, y) = e^{rx} e^{sy}$$

Para responder a esta pergunta substituímos esta expressão na equação dada, no que implica

$$(3r - 2s) e^{rx+sy} = 0$$

Assim para satisfazer a equação deve-se ter  $r = 2s/3$ , e portanto existe **sim** uma **solução particular** do tipo proposto e esta é da forma

$$u(x, y) = e^{2sx/3} e^{sy},$$

onde  $s$  pode ser qualquer número (real ou complexo). Note que a solução particular obtida é o **produto** de **duas** funções, uma dependendo **apenas** de  $x$  e a outra

150

**apenas** de  $y$ .

Diante deste fato que tal adotar a idéia de procurar uma solução particular como sendo o produto das funções  $X(x)$  e  $Y(y)$ , isto é, como

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

onde  $X$  depende **apenas** de  $x$  e  $Y$  **apenas** de  $y$ ?

Vamos fazer esta tentativa na mesma equação anterior.

**Exercício** - Considere a EDP homogênea

$$3u_x - 2u_y = 0$$

Determine uma solução particular da forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

**Solução** - Substituindo  $u = XY$  na EDP segue que

$$3X'Y - 2XY' = 0$$

Para valores de  $x, y$  para os quais  $X(x) \neq 0$ ,  $Y(y) \neq 0$ , esta expressão pode ser escrita como

$$\frac{3X'}{X} = \frac{2Y'}{Y}$$

Note que o membro da **esquerda não depende de  $y$**  e o da **direita não depende de  $x$** , e assim se for feita a derivada dessa expressão em relação a  $x$ , ou a  $y$ , ela será nula. Logo o valor comum é uma **constante**, digamos  $\lambda$ .

$$\frac{3X'}{X} = \frac{2Y'}{Y} = \lambda,$$

e como consequência tem-se duas EDOs:

$$3X' - \lambda X = 0$$

$$2Y' - \lambda Y = 0$$

Resolvendo estas equações encontramos as soluções

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x/3}$$

$$Y(y) = c_2 e^{\lambda y/2}$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias e  $\lambda$  um parâmetro. Fazendo  $c_1 c_2 = 1$ ,  $\lambda = 2s$ , segue a solução:

$$u(x, y) = e^{2xs/3} e^{ys},$$

que é a mesma já encontrada. Note que esta **não** é a solução geral! ◀

O procedimento usado para resolver a equação anterior fornece a essência do método.. Assim numa EDP linear homogênea

$$Lu(x, y) = 0$$

admitimos uma solução particular como sendo o produto:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

onde  $X$  depende **apenas de  $x$**  e  $Y$  **apenas de  $y$** . Teremos êxito com o método se após substituirmos esta expressão na EDP conseguirmos **separar** as variáveis de forma que de um lado do sinal de igual a expressão depende apenas de uma variável independente enquanto que do outro lado, da outra variável. Assim ambos os lados são iguais a um parâmetro e como consequência temos duas EDOs, que resolvidas fornecem as expressões de  $X(x)$  e  $Y(y)$ .

Neste estágio determina-se apenas **formalmente** uma solução particular, sem que a validade não pode ser estabelecida antes de uma investigação mais detalhada. Afirmamos simplesmente que se existe uma solução  $u = X(x)Y(y)$  ela será da forma apresentada.

De princípio o método de separação de variáveis pode também ser aplicado em equações de qualquer ordem com mais de duas variáveis independentes. O sucesso depende sobretudo da própria equação. O exercício a seguir ilustra este caso.

**Exercício** - Determine uma solução particular da equação de primeira ordem

$$u_x - u_y + 2u_z = 0$$

da forma

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

**Solução** - Fazendo na equação  $u = XYZ$  e após dividirmos por  $XYZ$ , obtém-se

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} - \frac{2Z'}{Z}$$

Desde que o lado esquerdo é função apenas de  $x$  e o direito das demais variáveis, ambos devem ser iguais a uma constante, digamos  $\lambda$ . Assim:

$$\begin{aligned} X'/X &= \lambda \\ Y'/Y - 2Z'/Z &= \lambda \end{aligned}$$

No entanto esta última equação pode ser escrita como:

$$\frac{Y'}{Y} = \lambda + \frac{2Z'}{Z}$$

onde o lado esquerdo não depende de  $z$  e o direito não depende de  $y$ . Logo ambos devem ser iguais a uma outra constante, digamos  $s$ , e portanto tem-se três EDOs

$$\begin{aligned} X' &= \lambda X \\ Y' &= sY \\ Z' &= \frac{s - \lambda}{2} Z \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações ordinárias e multiplicando as suas soluções, encontramos uma família de soluções da EDP que, a menos de uma constante multiplicativa, dependerá de dois parâmetros:

$$u(x, y, z; \lambda, s) = e^{\lambda x} e^{s y} e^{(s-\lambda)z/2} \quad \blacktriangleleft$$

### COMENTÁRIOS

- (1) A exigência da equação ser **linear e homogênea** nem sempre garante o êxito da técnica utilizada. Existem equações que mesmo sendo de coeficientes constantes **não** são separáveis, por exemplo:

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$$

- (2) Geralmente este procedimento não é bem sucedido quando a equação contém o termo misto  $u_{xy}$ . Por isto recomenda-se, primeiramente, reduzir a equação a uma forma canônica conveniente, e se possível, simplificar os termos de 1ª. ordem.
- (3) A **separação** de variáveis **depende do sistema** de coordenadas utilizado. Não existe um modo de prever quando existirá a separação a não ser testando a equação individualmente. Por exemplo,

$$\nabla^2 u + (x^2 + y^2)^2 u = 0, \quad u = u(x, y)$$

**não** é separável, porém quando escrita em coordenadas polares ela se **torna** separável!

- (4) Alguns autores, tal como o da referência [2] separa as variáveis de uma forma mais abrangente permitindo que toda equação homogênea de coeficientes constantes seja separável. Por uniformização de nomenclatura **não** será adotado esta forma, mesmo porque ela nem sempre conduz a uma EDO de Sturm-Liouville, que é peça chave na resolução de problemas da Física Matemática.

## 7.2 Separação de Variáveis na Resolução de PVIC

Foi descrito anteriormente como achar uma solução particular de uma EDP por meio do método de separação de variáveis. Este método também é importante na resolução de problemas envolvendo EDP com **condições auxiliares**. O exercício a seguir ilustra as etapas desta resolução.



**Exercício** - Resolva o seguinte problema de valor inicial e de contorno (PVIC) envolvendo a equação do calor

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) &= 5 \operatorname{sen} \pi x - 3 \operatorname{sen} (3\pi x) \\ |u(x, t)| &< M & \text{(solução limitada)} \end{aligned}$$

**Solução** - Vamos apresentar a solução em 3 etapas:

**Primeira Etapa** - Separar as variáveis na EDP.

Nesta etapa devemos, se possível, separar as variáveis da EDP e resolver as EDOs obtidas em tal procedimento. Para tal admitimos uma solução particular do tipo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  que satisfaça a EDP. Substituindo  $u = XT$  na equação e após dividirmos por  $\alpha^2 XT$ , obtem-se:

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Desde que o lado esquerdo depende apenas de  $t$ , e o direito, apenas de  $x$ , ambos devem ser iguais a uma constante, digamos  $\lambda$ . Assim temos duas EDOs:

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ T' - \lambda \alpha^2 T &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação em  $T$  temos

$$T(t) = c_1 e^{\lambda \alpha^2 t},$$

e como a solução  $u(x, t)$  deve ser **limitada**, o parâmetro  $\lambda$  deve ser **não positivo**, assim tomamos  $\lambda$  como sendo,  $\lambda = -s^2$ , onde  $s$  é real. Logo para  $X$  temos a seguinte equação EDO:

$$X'' + s^2 X = 0$$

Desde que a solução geral para  $X$  é a função

$$X(x) = A_1 \cos sx + B_1 \operatorname{sen} sx$$

uma **solução particular** da EDP dada é:

$$u(x, t) = X(x)T(t) = e^{-s^2 \alpha^2 t} [A \cos sx + B \operatorname{sen} sx],$$

onde fizemos  $c_1 A_1 \equiv A$ ,  $c_1 B_1 \equiv B$ .

**Segunda Etapa** - Incluir na solução as condições de contorno.

Como as condições de contorno impoem que

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(1, t) = X(1)T(t) = 0,$$

154

e sendo  $T(t) \neq 0$ , pois caso contrário teríamos apenas a solução trivial, segue que

$$X(0) = X(1) = 0$$

Note nesta etapa que o processo de separação de variáveis será útil se as condições de contorno impostas pelo problema forem **homogêneas**. Se tal não ocorrer teríamos algo do tipo

$$u(0, t) = X(0)T(t) \neq 0$$

e o valor de  $X(0)$  seria indeterminado!

A partir da família de soluções encontrada deve-se determinar qual a que satisfaz as condições exigidas.

Como  $u(0, t) = 0$ , pela expressão de  $u(x, t)$  obtida, temos:

$$Ae^{-s^2\alpha^2 t} = 0$$

e portanto  $A$  deve ser nula,  $A = 0$ . Logo a expressão para  $u(x, t)$  resulta em

$$u(x, t) = Be^{-s^2\alpha^2 t} \text{sen } sx$$

Por outro lado, desde que  $u(1, t) = 0$ , a expressão anterior fornece

$$Be^{-s^2\alpha^2 t} \text{sen } s = 0$$

Se a constante  $B$  também fosse nulo, uma vez que  $A = 0$ , teríamos apenas a solução **identicamente nula**, o que não convém. Logo será admitido que  $B \neq 0$ , o que implica em

$$\text{sen } s = 0,$$

e portanto

$$s = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Observe que excluímos  $m = 0 = s$ , pois este valor conduzirá a solução trivial. Assim para cada  $m$  inteiro não nulo, toda função do tipo

$$u(x, t) = B_m e^{-m^2\pi^2\alpha^2 t} \text{sen}(m\pi x)$$

**satisfaz** tanto a **EDP** como as **condições de contorno** do problema.

Note nesta etapa que as condições de contorno impoem que para termos solução não trivial é preciso que os valores admissíveis da constante de separação de variáveis forme um conjunto infinito, porém **discreto**.

**Terceira Etapa** - Incluir na solução a condição inicial.

A partir da família de soluções encontrada deve-se determinar a solução que satisfaça a **condição inicial**.

Desde que a equação e as condições de contorno são **homogêneas** para achar a solução que satisfaz a condição inicial aplicamos o princípio de superposição. Inspirado na condição inicial dada admitiremos o seguinte tipo de solução

$$u(x, t) = B_1 e^{-m_1^2 \pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(m_1 \pi x) + B_2 e^{-m_2^2 \pi^2 t} \text{sen}(m_2 \pi x)$$

uma vez que para cada  $m$  inteiro não nulo tem-se uma solução.

Esta função satisfaz a **equação e as condições de contorno** e para satisfazer a condição inicial deve-se ter:

$$B_1 = 5, \quad m_1 = 1, \quad B_2 = -3, \quad m_2 = 3$$

e portanto a solução torna-se

$$u(x, t) = 5e^{-\pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(\pi x) - 3e^{-9\pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(3\pi x) \quad \blacktriangleleft$$

### Comentário:

Para a separar de variáveis a condição de contorno, por exemplo em  $x = x_0$ , deve conter unicamente a derivada de  $u$  com respeito a  $x$  e seu coeficiente deve depender unicamente de  $x$ . Por exemplo a condição de contorno

$$u(0, y) + u_y(0, y) = 0$$

não pode ser separada e  $u_x + u_y$  não pode ser prescrita sobre um eixo.

## 7.3 Extensão do Princípio de Superposição

### 7.3.1 Apresentação do Problema

O procedimento usado no exemplo anterior é ilustrativo porém **não** serve como modelo para casos mais gerais. O esforço teria sido em vão se adotássemos tal procedimento num problema com uma **condição inicial** mais geral, por exemplo, se tal condição no problema anterior fosse

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 < x < 1$$

Isto porque, neste caso, a partir da solução particular:

$$u(x, t) = B_m e^{-m^2 \pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(m\pi x)$$

teríamos:

$$u(x, 0) = \phi(x) = B_m \text{sen}(m\pi x), \quad m = 1, 2, \dots$$

No entanto **não existe**, a não ser em casos particulares, uma constante  $B_m$  que multiplicada por  $\text{sen}(m\pi x)$  forneça a função  $\phi$ !

Para contornar esta incômoda situação, desde que a EDP e as condições de contorno são lineares e homogêneas, será aplicado o princípio de superposição. Assim, a expressão

$$u_k(x, t) = \sum_{m=1}^k B_m e^{-m^2 \pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(m\pi x),$$

para  $k$  inteiro, **satisfaz tanto a EDP como as condições de contorno**. Diante disto que tal tentarmos, formalmente, uma solução do problema como sendo a expressão abaixo?

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-m^2 \pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(m\pi x)$$

Como as condições de contorno são lineares e homogêneas esta candidata a solução continua a satisfazê-las, ou seja,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Para satisfazer também a condição inicial do problema,  $B_m$  deve ser tal que

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \text{sen}(m\pi x), \quad 0 < x < 1$$

onde a função  $\phi(x)$  é conhecida.

Essa questão conduz a interessante questão formulada pelo matemático francês Joseph Fourier: dada a função  $\phi(x)$ , será possível encontrar os coeficientes  $B_m$ , tal que esta expressão seja válida?

A resposta formal a esta questão, surge da **propriedade de ortogonalidade** do conjunto  $\{\text{sen}(m\pi x)\}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , no intervalo  $0 < x < 1$ , uma vez que

$$\int_0^1 \text{sen}(m\pi x) \text{sen}(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1/2 & , \quad m = n \end{cases}$$

Sendo

$$\phi(x) = B_1 \text{sen}(\pi x) + B_2 \text{sen}(2\pi x) + \dots + B_n \text{sen}(n\pi x) + \dots,$$

multiplicando ambos os lados por  $\text{sen}(n\pi x)$ , onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , integrando entre 0 e 1 e usando o resultado da integral anterior, segue que:

$$\int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx = B_n \int_0^1 \text{sen}^2(n\pi x) dx = \frac{B_n}{2}$$

Diante deste resultado a **solução formal** do problema apresentado é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-m^2 \pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(m\pi x)$$

onde os coeficientes  $B_n$  são conhecidos e expressos por

$$B_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx$$

## COMENTÁRIOS

- (1) Tal como na série de Taylor onde uma função com determinadas propriedades poderia ser aproximada, na vizinhança de um ponto  $a$  por uma série de potências de  $x - a$ , agora expandimos uma função  $\phi(x)$  no **intervalo todo**  $[0, 1]$  em uma série de senos.
- (2) O problema de encontrar  $B_n$ , tal que  $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(n\pi x)$ , é semelhante ao de encontrar em  $R^3$  os coeficientes  $a_i$  tais que

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^3 a_n \vec{e}_n$$

sendo  $\vec{v}$  conhecido e  $\{\vec{e}_n\}$  um **conjunto ortonormal** com respeito ao produto escalar usual. Neste caso tem-se que  $a_n = \langle \vec{v}, \vec{e}_n \rangle$ . Esta analogia será explorada nas próximas lições.

- (3) Na solução encontrada

$$u(x, t) = B_1 e^{-\pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(\pi x) + B_2 e^{-4\pi^2 t} \text{sen}(2\pi x) + \dots$$

observe que o fator  $\exp[-(n\pi\alpha)^2 t]$  faz com que os termos posteriores da série tornam-se muito "pequenos". Diante disso para um período longo, a solução é aproximadamente igual ao primeiro termo

$$u(x, t) \simeq B_1 e^{-\pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(\pi x)$$

- (4) Podemos interpretar a solução encontrada da seguinte forma. Decompomos a temperatura inicial  $\phi(x)$  como a "soma" de funções simples

$$\phi_n \equiv B_n \text{sen}(n\pi x)$$

e encontramos a resposta (solução) para cada  $\phi_n$ , que é:

$$B_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(n\pi x)$$

Somando-se estas respostas individuais obtém-se a solução correspondente.

- (5) Observe que no método de separação de variáveis as 2 condições de contorno  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  permitiram encontrar os possíveis valores da constante de separação de variáveis, que neste caso constituiu um conjunto infinito porém **discreto** de valores de  $s$ . No entanto se o intervalo for **ilimitado**  $0 < x < \infty$ , teremos apenas **uma** condição de contorno e as constantes de separação de variáveis em vez de assumirem valores discretos, estarão num intervalo **contínuo**,  $0 < s < \infty$ , e assim em vez de termos uma "soma" sobre um conjunto infinito **discreto** de valores de  $s$ , teremos uma **integral** sobre  $s$ !
- (6) Para verificar se a série obtida de modo formal é realmente solução, nos baseamos em resultados da convergência uniforme das séries, o que será visto nos próximos capítulos.

Ao encerrar este capítulo talvez o fato mais inesperado foi que a partir de uma solução particular foi obtida uma solução formal do problema e esta foi expressa por uma série. Esta série é um exemplo de Série de Fourier e este tipo de série desempenha papel fundamental na resolução de problemas da física matemática e que começará a ser estudada no próximo capítulo.

## 7.4 RESUMO

Diferentemente das EDOs, nos problemas físicos envolvendo EDPs a solução geral não é muito utilizada pela dificuldade, quer na sua obtenção, quer na determinação das funções arbitrárias que nela aparecem de modo a satisfizerem as condições auxiliares.

Esse método, quando aplicável, permite obter uma solução particular que propiciará obter a solução de determinados problemas físicos. Neste caso se  $u = u(x, y)$  ao admitir uma solução como o **produto** de duas funções uma dependendo **apenas de  $x$**  e a outra **apenas de  $y$** ,

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

o método permite substituir, por exemplo, uma EDPL  $Lu(x, y) = 0$  por duas **EDOs**.

O sucesso do método dependerá da equação, das condições auxiliares e do sistema de coordenadas utilizado, sendo que a equação deve ser necessariamente **linear** e **homogênea**, podendo ser de coeficientes variáveis. As condições auxiliares, quando houverem, também devem ser **lineares** e adequadas, por exemplo, no PVIC as **condições de contorno** também devem ser homogêneas.

A receita a seguir contera os principais passos na obtenção da solução de um PVIC linear com condições de contorno **homogêneas**, sendo  $u = u(x, t)$  na região  $0 < x < L, t > 0$ .

### 1ª Etapa - Separação de variáveis.

Substituindo na EDP

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

após separar as variáveis, deve-se encontrar **duas** EDOs, uma para  $X$  e outra para  $T$ , dependendo de um parâmetro  $\lambda$  (se não for possível separar as variáveis o método não poderá ser aplicado). Nesta etapa deve-se resolver ests EDOs.

### 2ª Etapa: Usar as condições de contorno.

Se forem homogêneas permitirão reduzir a constante de separação de variáveis  $\lambda$  a um conjunto infinito, porém **discreto**.

### 3ª Etapa - Verificação da condição inicial

Usando a condição inicial na solução particular  $u(x, t)$  anteriormente obtida, e dependendo do caso o princípio de superposição generalizado, determina-se os

valores das constantes arbitrárias e conseqüentemente a solução formal do problema.

Quando for usado o princípio de superposição generalizado teremos uma solução dada por uma série que deve ser tal que possa ser utilizada a derivação termo a termo, que os seus termos sejam funções contínuas e que tais séries sejam uniformemente convergentes. Para analisar este tipo de convergência, o método mais prático e que fornece condições suficientes é o M - teste de Weierstrass. Este tipo de problema será analisado nos próximos capítulos.

### 7.5 Exercícios Propostos

(1) Pelo método de separação de variáveis encontre as soluções particulares de:

- (a)  $u_x + 2u_y - u = 0$   
 (b)  $u_{xx} - u_{yy} + u_y = 0$

(2) Encontre uma solução particular da equação

$$x^2 u_x - u_y + u = 0$$

(3) Use o princípio de superposição para equações não homogêneas e encontre uma solução particular da equação  $u_x - u_y + u = 1$ .

(4) Separe as variáveis e encontre uma solução:

- (a)  $u_{xx} - (1 + y^2) u_{xy} = 0$     *Resp:*  $[A + Be^{\lambda x}] \exp(\lambda \arctan y)$   
 (b)  $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + 5xu_x - 5yu_y + 4u = 0$

(5) Usando o método de separação de variáveis resolva o problema de contorno

$$u_x = 4u_y, \quad u(0, y) = 8e^{-3y} + 4e^{-5y}$$

$$\textit{Resp: } 8e^{-3(4x+y)} + 4e^{-5(4x+y)}$$

(6) Encontre uma solução limitada do seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx}, & 0 < x < 2, & \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(2, t) = 0, & u_t(x, 0) &= 0 \\ u(x, 0) &= 6 \operatorname{sen}(\pi x) - 3 \operatorname{sen}(4\pi x) \end{aligned}$$

$$\textit{Resp: } 6 \operatorname{sen}(\pi x) \cos(4\pi t) - 3 \operatorname{sen}(4\pi x) \cos(16\pi t)$$

(7) Usando separação de variáveis resolva os seguintes problemas :

- (a)  $u_x = 2u_y + u, \quad u(x, 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$     *Resp:*  $3e^{-5x-3y} + 2e^{-3x-2y}$   
 (b)  $u_t = 3u_x, \quad u(x, 0) = 8e^{-2x}$     *Resp:*  $8e^{-2x-6t}$   
 (c)  $u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad u(x, 0) = 6 \operatorname{sen} \pi x / 2 + 3 \operatorname{sen} \pi x$   
*Resp:*  $6e^{-\pi^2 t / 4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + 3e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen}(\pi x)$

(8) Resolva o PVIC abaixo na região  $0 < x < 3, \quad t > 0$

$$u_t = u_{xx} - 2u, \quad u(0, t) = u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = 2 \operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(4\pi x)$$

$$\text{Resp: } e^{-2t} \left( 2e^{-\pi^2 t} \text{sen } \pi x - e^{-16\pi^2 t} \text{sen } 4\pi x \right)$$

(9) Mostre que a EDP  $\nabla^2 u + (x^2 + y^2)^2 u = 0$  não é de variáveis separáveis no entanto ela escrita em coordenadas polares o é.

(10) Mostre que  $\text{sen}(mx) \text{sen}(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

(11) Mostre que  $\int_0^1 \text{sen}(m\pi x) \text{sen}(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1/2 & , \quad m = n \end{cases}$

(12) Determine se o método de separação de variáveis pode ser usado nos seguintes casos:

(a)  $xu_{xx} + u_t = 0$

(b)  $tu_{xx} + xu_t = 0$

(c)  $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$

(d)  $u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0$

(13) Encontre a solução do problema misto

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= 0, & \text{sobre } R \\ u(x, 0) &= \text{sen } x, & u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = \text{sen } x \cos t$$

(14) Considere a equação do **telégrafo**

$$u_{tt} + cu_t + ku = a^2 u_{xx} + F(x, t)$$

com  $a^2 > 0$ ,  $c \geq 0$  e  $k \geq 0$ . Separe as variáveis no caso de  $F(x, t) \equiv 0$ .

(15) Mostre que a solução do problema.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < 1, & 0 < \theta < 2\pi \\ u(1, \theta) &= 1 + \text{sen } \theta + \frac{1}{2} \text{sen}(3\theta) + \cos(4\theta) \end{aligned}$$

é dada por:

$$u(r, \theta) = 1 + r \text{sen } \theta + \frac{r^2}{2} \text{sen}(3\theta) + r^4 \cos(4\theta),$$

(16) Encontre a solução do problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < 1 \\ u(1, \theta) &= \text{sen } \theta, & 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

(17) Considere a função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi t) \sin(n\pi x)}{n^4}$$

Mostre que  $u(x, t)$  é contínua e é solução da equação da onda  $u_{tt} = u_{xx}$  para todo  $x$  e  $t$ .



(18) Mostre que nas equações

$$u_{xx} - u_y = x$$

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$$

não podemos separar as variáveis.



## Chapter 8

# Série de Fourier Trigonométrica

**Finalidade** - No capítulo anterior ao resolver um problema de calor numa haste com condições auxiliares adequadas tínhamos o seguinte problema: Dada a função  $\phi(x)$  qual é o valor das constantes  $B_n$  tal que:

$$\phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}(m\pi x), \quad 0 < x < 1?$$

Este tipo de problema não é raro e, ao resolver problemas envolvendo EDP pelo método de separação de variáveis é comum o aparecimento de séries do tipo

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)], \quad -L \leq x \leq L$$

onde devemos encontrar os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ . A finalidade deste capítulo será:

- (1) Determinar os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$ ;
- (2) apresentar técnicas que permitam simplificar os cálculos destes coeficientes;
- (3) obter a Série de Fourier de uma função **não** periódica definida num intervalo **limitado**;
- (4) apresentar as representações cosenoidal e exponencial da SF trigonométrica;
- (5) estabelecer uma analogia entre a representação de um vetor no  $R^3$  e a expansão em Série de Fourier.

Neste capítulo as operações serão feitas de modo formal, isto é sem rigor matemático, e no próximo apresentaremos as condições que permitem legalizar as operações aqui efetuadas.

### 8.1 Série Trigonométrica

Como o objetivo será representar uma função em série de senos e cossenos é fundamental o conceito de função periódica. Uma função real de uma variável real  $f(x)$ , definida para todos os valores de  $x$ , é dita *periódica* se existe um número fixo  $T > 0$ , tal que para todo  $x$ ,  $f(x + T) = f(x)$ . O menor valor de  $T > 0$  é chamado de *período mínimo*, ou *fundamental*, ou, simplesmente *período* de  $f$ .

Observe que a função constante é uma função periódica mas sem período fundamental. Além disso se  $f$  for periódica de período  $T$  então  $f$  também será periódica de período  $2T$ , pois

$$f(x + 2T) = f[(x + T) + T] = f[x + T] = f(x),$$

e de uma forma geral será periódica de período  $nT$  para  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$

É fácil verificar que a soma, diferença, produto e quociente de funções periódicas de período comum, são periódicas de mesmo período.

Por exemplo:

- (1)  $f(x) = \text{sen } x$ , tem períodos  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  e o período (mínimo) é  $2\pi$ .
- (2)  $g(x) = \text{sen } nx$ ,  $n$  inteiro, tem período mínimo de  $2\pi/n$
- (3) Como período de uma constante é qualquer número positivo,

$$1/2 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$$

é uma função periódica de período  $2\pi$ .

- (4) As funções  $\sin(\pi x/L)$  e  $\cos(\pi x/L)$  são periódicas de período  $2L$  o mesmo ocorrendo com

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Por definição, *série trigonométrica* de período  $2L$ , é toda série da forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (8.1)$$

onde  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são constantes.

**Exemplo** - A série:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} [n \cos nx + n^2 \text{sen } nx]$$

é uma série trigonométrica de período  $2\pi$ , com  $a_0 = 2$ ,  $a_n = n$ ,  $b_n = n^2$ .

Diante do exposto dada uma função periódica  $f(x)$  de período  $2L$  temos as seguintes indagações:

- (1) Como se determina os coeficientes da série?
- (2) Quais condições que devemos impor sobre a função  $f$  para que exista a série e que esta seja convergente?
- (3) Caso esta série convirja, será que ela convirgirá para a função  $f$ ?

Neste capítulo trataremos apenas do primeiro caso, ficando os demais para o próximo capítulo.

## 8.2 Determinação dos Coeficientes da SF

Admitindo que  $f$ , definida em  $(-L, L)$ , possa ser representada pela série trigonométrica,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (8.2)$$

vamos obter os seus coeficientes. Para tal são fundamentais os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \\ \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} L, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

os quais são válidos para  $m$  e  $n$  **inteiros** maiores ou iguais a 1.

Se existe a integral da função  $f(x)$  no intervalo  $-L < x < L$ , e se for válida a permuta entre os símbolos  $\sum$  e  $\int$ , integrando membro a membro neste intervalo temos:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] = a_0 L,$$

pois

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

Assim o coeficiente  $a_0$  torna-se:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (8.4)$$

Por outro lado multiplicando-se ??sucessivamente por

$$\cos \frac{m\pi x}{L} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \text{temos}$$

$$f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \right]$$

$$f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \right]$$

Admitindo-se válidas as integrações termo a termo destas expressões no intervalo  $-L < x < L$ , de tal forma que possamos permutar os símbolos de  $\sum$  e  $\int$ , após

integrar as funções anteriores neste intervalo vamos obter:

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L$$

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{cos} \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L,$$

e portanto os coeficientes  $a_m$  e  $b_m$  são dados por

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{cos} \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.5)$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

Se as integrais que definem  $a_n$  e  $b_n$  existem a série trigonométrica é chamada série de Fourier trigonométrica da função  $f(x)$ . As constantes  $a_n$  e  $b_n$  são chamadas de *coeficientes de Fourier* e as fórmulas que determinam estes coeficientes de *fórmulas de Euler*. Em resumo se a série converge para  $f(x)$  e se a série puder ser integrada termo a termo, então os coeficientes devem ser dados pelas equações acima.

**Exercício** - Determine a série de Fourier da função  $f(x)$ , periódica de período  $2\pi$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ +1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

**Solução** - Substituindo  $f(x)$  nas expressões que determinam  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_m$  e sendo  $L = \pi$ , temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -dx + \int_0^{\pi} dx \right]$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -\operatorname{cos} mx dx + \int_0^{\pi} \operatorname{cos} mx dx \right]$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen} mx dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx dx \right]$$

Calculando estas integrais segue que  $a_0 = a_m = 0$ , e como

$$b_m = \frac{2}{m\pi} (1 - \operatorname{cos} m\pi) = \begin{cases} 4/(m\pi), & m \text{ ímpar} \\ 0, & m \text{ par} \end{cases},$$

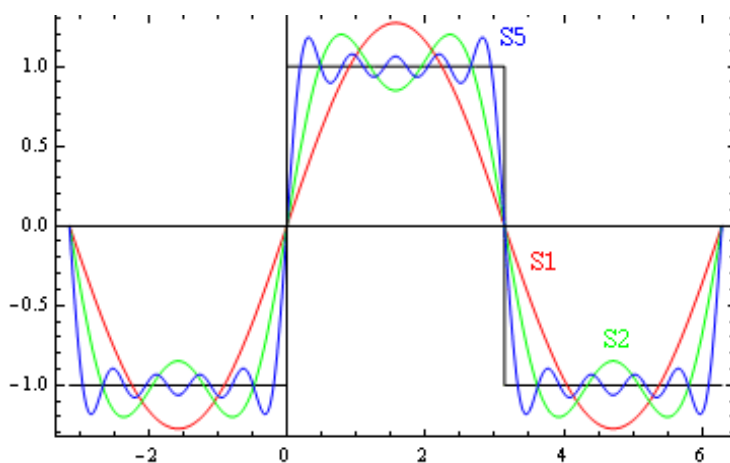
a série de Fourier de  $f(x)$  torna-se:

$$\frac{4}{\pi} \left[ \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + \dots \right] \blacktriangleleft$$

Para visualizar a aproximação vamos indicar por  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_5$  as seguintes somas parciais desta série

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{4}{\pi} [\text{sen } x] \\ S_2 &= \frac{4}{\pi} [\text{sen } x + \frac{1}{3} \text{sen } 3x] \\ S_5 &= \frac{4}{\pi} [\text{sen } x + \frac{1}{3} \text{sen } 3x + \frac{1}{5} \text{sen } 5x + \frac{1}{7} \text{sen } 7x + \frac{1}{9} \text{sen } 9x] \end{aligned}$$

O gráfico abaixo mostra a aproximação que existe entre estas somas e a função dada



**CUIDADO** - Observe pelo gráfico que a aproximação com a função tende a melhorar com aumento do número de termos parecendo indicar que a série converge e possui para a sua soma a própria função. Assim por intuição somos tentados a colocar a soma da SF de  $f$  como sendo a própria  $f$ . No entanto isto nem sempre ocorre, note neste exercício, por exemplo, em  $x = 0$ , que a função tem o valor 1 porém a soma é **zero!**

Quando nada pode ser afirmado sobre a convergência deve ficar claro que a série encontrada é apenas a série correspondente a  $f$  e escreve-se simplesmente

$$f(x) \propto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \right],$$

onde  $\propto$  significa a Série de Fourier de  $f(x)$ . O sinal  $\propto$  poderá ser substituído por  $=$ , unicamente se a série converge e se a soma é igual a  $f(x)$ . A questão de se estabelecer as condições para as quais a série de Fourier da função  $f(x)$  converge, qual o tipo da convergência e se a SF converge para a própria função  $f(x)$ , será discutida no próximo capítulo.

### COMENTÁRIOS

(1) Existem duas razões para se usar  $a_0/2$ , e não apenas  $a_0$ , na série:

- (a) a fórmula para determinar  $a_0$  torna-se a mesma para  $a_m$  quando  $m = 0$ ;

- (b) o primeiro termo da série, isto é,  $a_0/2$  representa o valor médio da função  $f$  no intervalo  $[-L, L]$ .
- (2) A fórmula para se obter  $a_0$  é a mesma de  $a_m$  tomando-se  $m = 0$ , no entanto após integrar e obter a expressão de  $a_m$ , nem sempre esta será válida para  $m = 0$ . Por exemplo, se  $a_m$  for

$$a_m = [1 - (-1)^m] / (m^2\pi)$$

não podemos tomar  $m = 0$  para se obter  $a_0$ .

- (3) Pode-se mostrar que os coeficientes de Fourier de uma soma de duas funções  $f_1 + f_2$  são as somas dos coeficientes de Fourier de  $f_1$  e  $f_2$ . Esta propriedade permite, por vezes, determinar a série de Fourier de uma função a partir de outras.
- (4) Pode-se mostrar que a soma de uma série infinita convergente de funções de período  $T$  é também periódica de período  $T$ .
- (5) Dizemos que uma função  $f(x)$  definida em  $a \leq x \leq b$  é absolutamente integrável se a integral

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

existe possivelmente como integral imprópria. A soma e a diferença de funções absolutamente integráveis é absolutamente integrável, porém o produto não necessariamente. Por exemplo,  $x^{-1/2}$  é absolutamente integrável no intervalo  $[0, 1]$  mas a função  $x^{-1} = x^{-1/2} \cdot x^{-1/2}$  não é.

- (6) Usa-se designar por  $\mathcal{L}_{[a,b]}^1$  o espaço das funções  $f$  tal que  $f$  e  $|f|$  sejam integráveis, no intervalo  $[a, b]$ , no sentido Riemann. Para que os coeficientes de Fourier estejam definidos é suficiente que  $f$  seja um elemento deste espaço.
- (7) Se  $f$  for integrável e limitada então  $f$  será absolutamente integrável, mas a recíproca não é verdadeira. De um modo geral existem funções integráveis que não são absolutamente integráveis, como também funções não integráveis tais que  $|f|$  é integrável, por exemplo, a função  $f$  que é igual a 1 se  $x$  for racional e  $-1$  se for irracional não é Riemann integrável em  $[0, 1]$ , mas a função  $|f(x)| = 1$  é integrável.

### 8.3 Simplificação dos Coeficientes

Observe no exemplo anterior que encontramos  $a_n = 0$ . É evidente que se previamente soubermos deste fato podemos poupar alguns cálculos. Vamos aqui apresentar duas propriedades que propiciam simplificações.

Se  $f$  for uma função integrável no intervalo **simétrico**  $[-a, a]$ , temos:



a) se  $f$  for **par**:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

b) se  $f$  for **ímpar**:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Como a função cosseno é **par** e seno é **ímpar**, seguem as seguintes conclusões:

**Propriedade 1** - Se  $f$  é **par**, desde que  $f(x) \cos(n\pi x/L)$  também é **par** e  $f(x) \sin(n\pi x/L)$  **ímpar**, os coeficientes de Fourier serão:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos n\pi x/L dx$$

e a série **não** terá **senos**.

Se  $f$  é **ímpar**, desde que  $f(x) \cos(n\pi x/L)$  também é **ímpar** e  $f(x) \sin(n\pi x/L)$  é **par**, os coeficientes de Fourier serão:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin n\pi x/L dx$$

e a série **não** terá **cosenos**.

**Exercício** - Determine a série de Fourier da função periódica de período  $2\pi$  definida por

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

**Solução** - Desde que  $f$  é ímpar,  $a_n = 0$ , e

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nxdx$$

Calculando a integral tem-se

$$b_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1},$$

e a SF da função  $f(x) = x$  é dada por

$$x \propto 2 \left[ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right] \blacktriangleleft$$

**Exercício** - Expandir em série de Fourier a função definida por

$$f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$$

**Solução** - Desde que  $f$  é uma função par,  $b_n = 0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \cos nx dx$$

Calculando esta integral tem-se

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\text{sen}(1+n)x + \text{sen}(1-n)x] dx = \frac{2[1 + (-1)^n]}{\pi(1-n^2)} = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar} \neq 1 \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ par} \end{cases}$$

Para  $n = 1$ , tem-se

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \cos x dx = 0$$

Fazendo  $n = 2m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  a série de Fourier pode ser escrita como

$$|\text{sen } x| \propto \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{(1-4m^2)} \quad \blacktriangleleft$$

Outra propriedade que ocorre nas **funções periódicas**, e que pode ser usada na simplificação de coeficientes, será apresentada a seguir.

**Propriedade 2** - Se  $g(x)$  for uma função periódica de período  $2L$  e integrável em qualquer intervalo de comprimento  $2L$ , então ela é integrável sobre qualquer outro intervalo de **mesmo comprimento** e o valor da integral é o mesmo. Em outras palavras se  $C$  for qualquer número real, então,

$$\int_C^{C+2L} g(x) dx = \int_{-L}^L g(x) dx, \quad (8.7)$$

Como as funções

$$g(x) \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

são periódicas e têm período comum  $2L$ , esta propriedade permite escrever os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  como sendo

$$a_n = \frac{1}{L} \int_C^{C+2L} g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

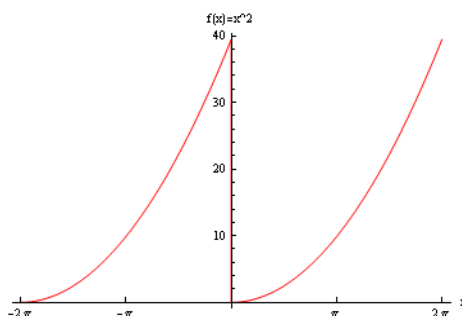
$$b_n = \frac{1}{L} \int_C^{C+2L} g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Em outras palavras os limites de integração devem incluir um período completo  $2L$ , **não** necessariamente no intervalo de  $-L$  a  $L$ . Este resultado é particularmente útil para simplificar o cálculo dos coeficientes quando a função, definida em  $[-L, L]$ , for representada por mais de uma expressão. Vamos ilustrar este procedimento no exercício a seguir.

**Exercício** - Determine a SF da função periódica de período  $2\pi$  definida por

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi$$

**Solução** - Para calcular os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  a integral no intervalo  $[-\pi, \pi]$  deveria ser decomposta, por exemplo, nos intervalos  $(-\pi, 0)$  e  $[0, \pi)$  o que daria um certo trabalho. Podemos usar esta última propriedade e escolher um valor conveniente de  $C$ , neste caso  $C = 0$ , conforme ilustra o gráfico abaixo.



Assim os coeficientes podem ser determinados por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nxdx$$

Usando integração por partes e após os cálculos tem-se

$$a_n = 4/n^2, \quad a_0 = 8\pi^2/3, \quad b_n = -4\pi/n$$

### COMENTÁRIOS

- (1) Além destas propriedades existem outras, por exemplo, por vezes, a simetria pode estar "**escondida**" e neste caso uma modificação da função pode torná-la par, ou ímpar (ver referência [10]).
- (2) Para uma dada função que não é par nem ímpar podemos decompô-la em duas componentes: uma par e outra ímpar.
- (3) **Cuidado:** As SF das funções  $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$  e  $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ , são **diferentes!**

### 8.4 Série de Fourier de uma Função não Periódica

Se a série de Fourier converge ela convergirá para uma função periódica. O que ocorre quando uma dada função  $f(x)$  está definida **apenas** num intervalo **limitado**  $0 < x < L$ , ou seja, quando a função **não** for **periódica**?

Primeiramente deve-se definir uma outra função  $F$  que seja **periódica** e que **coincida** com  $f$  no intervalo  $0 < x < L$ . Tal função  $F$  é chamada de *extensão periódica* de  $f$  e a representação em SF de  $F$  será a **mesma** de  $f$  neste intervalo. Muito embora exista uma infinidade de extensões, a menos que se diga ao contrário, será admitida uma extensão  $F$  definida no intervalo  $(-L, L)$  periódica de período  $2L$ , que é chamada *extensão de meio período*. As duas principais são:

**a) Extensão par.**

Estende-se a função  $f$  no intervalo  $(-L, 0)$  de *modo par* e toma-se o período como sendo  $2L$ . Em outras palavras a extensão **par**  $F$  de  $f$  é a função periódica de período  $2L$  dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$$

Como  $F$  é uma função **par**, tem-se a representação:

$$f(x) \propto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

que é chamada de *série Fourier cosseno* para  $f$  sendo válida **apenas** em  $0 < x < L$ .

**b) Extensão ímpar.**

Estende-se a função  $f$  no intervalo  $(-L, 0)$  de *modo ímpar* e toma-se o período como sendo  $2L$ . Ou seja a extensão **ímpar**  $F$  de  $f$  é a função periódica de período  $2L$  dada por:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , & 0 < x < L \\ -f(-x), & & -L < x < 0 \end{cases}$$

Como  $F$  é **ímpar**, tem-se a representação:

$$f(x) \propto \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

que é chamada de *série de Fourier seno* de  $f$  sendo válida **apenas** em  $0 < x < L$ .

**Exercício** - Desenvolva  $f(x) = x$ , definida no intervalo  $0 < x \leq 2$ , em série de Fourier senos e em série de Fourier cossenos.



**Solução** - Faremos as extensões par e ímpar

**a) Extensão ímpar**

Fazendo extensão **ímpar** com período  $2L = 4$



tem-se  $a_n = 0$  e

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

ou

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Integrando por partes obtém-se

$$b_n = \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi,$$

e portanto, a série de Fourier correspondente será

$$x \propto \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} - \dots \right), \quad \mathbf{0 < x < 2}$$

**b) Extensão par**

Fazendo a extensão par de  $f$  com período  $2L = 4$  tem-se  $b_n = 0$ . A partir da expressão

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

substituindo a expressão de  $f(x)$  e integrando tem-se:

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1), \quad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x dx = 2$$

Logo a série correspondente será

$$x \propto 1 + \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right), \quad \mathbf{0 < x \leq 2}$$

Deve se ficar claro que ambas as extensões são válidas **apenas** no intervalo de definição da função.

### COMENTÁRIOS

- (1) É importante que o **intervalo** onde esteja definida a função seja **limitado**. Se isto não ocorrer tem-se uma representação na forma **integral** que será estudada oportunamente.
- (2) Pode parecer estranho que uma função definida num intervalo finito pode ser representada por séries diferentes. Deve ficar claro que embora estas séries representam a função apenas no intervalo dado elas se originaram de funções periódicas diferentes!
- (3) Nos exemplos apresentados observe que os coeficientes de Fourier satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Este resultado sempre ocorrerá quando  $f$ , definida num intervalo limitado, e  $|f|$  forem integráveis, referência ([8]).

- (4) No intervalo  $0 < x < L$  as extensões  $F$  de  $f$ , e a própria função  $f$ , coincidem e portanto são séries diferentes de uma mesma função, porém, como veremos na próxima lição, as **velocidades de convergência** podem ser **diferentes**.
- (5) Ao definir a função no intervalo  $[-L, L]$  e fazer uma extensão  $F$  periódica de período  $2L$  sobre o eixo  $x$  tem-se 2 casos:
  - (a) Se  $F(-L) = F(L)$ , e  $F(x)$  for contínua sobre  $[-L, L]$ , sua extensão será também contínua sobre todo o eixo  $x$ ;
  - (b) Se  $F(-L) \neq F(L)$ , não teremos extensão sem alterar os valores de  $F(-L)$  e  $F(L)$ , uma vez que a periodicidade exige que  $F(-L) = F(L)$ . Esta dificuldade pode ser evitada de dois modos, ou desconsiderando os valores de  $F$  nos extremos do intervalo, e portanto ficando a extensão de  $f$  indefinida nos pontos  $x = (2k+1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; ou modificando adequadamente os valores da função em  $x = -L$  e  $x = L$ , fazendo estes valores iguais. É importante notar que em ambos os casos os coeficientes de Fourier terão os mesmos valores.

### 8.5 Outras Representações da Série de Fourier

Dependendo do tipo de aplicação a SF pode ser representada de outras formas, assim quando a variável independente for o tempo usa-se com frequência a representação cosenoidal ou a complexa as quais tornam mais evidentes alguns parâmetros da física tais como a amplitude, fase, etc. Vamos apresentar estas duas formas:

### 8.5.1 Representação Cosenoidal

Seja  $f$  uma função periódica de período  $T = 2L$  tal que possamos representá-la pela Série de Fourier.

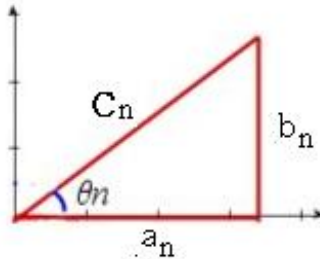
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sen \frac{2n\pi t}{T} \right] \quad (8.10)$$

Fazendo,  $w_0 = 2\pi/T$ , a série pode ser escrita como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos (nw_0 t) + b_n \sen (nw_0 t)] \quad (8.11)$$

Definindo

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad C_0 = a_0/2, \quad \cos \theta_n = a_n/C_n,$$



temos que

$$a_n \cos (nw_0 t) + b_n \sen (nw_0 t) \equiv \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[ \frac{a_n}{C_n} \cos nw_0 t + \frac{b_n}{C_n} \sen nw_0 t \right] \quad (8.12)$$

ou

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} [\cos \theta_n \cos nw_0 t + \sin \theta_n \sen nw_0 t] = C_n \cos (nw_0 t - \theta_n)$$

Portanto a função  $f$  pode também ser representada por

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos (nw_0 t - \theta_n) \quad (8.13)$$

que é chamada de *representação cosenoidal* da SF.

Esta representação nos mostra que a função periódica  $f$  é uma "soma" de componentes cosenoidais de frequências distintas  $w_n = nw_0$ . A componente cosenoidal de frequência  $w_n$  é chamado  $n$ -ésima harmônica da função  $f$ . O *primeiro harmônico*, que é chamado de *componente fundamental*, tem o mesmo período da função  $f$  e  $w_0$  é chamada de *frequência angular fundamental*. O coeficiente  $C_n$ , que é a grandeza da componente de  $f$  com frequência  $n$ , é chamado de *amplitude harmônica* e  $\theta_n$  *ângulo de fase*. Tal como os vetores, podemos interpretar a SF

de  $f$  como a decomposição de  $f$  numa sequência de números  $C_n$  que medem as componentes de  $f$

### 8.5.2 Representação Complexa ou Exponencial

Desde que as funções seno e cosseno também podem ser representadas por:

$$\begin{aligned}\cos nw_0t &\equiv (e^{inw_0t} + e^{-inw_0t}) / 2 \\ \text{sen } nw_0t &\equiv (e^{inw_0t} - e^{-inw_0t}) / (2i)\end{aligned}$$

a expressão (15.2) pode ser escrita como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inw_0t} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inw_0t} \right] \quad (8.14)$$

Se denominarmos

$$\begin{aligned}c_0 &= a_0/2 \\ c_n &= (a_n - ib_n)/2, \quad c_{-n} = (a_n + ib_n)/2, \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned} \quad (8.15)$$

esta série pode ser reescrita como:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{inw_0t} + c_{-n} e^{-inw_0t}],$$

ou compactamente, por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0t}, \quad (8.16)$$

que é chamada *forma complexa ou exponencial* da SF da função  $f$ . Esta representação por vezes é usada para generalizar a noção de SF quando a função está definida num intervalo **não limitado**.

A convergência desta série deve ser entendida como o limite da soma simétrica

$$\sum_{n=-m}^{n=m} c_n e^{inw_0t}$$

quando  $m \rightarrow \infty$ .

Como já se conhece as expressões de  $a_n$  e  $b_n$ , pode-se determinar a expressão de  $c_n$ . Usando (15.6) tem-se

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos nw_0t dt - i \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen } nw_0t dt \right],$$

que simplificando fornece:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-inw_0t} dt \quad (8.17)$$



De forma semelhante, a partir da expressão de  $c_{-n}$  obtém-se

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{inw_0 t} dt$$

Por outro lado, sendo

$$c_0 \equiv \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

conclui-se que para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  a expressão (15.8) servirá para calcular todos os coeficientes da SF complexa. É importante observar que se  $f(x)$  é **real** então os coeficientes  $c_n$  e  $c_{-n}$  são **complexos conjugados**.

Os coeficientes complexos  $c_n$  também podem ser representados por:

$$c_n = |c_n| e^{i\phi_n}, \quad c_{-n} \equiv \bar{c}_n = |c_n| e^{-i\phi_n} \quad (8.18)$$

onde, de (15.6) temos:

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad c_0 = a_0/2 \quad (8.19)$$

$$\phi_n = \arctan(-b_n/a_n), \quad n \neq 0 \quad (8.20)$$

Um gráfico onde se marca no eixo horizontal as frequências angulares  $w_n \equiv nw_0$  e no eixo vertical os módulos dos coeficiente  $c_n$  é chamado de *espectro de amplitude* (bilateral) ou *espectro de linha* da função  $f(t)$ . Se em vez de  $|c_n|$  colocarmos no eixo vertical os ângulos de fase  $\phi_n$ , tem-se o *espectro de fase* de  $f(t)$ .

Como os índices assumem somente valores inteiros, estes espectros **não** são curvas contínuas, mas aparecem na variável discreta  $w_n \equiv nw_0$ .

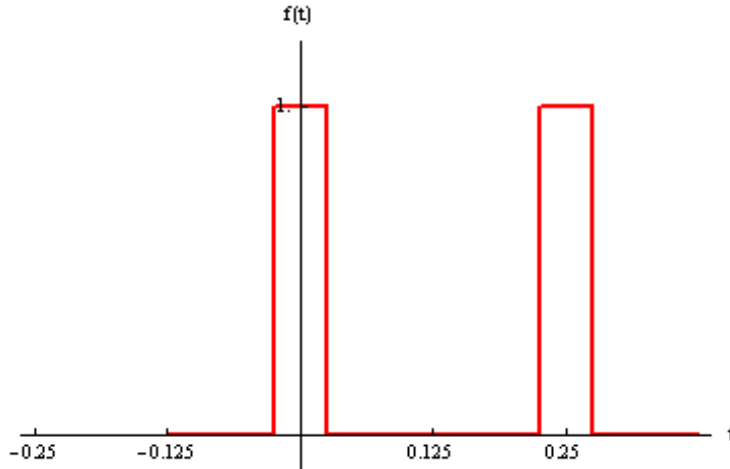
O espectro de amplitude e o de fase constituem o *espectro de frequência discreto* ou *linha espectral*, ou *raia*, da função periódica  $f(t)$ .

**Exercício** - Encontre o espectro de fase e de amplitude da função periódica  $f(t)$  de período  $T$  definida por por:

$$f(t) = \begin{cases} A & , \quad -d/2 < t < d/2 \\ 0 & , \quad -T/2 < t < -d/2 \quad , \quad d/2 < t < T/2 \end{cases}$$

Em quais pontos ocorrem o espectro de amplitude? O que acontece quando o período aumenta?

**Solução** - O gráfico desta função, para  $A = 1$ ,  $d = 1/20$ , e  $T = 1/4$ , está representado abaixo. Usando (15.8) tem-se



$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-inw_0 t} dt, \quad w_0 = 2\pi/T$$

Substituindo a expressão de  $f(t)$ , tem-se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{T} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-inw_0 t} dt = \frac{A}{T} \frac{1}{-inw_0} e^{-inw_0 t} \Big|_{-d/2}^{d/2} \\ c_n &= \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{inw_0} \left( e^{inw_0 d/2} - e^{-inw_0 d/2} \right) \\ c_n &= \frac{Ad}{T} \cdot \frac{1}{nw_0 d/2} \cdot \frac{1}{2i} \left( e^{inw_0 d/2} - e^{-inw_0 d/2} \right), \quad c_n = \frac{Ad}{T} \cdot \frac{\text{sen}(nw_0 d/2)}{nw_0 d/2} \end{aligned}$$

Desde que:

$$nw_0 d/2 \equiv n\pi d/T$$

segue

$$c_n = \frac{Ad}{T} \cdot \frac{\text{sen}(n\pi d/T)}{n\pi d/T},$$

Devido a **simetria par** temos que  $b_n = 0$ , ou seja  $c_n$  é real, e portanto, o **espectro de fase é nulo**.

Para fazer o gráfico do espectro de amplitude  $|c_n|$  observe que este está definido apenas nos **valores discretos**

$$w_0 = 0, \quad w_1 = \frac{\pm 2\pi}{T}, \quad w_2 = \frac{\pm 4\pi}{T}, \quad \dots$$

Como a distância entre duas raias é  $\Delta w \equiv w_0 = 2\pi/T$  observe que para  $d$  fixo quanto maior for o valor do período  $T$  mais próximas as raias estarão entre si. Para ilustrar vamos fixar  $A = 3$  e  $d = 1/20$  e tomar dois valores para  $T$  :

a) Se  $T = 1/4$  seg temos  $\Delta w = w_0 = 8\pi$

Neste caso o espectro de amplitude existe apenas em  $w_n = w_0 n$ , ou seja em

$$0, \pm 8\pi, \pm 16\pi, \dots$$

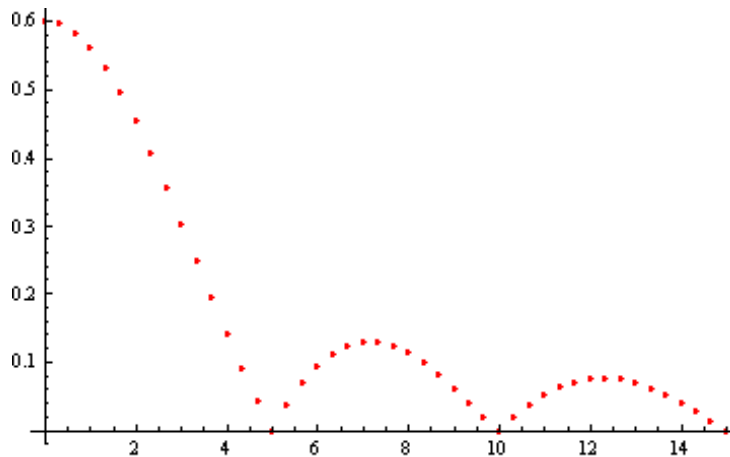
onde a distância entre duas raias consecutivas é  $8\pi$ . Este espectro se **anula** em

$$n\pi d/T = m\pi, \text{ ou, } n = 5m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

ou seja em

$$w = \pm 5w_0 = \pm 40\pi, \quad w = \pm 10w_0 = \pm 80\pi, \dots$$

O gráfico a seguir ilustra este caso:



b) Se  $T = 1/2$  seg temos  $\Delta w = w_0 = 4\pi$

Neste caso o espectro de amplitude existe apenas em  $w_n = w_0 n$ , ou seja em

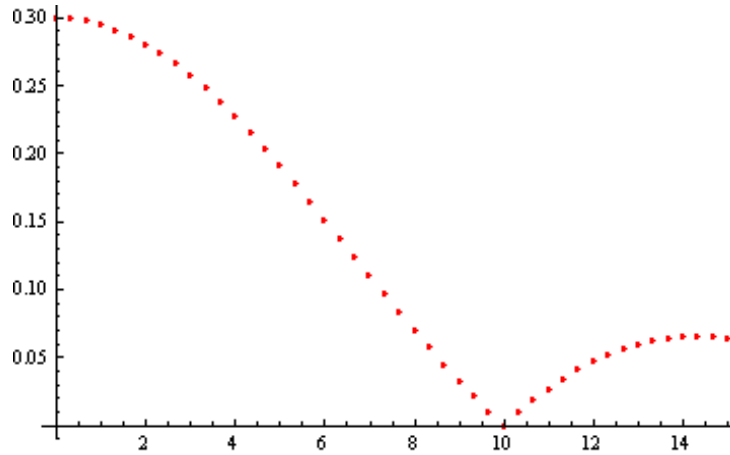
$$0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \pm 16\pi, \dots$$

onde a distância entre duas raias consecutivas é  $4\pi$ . Este espectro se **anula** em

$$n\pi d/T = m\pi, \text{ ou, } n = 10m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

ou seja em  $w = \pm 10w_0 = \pm 40\pi, \quad w = \pm 20w_0 = \pm 80\pi, \dots$

O gráfico abaixo representa este caso



## COMENTÁRIOS

- (1) Desde que

$$f(t) e^{-inw_0 t}$$

é periódica de período  $T$ , pois  $f$  tem este período, o coeficiente  $c_n$  pode ser escrito como:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-inw_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

- (2) A partir da forma complexa, ou cossenoidal, pode-se obter a forma trigonométrica. Por exemplo usando (15.6) segue

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} = c_n + \bar{c}_n = 2 \operatorname{Re}[c_n] \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = -2I_m[c_n] \end{aligned}$$

Deste modo a análise da convergência da SF será feita apenas na forma trigonométrica.

- (3) Os coeficientes da SF complexa podem ser obidos de forma semelhante aos da SF trigonométrica. De fato, multiplicando-se ambos os lados de 15.7 por  $e^{-imw_0 t}$  e integrando membro a membro no intervalo  $[-T/2, T/2]$ , todas as integrais desaparecerão ficando apenas a parcela quando  $m = n$ , fornecendo para  $c_n$  a mesma expressão já encontrada.
- (4) O espectro de amplitude **não** é afetado pelo deslocamento da origem, isto é os **espectros de amplitude** de  $f(t)$  e de  $f(t - \tau)$  **são iguais**. No entanto, os **espectros de fase** são diferentes: o deslocamento no tempo de  $\tau$  unidades causa um deslocamento de  $nw_0\tau$  radianos na componente de frequência  $nw_0$ .

A convergência tratada no capítulo anterior é a **pontual**. Embora esta convergência pareça ser mais natural, por vezes ela é inadequada para muitas aplicações. Na próxima seção vamos tratar de outro tipo que é a convergência na média.

## 8.6 Analogia com a decomposição de vetores no $\mathbf{R}^n$

Uma vez definida a função  $\phi$  o problema de achar  $B_n$ , tal que

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x),$$

é semelhante ao de encontrar no espaço vetorial  $\mathbf{R}^n$  os coeficientes  $a_k$  tal que

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n a_k \vec{e}_k$$

quando  $\vec{v}$  for conhecido e  $\{\vec{e}_k\}$  for um conjunto ortogonal com respeito ao produto escalar usual. Neste caso tem-se que

$$a_k = \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle}{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle} \equiv \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle}{\|\vec{e}_k\|^2}$$

Particularmente se o conjunto for ortonormal teremos simplesmente

$$a_k = \langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle$$

Para fazer a analogia vamos definir no espaço vetorial das funções contínuas com as operações usuais  $C_{[a,b]}$  um produto escalar conveniente. Como os coeficientes de Fourier envolvem a integral de um produto de funções, definimos o produto interno(usual) entre as funções  $f$  e  $g$  deste espaço como sendo o número real

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (8.21)$$

Dizemos que as funções não nulas  $f$  e  $g$  são ortogonais em  $[a, b]$  se

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Por exemplo as funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x^3$  são ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  pois

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 x^2 x^3 dx = 0$$

Para o caso particular de  $f = g$ , sendo  $\langle f, f \rangle$  um número real não negativo, defini-se a norma de  $f$  como a raiz quadrada não negativa

$$\|f\| \equiv \langle f, f \rangle^{1/2} \equiv \left\{ \int_a^b f^2(x)dx \right\}^{1/2} \quad (8.22)$$

182

e, diz-se que a função  $f$  está normalizada se  $\|f\| = 1$

A distância  $d$  entre as funções  $f$  e  $g$  deste espaço é dada por

$$d(f, g) = \|f - g\|,$$

Uma sequência de funções não nulas  $\{\phi_i(x)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , neste espaço é ortogonal em  $[a, b]$  se

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle \equiv \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx = 0, \quad i \neq j,$$

ou seja, se cada par de funções da sequência for ortogonal e nenhuma delas for identicamente nula.

Diz-se que este sistema é ortonormal neste intervalo, ou está normalizado, se

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

É evidente que a partir de um conjunto ortogonal de funções não nulas pode-se sempre formar um conjunto ortonormal ao dividir cada função pela sua norma.

Exemplo: A sequência

$$\{\phi_0 = 1, \phi_1 = \cos x, \phi_2 = \cos 2x, \dots\}$$

é ortogonal no intervalo  $[-\pi, \pi]$  pois, podemos mostrar que para  $m$  e  $n$  inteiros e não negativos:

$$\langle \phi_0, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos nx dx = 0, \quad n \neq 0$$

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad m \neq n, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

Quanto as normas de cada função desta sequência, uma vez que

$$\|\phi_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

$$\|\phi_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi$$

segue que

$$\|\phi_0\| = \sqrt{2\pi}, \quad \|\phi_m\| = \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

e portanto a sequência de funções

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

é ortonormal no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Do que foi apresentado faremos a seguir uma analogia com o procedimento usado na determinação das componentes de um vetor no  $R^3$  e usar o produto interno para calcular os coeficientes da Série de Fourier. Com esta representação será mais fácil estender a Série de Fourier para outros conjuntos ortogonais, o que será visto nos próximos capítulos.

Considere a função  $f(x)$ , definida no intervalo  $-L \leq x < L$ , periódica de período  $2L$ , e o seguinte conjunto ortogonal em  $[-L, L]$

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}$$

Admitindo-se que a função  $f(x)$  tenha a representação

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

vamos determinar os coeficientes de Fourier a partir do produto interno.

Devido ao fato do conjunto ser ortogonal e sob condições adequadas, se efetuarmos o produto interno entre a série que representa  $f$  e as funções

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{e} \quad \cos \frac{n\pi x}{L}$$

teremos

$$\langle f, \sin \frac{n\pi x}{L} \rangle = \langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}], \sin \frac{n\pi x}{L} \rangle = b_n \langle \sin \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \rangle = L$$

$$\langle f, \cos \frac{n\pi x}{L} \rangle = \langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}], \cos \frac{n\pi x}{L} \rangle = a_n \langle \cos \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L} \rangle = L$$

pois

$$\| \cos \frac{n\pi x}{L} \|^2 = \langle \cos \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{n\pi x}{L} \rangle = L, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\| \sin \frac{n\pi x}{L} \|^2 = \langle \sin \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \rangle = L, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo em termos do produto escalar os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \langle f(x), \cos \frac{n\pi x}{L} \rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \langle f(x), \sin \frac{n\pi x}{L} \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

COMENTÁRIOS:

- (1) Pode-se verificar que se  $f$  e  $g$  estão no espaço  $C_{[a,b]}$  a expressão de  $\langle f, g \rangle$  satisfaz os axiomas de definição de produto interno

- (2) Observe que o produto escalar foi definido no espaço das funções contínuas  $C_{[a,b]}$ . No caso do espaço das funções seccionalmente contínuas para se usar a mesma definição precisamos adequar a definição de função nula de tal forma que os axiomas de definição sejam cumpridos. Assim vamos redefinir a função nula como sendo a que se anula em quase toda parte, isto é, quando for nula exceto num número finito de pontos.
- (3) Existem duas propriedades muito úteis quando se usa o produto interno:

- (a) Desigualdade de Cauchy-Schwarz - Se  $f$  e  $g$  são vetores de um espaço com produto interno, então

$$\langle f, g \rangle^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$$

- (b) Desigualdade Triangular - Se  $f$  e  $g$  são vetores de um espaço com produto interno, então

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

- (4) Se o espaço vetorial fosse definido com escalares complexos teríamos um espaço vetorial complexo. Neste caso a definição de produto interno baseada em axiomas deve ser reformulada pois caso contrário teríamos um absurdo, por exemplo, a condição  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$  deve ser obedecida para  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . No entanto se tivermos  $\vec{w} = i\vec{v}$ , então

$$\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle i\vec{v}, i\vec{v} \rangle = i^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

que é menor que zero! Salvo dito ao contrário trataremos apenas do caso real.

## 8.7 RESUMO

Vamos admitir que a função  $f(x)$ , definida em  $-L \leq x \leq L$ , possa ser representada pela série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\pi x/L + b_n \sen n\pi x/L],$$

Sob condições adequadas, que serão apresentadas no próximo capítulo, os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , são expressos por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se estes coeficientes existem, a série trigonométrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\pi x/L + b_n \sen n\pi x/L]$$



é chamada de *série de Fourier trigonométrica* de  $f(x)$ , sendo  $a_n$  e  $b_n$  os *coeficientes de Fourier*

As principais simplificações na determinação dos coeficientes são:

a) Se  $f$  for uma função **par** em  $-L \leq x \leq L$ , então  $b_n = 0$ , e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx$$

e a série **não** tem **senos**.

b) Se  $f$  for uma função **ímpar** em  $-L \leq x \leq L$ , então  $a_n = 0$ , e

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(n\pi x/L) dx$$

e a série tem apenas senos.

c) Se  $f$  for periódica de período  $2L$ , o valor das integrais entre  $-L \leq x \leq L$ , é o mesmo que entre  $C \leq x \leq C + 2L$  para qualquer  $C$  real.

Se a função  $f$  **não** for periódica porém estiver definida no intervalo **limitado**,  $0 < x < L$ , faz-se uma extensão periódica  $F(x)$  geralmente no intervalo  $(-L, L)$  e de período  $2L$ . As duas principais extensões são a par, que fornece a série de cossenos, e a ímpar que fornece apenas a série de senos.

### Forma Cosenoidal da Série de Fourier

Geralmente quando a variável independente for o tempo, usa-se outras representações equivalentes da SF. Se  $f$  for uma função periódica de período  $2L = T$  de tal forma que se tenha a representação na SF trigonométrica então:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0t)]$$

onde  $w_0 = 2\pi/T$ . Se fizermos:

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad C_0 = a_0/2, \quad \cos \theta_n = a_n/C_n$$

temos a SF cosenoidal

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nw_0t - \theta_n)$$

### Forma Exponencial da Série de Fourier

Se na SF trigonométrica designarmos

$$c_0 = a_0/2$$

$$c_n = (a_n - ib_n)/2 \quad , \quad c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$$

temos a SF complexa ou exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t}$$

cujos coeficientes são dados por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-inw_0 t} dt$$

As principais relações entre esses coeficientes são:

$$c_n = |c_n| e^{i\phi_n} \quad , \quad c_{-n} \equiv \bar{c}_n = |c_n| e^{-i\phi_n}$$

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad c_0 = a_0/2$$

$$\phi_n = \arctan(-b_n/a_n), \quad n \neq 0$$

Num gráfico onde no eixo da abscissa colocamos as frequências angulares  $w_n = nw_0$  e no eixo das ordenadas  $|c_n|$  temos o espectro de amplitude. Se em vez de  $|c_n|$  colocarmos no eixo vertical os ângulos de fase  $\phi_n$  temos o espectro de fase. Esses gráficos apresentam uma curva **discreta** sendo que o espectro de amplitude não é afetado pelo deslocamento da origem, ao passo que o espectro de fase sim.

Podemos apresentar a SF com o enfoque do produto interno, qual seja, representar uma função no espaço vetorial das funções seccionalmente contínuas no intervalo  $[-L, L]$  com infinitas componentes. Isto é feito ao definir o produto escalar como sendo o número

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (8.23)$$

Os conceitos de distância (norma), distância, ortogonalidade são definidos de forma análoga ao caso do espaço  $R^3$ . e temos:

$$a_n = \frac{\langle f(x), \cos n\pi x/L \rangle}{\|\cos n\pi x/L\|^2} = \frac{1}{L} \langle f(x), \cos n\pi x/L \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{\langle f(x), \sin n\pi x/L \rangle}{\|\sin n\pi x/L\|^2} = \frac{1}{L} \langle f(x), \sin n\pi x/L \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 8.8 Exercícios Propostos

- (1) No intervalo  $[-\pi, \pi]$  calcule as integrais das funções  $\cos ax \cos px$ ,  $\sin ax \cos px$  e  $\sin ax \sin px$  nos casos :  $p \neq a$  e  $p = a$ .

- (2) Represente a função
- $f$
- , definida por

$$f(x) = \cos 2x \quad , \quad -\pi < x < \pi,$$

em Série de Fourier. *Resp.*  $\cos 2x$ 

- (3) Mostre que
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$
- é a SF da função

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

- (4) Mostre que se
- $f$
- é periódica de período
- $T$
- então
- $g(t) = f(\alpha t)$
- ,
- $\alpha > 0$
- , é periódica de período
- $T/\alpha$
- .
- 
- (5) Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} -L - x, & -L \leq x < 0 \\ L - x, & 0 \leq x < L, \end{cases}$$

tem a seguinte série de Fourier

$$\frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

- (6) Mostre que a SF da função
- $f(t) = \operatorname{sen}^2 t \cos^3 t$
- é dada por
- $(2 \cos t - \cos 3t - \cos 5t)/16$
- .
- 
- (7) Se
- $f$
- e
- $g$
- forem periódicas de período
- $T$
- mostre que
- $f + g$
- e
- $fg$
- serão também periódicas de período
- $T$
- .
- 
- (8) Determine a SF da função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}$$

*Resp:*  $\frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{5} + \dots \right)$ 

- (9) Determine as séries de Fourier das funções

$$f(x) = x \quad , \quad g(x) = |x| \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

e a partir delas obtenha a série de Fourier da função definida por:

$$f(x) = 0 \quad , \quad \text{em } -\pi < x < 0 \quad , \quad f(x) = x \quad , \quad \text{em } 0 \leq x < \pi$$

- (10) Usando a expansão da função,
- $f(x) = e^x$
- ,
- $-\pi < x < \pi$
- , verifique que:

$$\begin{aligned} \cosh x &\propto \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx \right] \\ \sinh x &\propto \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2} n \operatorname{sen} nx \end{aligned}$$

- (11) Determine as SF das funções definidas por:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi x/4, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

A partir destes resultados determine a SF das funções:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/4 & , \pi < x < 0 \\ (\pi x - 1)/4 & , 0 < x < \pi \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

- (12) Nem toda função definida em  $R$  é par ou ímpar, no entanto, podemos escrevê-la como a soma de duas funções sendo uma **par** e outra **ímpar**. Por exemplo  $f(x) = \exp x$  pode ser escrita como

$$e^x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x + \sinh x$$

onde  $\cosh x$  é função par e  $\sinh x$  é função ímpar. Generalize este resultado, ou seja, mostre que qualquer função real  $f(t)$ ,  $t \in R$ , pode ser expressa como a soma de 2 componentes sendo uma função par e a outra ímpar.

**Sugestão:**  $f(t) \equiv \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$

- (13) Encontre as componentes, par e ímpar, da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

e represente-as geometricamente:

- (14) Encontre as componentes, par e ímpar, da função

$$(a) f(t) = t \sin t - \sin 2t, \quad \text{Resp: } f_p = t \sin t \quad f_i = -\sin 2t$$

- (15) Se  $f$  é uma função ímpar mostre que  $|f(t)|$  é par.

- (16) O conjunto das funções (reais) contínuas de valores reais definidas no intervalo  $[a, b]$ , isto é, as funções de classe  $C_{[a,b]}$ , com as operações usuais:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) & f, g \in C_{[a,b]} \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) & \alpha \in R \end{aligned}$$

constitui um espaço vetorial. Neste espaço prove que

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f(x)g(x)dx$$

é um produto escalar (usual) em  $C_{[a,b]}$ .

- (17) Seja  $f$  uma função real de período  $T$ . Mostre que  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  é periódica de período  $T$  se e só se  $\int_0^T f(t)dt = 0$ .

**Sugestão:** Mostre primeiramente que  $F(t + T) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt + \int_0^t f(t)dt$

- (18) Se a função for diferenciável prove que a derivada de uma função par é ímpar e que a derivada de uma função ímpar é par.
- (19) Seja  $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ . Mostre que se  $f$  for par então  $F$  será ímpar e que se  $f$  for ímpar então  $F$  é par.
- (20) Dê um exemplo de uma função periódica mas que sua integral não é periódica.  
Resp:  $1 + \cos t$

- (21) Se  $f$  é diferenciável e periódica de período  $T$ , mostre que  $f'$  é periódica de mesmo período .
- (22) Encontre as SF complexa da função periódica de período 2,

$$f(x) = x \quad , \quad -1 < x < 1$$

- (23) Determine a SF de  $f(x) = \cos^5 x$ .  
*Sugestão:* Expresse  $\cos x$  na forma exponencial complexa e use o binômio de Newton.
- (24) Calcule a SF da função:

$$f(\theta) = e^{r \cos \theta} \cos(r \operatorname{sen} \theta)$$

*Sugestão:* Se  $z = r \cos \theta + ir \operatorname{sen} \theta$ , tem-se  $f(\theta) = \operatorname{Re} e^{z \cdot}$  escreva a série de Taylor de  $e^z$  e conclua que  $f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta)/n!$

- (25) Se  $\alpha$  não for inteiro use a forma complexa para obter a SF da função periódica de período  $2\pi$ ,  $f(x) = \cos \alpha x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ .
- (26) Desenvolva a função de período  $2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < h \\ 0 & h < t < 2\pi \end{cases}$$

em SF complexa. e mostre que:

$$f(t) = \frac{h}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \operatorname{sen} n(h-t) + \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt \right]$$

- (27) Se  $f(t)$  e  $g(t)$  são funções periódicas de período  $T$  e as expansões em SF complexa forem:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t} \quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inw_0 t},$$

onde  $w_0 = 2\pi/T$ , mostre que a função

$$h(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

é periódica de período  $T$  e pode ser expressa como:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{inw_0 t}$$

- (28) Use a forma complexa para obter a SF da função de período  $2\pi$

$$f(x) = e^{\alpha x} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$\text{Resp: } e^{\alpha x} = \frac{\sinh \pi \alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha \cos nx - n \operatorname{sen} nx) \right]$$



## Chapter 9

# Análise da Convergência da Série de Fourier

**Finalidade** - Do que foi apresentado no capítulo anterior é evidente que será útil a Série de Fourier que converge, e se possível, para a própria função. O fato de existir os coeficientes, que para tal se exige muito pouco da função  $f$ , não garante necessariamente a convergência e que para tal necessitará de hipóteses adicionais sobre esta função. Assim uma vez obtida a SF de uma função, três perguntas básicas surgem naturalmente:

1) Quais as hipóteses que devem ser impostas sobre a função  $f$  para que ocorra a convergência da série?

2) Se a série converge será que converge para a própria função?

3) Se a série converge a convergência é pontual, uniforme ou na média?

Por outro lado mesmo que a SF convirja nem sempre esta convergência é rápida. Diante disso temos outras duas perguntas:

a) Qual a classe de funções em que a SF converge mais rapidamente?

b) Uma vez encontrada a SF é possível melhorar a velocidade da convergência?

A finalidade deste capítulo será discutir estes aspectos além de apresentar as hipóteses sobre as quais podemos derivar, ou integrar termo a termo a Série de Fourier .

### 9.1 Condições de Dirichlet para Convergência da SF

#### 9.1.1 Espaço das Funções a ser Utilizado

Como a SF de uma função  $f$  é periódica de período  $2L$ , para que haja convergência é necessário, antes de mais nada, que esta função também seja periódica de período  $2L$ . No entanto a periodicidade não é suficiente mesmo quando os coeficientes existem. Assim é necessário que sejam adicionadas outras hipóteses, que dentro do possível, sejam abrangentes para cobrir a maioria dos problemas de interesse e ao mesmo tempo simples para serem facilmente verificadas.

Pelas pesquisas realizadas sobre o assunto elaboraram-se diversas condições suficientes para cumprir este objetivo. As que serão apresentadas, *condições de Dirich-*

let, não são as mais gerais, porém são muito práticas e se baseiam na classe de funções seccionalmente contínuas.

Diz-se que uma função  $f$  é *seccionalmente contínua* num intervalo limitado  $a \leq x \leq b$  se:

a)  $f$  é contínua em  $a \leq x \leq b$ , exceto possivelmente em um **número finito** de valores de  $x$  deste intervalo;

b)  $f$  tem limite lateral a direita em  $x = a$ , limite lateral a esquerda em  $x = b$ , e ambos os limites para todo  $x$  no intervalo  $a < x < b$ . Ou seja se num ponto interno tivermos descontinuidade, existem ambos os limites laterais o que caracteriza descontinuidade de salto ou de primeira espécie

Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq \pi \\ -1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

é seccionalmente contínua em  $-\pi \leq x \leq \pi$ , porém, as funções  $1/x$  e  $\sin 1/x$  não são seccionalmente contínuas em  $[0, 1]$ .

Como os limites laterais são usados com frequência vamos denotar por  $f(c^+)$  e  $f(c^-)$ , respectivamente, limite lateral à direita e limite lateral à esquerda em  $x = c$ . Por exemplo, a partir o exemplo anterior tem-se:

$$f(0^+) = 1, \quad f(0^-) = -1, \quad f(1^+) = 1, \quad f(1^-) = 1, \quad f(\pi^-) = 1, \quad f(-\pi^+) = -1$$

sendo que os valores de  $f(\pi^+)$  e  $f(-\pi^-)$  **não** estão definidos.

Como no principal resultado sobre convergência usa as hipóteses que as funções,  $f$  e  $f'$  sejam seccionalmente contínuas isto motiva a seguinte definição. Uma função  $f$  é *seccionalmente diferenciável* ou *seccionalmente suave* em  $a \leq x \leq b$  se  $f$  e  $f'$  forem seccionalmente contínuas nesse intervalo. Para ilustrar, a função dada anteriormente é seccionalmente suave, porém a função

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \leq 1$$

é seccionalmente contínua, mas **não** é seccionalmente suave pois não existem os limites  $f'(-1^+)$ ,  $f'(-1^-)$ .

### COMENTÁRIOS:

- (1) Toda função contínua é seccionalmente contínua. ;
- (2) Uma função  $y = f(x)$  que tem derivada contínua em  $[a,b]$  é denominada suave. Geometricamente significa que a direção da rea tangente altera continuamente, sem saltos ao longo do gráfico desta função;
- (3) Funções contínuas, e de forma mais geral seccionalmente contínuas, num intervalo fechado  $a \leq x \leq b$  são limitadas e integráveis.



- (4) Se duas funções  $f$  e  $g$  são seccionalmente contínuas (suaves) num intervalo  $[a, b]$ , então também são seccionalmente contínuas (suaves) qualquer combinação linear destas funções bem como o seu produto. Consequentemente as integrais de  $af(x) + bg(x)$  e  $f(x)g(x)$  existem neste intervalo.
- (5) Com as operações usuais de soma e produto por um escalar esta classe de funções constitui um espaço vetorial desde que se redefina a função nula como sendo a que se anula em quase toda parte, isto é, quando for nula exceto num número finito de pontos.
- (6) Uma função não precisa estar definida em todos os pontos do intervalo para ser seccionalmente contínua.
- (7) Uma função definida para todo  $x$  real, particularmente as funções periódicas, é dita ser seccionalmente contínua (suave) se ela o for em cada intervalo finito..
- (8) Toda função seccionalmente contínua é absolutamente integrável, mas existe funções absolutamente integráveis que não são seccionalmente contínuas, como por exemplo,  $f(x) = x^{-1/2}$  no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ .

### 9.1.2 Condições Suficientes para a Convergência Pontual

Antes de apresentar estas condições uma análise superficial nos exercícios e gráficos feitos no capítulo anterior parece indicar que:

- a medida que aumentarmos o número de termos melhora a convergência;
- nos pontos de descontinuidade da função a SF converge para a média dos valores limites à esquerda e à direita;
- a função desenvolvida não tem grandes restrições, é apenas periódica e seccionalmente suave.

De fato estes ingredientes fazem parte das hipóteses do teorema de convergência pontual que será apresentado a seguir.

**Teorema de Convergência Pontual** - Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $[-L, L]$ , periódica de período  $2L$  tal que neste intervalo  $f$  seja **seccionalmente suave**. Então os coeficientes da SF de  $f$  **existem** e a SF correspondente converge em todos os valores de  $x$  e a sua soma é igual a

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Particularmente se  $f$  for **contínua** em  $x = x_0$  a soma da SF será igual  $f(x_0)$ . Se for adicionada a hipótese de  $f(x)$  ser **contínua** em **toda** reta então pode-se mostrar que a série converge **absolutamente** e **uniformemente**.

**Exercício** - Verifique a convergência da série de Fourier da função periódica de período  $2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

encontrada no capítulo anterior.

**Solução** - Como  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas em  $[-\pi, \pi]$ , a série encontrada anteriormente para esta função

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)x$$

converge em todos os pontos para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ , isto é

$$[f(x^+) + f(x^-)]/2 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)x$$

Por exemplo, desde que  $x = 0$  é ponto de descontinuidade, a série de Fourier convergirá para  $[f(0^+) + f(0^-)]/2 = 0$ . Por outro lado como  $x = \pi/2$  é ponto de continuidade a série de Fourier convergirá para  $f(\pi/2) = 1$ , ou seja, para

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} + \dots \right]$$

que fornece a série numérica

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

chamada de *série de Leibniz* ◀

Este exemplo ilustra alguns aspectos importantes da SF:

**a)** Mesmo que cada termo da série seja uma função contínua e infinitamente diferenciável a SF pode convergir para uma soma que **não** é diferenciável ou mesmo contínua;

**b)** A convergência pode ser usada para determinar a soma de uma série numérica.

Embora exista convergência este exercício mostra um fato que do ponto de vista físico pode ser inconveniente - a convergência é lenta!. Quando a variável  $x$  for o tempo e como os coeficientes são proporcionais a  $1/n$ , a onda "quadrada" conterà muitas componentes de alta frequência, o que pode ser indesejável pois se um dispositivo eletrônico não suporta tais componentes na saída tem-se uma forma distorcida. Assim as séries mais convenientes são aquelas cujos coeficientes aproximam-se de zero rapidamente e neste caso poucos termos seriam suficientes para dar à soma uma precisão razoável. Diante disto é importante fazer uma análise da velocidade da convergência; o que será feito na seção seguinte.

**Exercício** - Expandir a função periódica de período  $2\pi$  definida por

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

em Série de Fourier e analisar a sua convergência.

**Solução** - A função é contínua e seccionalmente suave em  $R$ , e portanto, a série de Fourier convergirá em **todos** os pontos para a função  $f(x) = x^2$ . Como a função é contínua em toda reta a convergência é **absoluta** e **uniforme**.

Um cálculo simples mostra que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^2/3$$

Integrando-se duas vezes por partes tem-se que:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

Como a função é par temos que  $b_n = 0$ , e portanto para todo ponto  $x$  segue

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right) \blacktriangleleft$$

**Exercício** - Determine a série de Fourier da função periódica de período  $2\pi$ , definida por

$$f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi$$

e analise a sua convergência:

**Solução** - Como a função é ímpar temos que  $a_n = 0$ . e  $b_n$  dado por

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx,$$

que após ser integrada por partes fornece

$$b_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

Como  $f$  é seccionalmente suave em  $-\pi < x \leq \pi$  existe convergência pontual, e nos **pontos de continuidade** tem-se

$$x = 2\left[\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots\right] \blacktriangleleft$$

**Exercício** - Expandir e analisar a convergência da série de Fourier da função periódica de período  $2\pi$  definida por

$$f(x) = |\operatorname{sen} x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

**Solução** - Como a função é par temos que  $b_n = 0$ . Desde que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\int_{-\pi}^0 \operatorname{sen} x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx dx \right]$$

após transformar o produto  $\operatorname{sen} x \cos nx$  em uma soma algébrica e calcular estas integrais, tem-se

$$a_n = \frac{2[1 + (-1)^n]}{\pi(1 - n^2)} = \begin{cases} 0 & n \text{ ímpar} \neq 1 \\ \frac{4}{\pi(1 - n^2)} & n \text{ par} \end{cases}$$

Como este resultado não é válido para  $n = 1$ , deve-se calcular separadamente  $a_1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left[ - \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen} x \cos x dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x dx \right],$$

que fornece  $a_1 = 0$ .

Fazendo  $n = 2m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  e como a função

$$f(x) = |\operatorname{sen} x|$$

é **contínua e** seccionalmente suave no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , e sendo  $f(-\pi) = f(\pi)$ , a série de Fourier de  $f$  pode ser escrita como

$$|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{(1 - 4m^2)}, \quad -\pi \leq x \leq \pi \blacktriangleleft$$

#### COMENTARIOS:

- (1) Embora sejam raras mas existem funções onde a **continuidade** de  $f$  por si só **não garante a convergência** da SF!. No entanto temos a seguinte condição suficiente para funções contínuas: Se  $f$  é contínua e satisfaz a condição de Lipchitz em  $x_0$ , então a SF de  $f$  converge para  $f(x_0)$  [2].
- (2) Se a função **não** for periódica e estiver definida apenas em  $(-L, L)$ , porém as demais condições de Dirichlet forem verdadeiras, a série de Fourier irá convergir na extensão periódica desta função.
- (3) Se  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas em  $[-\pi, \pi]$  e tem a mesma série de Fourier, então  $f_1 = f_2$
- (4) Se  $f(x)$  está definida em  $-L \leq x \leq L$  e for periódica de período  $2L$ , a SF nas extremidades convergirá para o valor:  $[f(L) + f(-L)]/2$ . Assim se  $f(L) = f(-L)$  a série convergirá para  $f(x)$  inclusive no pontos extremos.
- (5) A prova do teorema de convergência pontual é um tanto trabalhosa, consulte as referências, por exemplo, em [2] e [8]. As condições são **suficientes**, mas **não necessárias**, isto é, se elas são satisfeitas a convergência ocorrerá, mas não sendo a série poderá ou não convergir.
- (6) Como **convergência uniforme** de uma série de funções **implica** em **convergência pontual**, é de se esperar que para a ocorrência da primeira deve-se ter sobre a função, condições mais severas do que as impostas na convergência pontual. Pode ser provado, referência [2], que se  $f$  satisfizer as condições de Dirichlet haverá sempre convergência uniforme em cada **intervalo fechado** não contendo pontos de descontinuidade.

- (7) Na vizinhança de uma descontinuidade a convergência da SF **não** é satisfatória, não importando o número de termos tomados. Este aspecto curioso é conhecido como **fenômeno de Gibbs**. A inclusão de mais termos não remove, mas move para o ponto de descontinuidade, ou seja a amplitude permanece independente de  $n$ , quando  $n$  cresce. Tem sido propostos alguns métodos para superar este problema, porém, se melhora por um lado piora em outros. Para maiores informações consulte as referências [2], [8] e [11]

## 9.2 Derivação da Série de Fourier

Por vezes temos necessidade de derivarmos, ou integrarmos, uma função representada pela série de Fourier. Neste sentido, uma vez conhecida a SF de uma função  $f$  será que podemos derivá-la termo a termo para obter a série de  $f'$ ? Desta forma torna-se indispensável saber em quais condições a representação da SF de uma função é termo a termo **diferenciável**. Antecipadamente informamos que em geral isto não ocorre, mesmo que  $f$  satisfaça as condições de Dirichlet.

Para ilustrar esta situação observe que se  $f(x) = x$ ,  $-\pi < x < \pi$ , periódica de período  $2\pi$ , então como já vimos a SF

$$x = 2 \left[ \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} - \dots \right]$$

**converge** para todo  $x$  no intervalo. No entanto, a **série** obtida **após a derivação** formal, termo a termo,

$$2 [\cos x - \cos(2x) + \cos(3x) - \dots],$$

**diverge** para todo  $x$  em  $-\pi < x < \pi$  (pois o termo geral desta série não tende a zero). Esta divergência **não** causa surpresa pois na operação de derivação aparece num fator  $n$  em cada termo do **numerador**, o que reduz a razão de convergência, podendo mesmo, como no exemplo anterior, divergir. Na verdade a **continuidade** da função periódica em todo  $R$  é uma importante condição para derivação da SF.

Para pesquisar o que acontece quando se deriva uma série vamos admitir que  $f$  seja uma função periódica de período  $2\pi$  com os seguintes requisitos:

- a)  $f$  é **contínua** em  $-\pi \leq x \leq \pi$  e  $f(-\pi) = f(\pi)$ , isto é,  $f$  é **contínua em todo  $R$** ;
- b)  $f'$  seccionalmente suave neste intervalo.

Como  $f$  e  $f'$  são seccionalmente suaves estas funções tem representações em SF que admitamos ser:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx],$$

198

o que acontece em **todos** os pontos  $x$  pois  $f$  é contínua, e

$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a'_k \cos kx + b'_k \sin kx],$$

nos pontos de continuidade, onde:

$$\begin{aligned} a'_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx \\ a'_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx \\ b'_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando a hipótese

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

temos que

$$a'_0 = 0, \quad a'_k = kb_k, \quad b'_k = -ka_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto nos **pontos de continuidade** a série de  $f'$ , torna-se

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx]$$

Este resultado, estabelecido a partir de **condições suficientes**, é precisamente o que obteríamos derivando termo a termo a representação de  $f(x)$ .

Nos pontos de descontinuidade de  $f'$ , a derivação termo a termo será válida no sentido

$$\frac{1}{2} [f'(x^+) + f'(x^-)] = \sum_{k=1}^{\infty} [-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx]$$

**Conclusão** - Se  $f$  é periódica de período  $2\pi$  e **contínua** em **toda** reta e se  $f'$  satisfaz as condições de Dirichlet então a SF para  $f'$  pode ser obtida **derivando a série de  $f$  termo a termo** e a série diferenciada irá convergir pontualmente para

$$[f'(x^+) + f'(x^-)] / 2$$

**Exercício** - Use o resultado obtido anteriormente

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1 - 4n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

para determinar a S.F da função  $\cos x$ , no intervalo de  $0 < x < \pi$ .

**Solução** - Desde que  $f(x) = |\sin x|$  é contínua no intervalo  $[-\pi, \pi]$ ,  $f'$  é seccionalmente suave em  $[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ , e sendo,

$$\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1 - 4n^2}, \quad 0 < x < \pi,$$

derivando-se termo a termo temos

$$\cos x = \frac{-8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} 2nx}{1 - 4n^2}, \quad 0 < x < \pi$$

### Comentários:

- (1) Na derivação da série da função periódica o período em vez de ser  $2\pi$ . pode ser arbitrário  $2L$ .
- (2) Se as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  forem contínuas em  $[a, b]$  e suas derivadas existem, exceto num número finito de pontos, porém  $f'$  e  $g'$  absolutamente integráveis, particularmente se  $f'$  e  $g'$  forem seccionalmente contínuas, podemos usar integração por partes

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

- (3) É indispensável que a extensão da função  $f$ , seja contínua na reta toda, porém quanto a sua derivada  $f'$  pode ser absolutamente integrável, isto é numa classe mais ampla. Porém neste caso é evidente que a série obtida por derivação não necessariamente irá convergir para  $f'$  ou para a sua média num ponto de descontinuidade (ver ref [14]).

### 9.3 Velocidade de Convergência da Série de Fourier

Nos exercícios apresentados observe que os coeficientes de Fourier são proporcionais a  $1/n$ , ou a  $1/n^2$  induzindo a imaginar que em qualquer expansão ambos tendem a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto de fato acontece de acordo com o seguinte resultado:

**Teorema de Riemann-Lebesgue** - Se as condições de Dirichlet estão satisfeitas os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  satisfazem a propriedade:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

No entanto esta aproximação pode ser lenta e assim deve-se trabalhar com muitos termos para encontrar uma representação razoável. Para buscar subsídios porque uma série converge melhor do que outra vamos analisar a SF da função

$$f(x) = x, \quad 0 < x \leq 2$$

Ao se fazer as extensões, par e ímpar, de período  $2L = 4$ , no capítulo anterior encontrou-se, respectivamente,

$$x = 1 + \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right), \quad 0 < x \leq 2$$

$$x = \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2} - \dots \right), \quad 0 < x < 2$$

Estas séries representam a mesma função no intervalo  $0 < x < 2$ , porém, existe uma sutil diferença: enquanto na primeira os coeficientes são proporcionais a  $1/n^2$ , na segunda eles são proporcionais a  $1/n$ , em outras palavras, as velocidades de convergência destas séries são diferentes!

**Pergunta** - O que justifica esta diferença?

O fato preponderante é que na **extensão par**, onde se deu uma melhor convergência, a função estendida é **contínua em toda reta**.

De um modo geral a velocidade de convergência da série está associada a esta propriedade e, portanto, dependerá da **natureza da função** ou de sua extensão.

Para investigar a *velocidade* da convergência vamos supor que  $f$  e suas derivadas satisfazem as condições de Dirichlet nos seguintes casos particulares:

**a) A função  $f$  não é contínua na reta**

É o caso da extensão **ímpar** do exercício anterior. Neste caso os coeficientes convergem para zero tal como  $1/n$ ,

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$$

**b) A função  $f$  é contínua em toda reta, porém,  $f'$  não**

É o caso da extensão **par** do exercício anterior. Neste caso os coeficientes convergem para zero tal como  $1/n^2$ ,

$$1/2^2, 1/3^2, 1/4^2, \dots$$

**c) As funções  $f$  e  $f'$  são contínuas em toda reta, porém  $f''$  não.**

Os coeficientes convergem para zero tal como a sequência

$$1, 1/2^3, 1/3^3, 1/4^3, \dots$$

Em geral se  $f$  é de **classe**  $C^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , em toda reta, enquanto que  $f^{(n)}$  é **descontínua**, a convergência ocorre tal como:

$$1, 1/2^{n+1}, 1/3^{n+1}, 1/4^{n+1}, \dots$$

**Resumindo** - Quanto maior for a ordem de derivação da extensão  $F$  de  $f$  de tal forma que as derivadas sejam **contínuas em todo intervalo**  $-\infty < x < \infty$ , isto é, quanto mais suave for a função, mais rapidamente a SF convergirá.

A justificativa desse fato se baseia na integração por partes dos coeficientes. Para ilustrar tomamos como exemplo os coeficientes  $b_n$ .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L}{n} \left[ \frac{f(x) \cos n\pi x/L}{\pi} \right]_0^{2L} + \frac{L}{n\pi} \int_0^{2L} f'(t) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$



O 1º termo do lado direito é calculado separadamente entre dois pontos consecutivos de descontinuidade de  $f$ , (se não existem pontos de descontinuidade este termo **desaparecerá**). Se existe descontinuidade de  $f$ , desde que a integral do 2º membro tende a zero quando  $n$  tende a infinito, um limitante para  $b_n$  é  $M/n$ . Se não existem pontos de descontinuidade de  $f$ ,  $M = 0$ , e portanto,

$$b_n = \frac{L}{n\pi} \int_0^{2L} f'(t) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

A partir desta expressão repete-se o raciocínio anterior, (ver referência [14]). .

**Como melhorar a velocidade de convergência** - O tipo de extensão pode melhorar a convergência de uma SF, no entanto, isto nem sempre é o suficiente, neste caso usa-se séries de referência aliadas a identidades algébricas conhecidas. O exercício a seguir ilustra uma aplicação deste procedimento:

**Exercício** - Use a identidade

$$\frac{n^3}{n^4 - 1} - \frac{1}{n} \equiv \frac{1}{n^5 - n}$$

e a série de referência

$$g(x) = x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right), \quad -\pi < x < \pi$$

para melhorar a convergência da série

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 - 1} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi$$

**Solução** - Quando  $n \rightarrow \infty$  o fator que aparece nesta série é da ordem  $1/n$  o que caracteriza baixa velocidade de convergência. Por meio da identidade apresentada tem-se

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

Por outro lado a série de  $g(x) = x$  permite escrever:

$$-\frac{x}{2} + \sin x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

Inserindo

$$-\frac{x}{2} + \sin x$$

na expressão de  $f(x)$ , obtém-se:

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n}$$

cuja convergência é mais rápida do que a inicialmente apresentada, pois é da ordem de  $1/n^5$  quando  $n \rightarrow \infty$ . ◀

### COMENTÁRIOS

- (1) Existem outras técnicas para melhorar a convergência e uma análise mais detalhada pode ser encontrada nas referências [11] e [14].
- (2) Na representação cosenoidal a altura das raias isto é os valores de  $|c_n|$  no gráfico diminuem mais depressa para as ondas cuja séries convergem rapidamente isto é, nas funções sem descontinuidade e com forma suave. Neste caso os termos após do 5º ou 6º deixam de ter importância, ao contrário de funções que possuem descontinuidade, como a dente de serra, onde o harmônico de 10º ordem possui amplitude de valor significativo.
- (3) Podemos também melhorar a convergência da SF através de um fator  $F_n$ , que multiplica  $a_n$  e  $b_n$  e que é chamado de **fator de Lanczos** [11].

### 9.4 Integração da Série de Fourier

Na integração termo a termo da S.F aparece o fator  $n$  no denominador do termo geral o que permite efetuarla sob condições menos restritiva do que na derivação como afirma o seguinte resultado:

Se  $f$  é seccionalmente contínua no intervalo  $[-\pi, \pi]$  e periódica de período  $2\pi$  então a série de Fourier correspondente a  $f$ ,

$$f(x) \propto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

**convergente ou não**, pode ser integrada termo a termo, ou seja,

$$\int_{-\pi}^x f(z) dz = \frac{1}{2} a_0 (x + \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n \sin nx - b_n (\cos nx - \cos n\pi)]$$

onde  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

**Exercício** - Por meio da expansão em SF da função

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi,$$

de período  $2\pi$ , determine a expansão da função  $g(x) = x^2$ .

**Solução** - Como foi visto a expansão da função  $f(x) = x$ , em  $-\pi < x < \pi$ , é dada por

$$x = 2 \left[ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

Como  $f$  é seccionalmente contínua, podemos integrar a série termo a termo de  $a$  a  $x$ , obtendo:

$$\frac{1}{2}(x^2 - a^2) = 2[-(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots) + (\cos a - \frac{\cos 2a}{2^2} + \frac{\cos 3a}{3^2} \dots)]$$

Para determinar a soma da série de constantes usa-se um artifício, escrevendo:

$$\frac{x^2}{4} = C - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}$$

onde  $C$  é uma constante. Desde que a série da direita é uma SF que **converge uniformemente** podemos integrá-la termo a termo no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , obtendo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = 2 \left[ \int_{-\pi}^{\pi} C dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right]$$

Calculando as integrais tem-se

$$\frac{\pi^3}{3} = 2(2\pi C) \Rightarrow C = \pi^2/12$$

e portanto:

$$x^2 = 4 \left[ \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2} \right] \blacktriangleleft$$

### COMENTÁRIOS:

- (1) Na integração termo a termo da SF de  $f$ , estritamente falando não temos uma SF quando  $a_0 \neq 0$ , pois aparece o termo  $a_0 x/2$ , em outras palavras a integral de uma função periódica cujo **valôr médio não é nulo** não é uma função periódica. Contudo a função definida pela integral

$$\int_{x_0}^x \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx,$$

que é contínua pois  $f$  é seccionalmente contínua e periódica de período igual a de  $f$ , terá uma série de Fourier.

- (2) As condições para a integração da SF é menos restritiva do que a diferenciação, porém na integração, tal como no exemplo anterior, geralmente aparece uma série numérica cuja soma deve ser determinada.
- (3) Parece estranho que na integração mesmo que a série não convirja é possível integra-lá termo a termo. Isto é justificado a partir da função  $F$ , definida por

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(z) dz - a_0 x/2$$

De acordo com o teorema da convergência existe a SF da função contínua  $F$  que conduz ao resultado acima, referências. [2], [13].

- (4) Na integração a função pode ser periódica de período arbitrário  $2L$  e feita entre dois quaisquer limites finitos.

A convergência que analisamos neste capítulo é a **pontual**. Embora este tipo convergência pareça ser a mais natural ela, por vezes, é inadequada para muitas aplicações. No próximo capítulo trataremos de outro tipo de convergência que é a convergência na média e que ocorre para uma classe mais ampla de funções.

## 9.5 RESUMO

Um conjunto de condições suficientes que garante a **convergência pontual** da Série de Fourier é dado pelas condições de Dirichlet que serão apresentadas a seguir:

**Teorema de Convergência Pontual** - Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $[-L, L]$  e periódica de período  $2L$  tal que neste intervalo  $f$  e  $f'$  sejam seccionalmente contínuas. Então os coeficientes da SF de  $f$  existem e a SF correspondente converge em todos os valores de  $x$  e a sua soma é igual a

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Particularmente se  $f$  for contínua em  $x = x_0$  a soma da série será igual  $f(x_0)$ . Se for adicionada a hipótese de  $f(x)$  ser **contínua em toda** reta então pode-se mostrar que a série converge **absolutamente e uniformemente**.

Pelas características da função podemos antecipadamente saber como acontece a velocidade de convergência de uma SF. Se  $f$  é de classe  $C^{n-1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  em toda reta enquanto que  $f^{(n)}$  é descontínua, porém seccionalmente contínua, a convergência ocorre como

$$M/k^{n+1}$$

Para melhorar a convergência de uma Série de Fourier podemos:

- a) ou usar uma extensão adequada da função quando esta for definida apenas num intervalo finito;
- b) ou usar uma série de referência conhecida e uma identidade algébrica adequada.

**Derivação membro a membro de uma Série de Fourier** - Nem sempre esta operação é possível mesmo que a série seja convergente. Se a função satisfizer as restrições:

- a)  $f$  é periódica de período  $2L$  e **contínua em toda reta**;
- b)  $f'$  seccionalmente suave em cada período;

podemos derivar membro a membro sendo que nos pontos de descontinuidade de  $f'$ , a série obtida após a derivação, converjirá para:

$$[f'(x^+) + f'(x^-)]/2$$

**Integração membro a membro** - Ocorre em condições mais gerais, bastando que  $f(x)$  seja seccionalmente contínua em  $[-L, L]$ , periódica de período  $2L$ , convergindo ou não para  $f$ .

## 9.6 Exercícios Propostos

- (1) Supondo que  $f$  seja periódica de período  $2L$  integrável e absolutamente integrável mostre que

$$|a_n| \leq M \quad , \quad |b_n| \leq M \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad .M = L^{-1} \int_{-L}^L f(x) dx$$

- (2) Se  $f(t)$  é periódica de período  $2L$ , de classe  $C^k$  e tem derivadas seccionalmente contínuas de ordem  $k+1$ , mostre que existe um limite  $M$  dependendo unicamente de  $f$  e  $k$  tal que

$$|a_n| < \frac{M}{n^{k+1}} \quad \text{e} \quad |b_n| < \frac{M}{n^{k+1}},$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f$ .

- (3) Melhore a convergência das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^3 + n + 1] \operatorname{sen}(nx) / [n(n^3 + 1)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n^3 / (n^4 + 1)] \operatorname{sen} nx$$

**Sugestão:**  $\frac{n^3+n+1}{n(n^3+1)} \equiv \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3+1}$

- (4) Resolva o seguinte exercício:

- (a) Mostre que

$$(\pi - x)/2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} nx) / n$$

- (b) Integre ambos os lados e calcule a constante de integração a fim de obter a função  $f_2(x)$  tal que

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx / n^2)$$

- (c) Faça  $x = 0$  e mostre que  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$   
 (d) Prove que  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$

- (5) Através da integração da SF de expansão ímpar da função  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 2$ , determine uma série para  $f(x) = x^2$ ,  $0 < x < 2$ . Use este resultado para mostrar que:

$$1 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + 1/5^2 \dots = \pi^2/12$$

- (6) Usando uma série de referência adequada e a identidade

$$\frac{n}{n^3 + 7} - \frac{1}{n^2} \equiv \frac{-7}{n^2(n^3 + 7)}$$

melhore a convergência de

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cos(nx)}{n^3 + 7}, \quad 0 < x < \pi$$

*Resp:*  $\phi(x) = \frac{1}{4}(x^2 - \frac{\pi^2}{3}) + 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2(n^3+7)}$

- (7) Prove que para  $0 \leq x \leq \pi$  tem-se:

(a)  $x(\pi - x) = \pi^2/6 - [(\cos(2x)/1^2 + \cos(4x)/2^2 + \cos(6x)/3^2 + \dots)]$

(b)  $x(\pi - x) = (8/\pi) [(\sin x/1^3 + \sin(3x)/3^3 + \sin(5x)/5^3 + \dots)]$

- (8) Use o exercício anterior para mostrar que:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} /n^2 = \pi^2/12$

(c)  $1/1^3 + 1/3^3 - 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 + 1/11^3 - \dots = 3\pi^3\sqrt{2}/128$

- (9) Obtenha a expansão:

$$\cot(\alpha t) = \frac{\text{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \text{sen}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - \pi^2)} \cos nx$$

para  $\alpha$  não inteiro, sendo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , e a partir deste resultado deduza que:

$$\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \right), \quad \alpha \text{ não é inteiro}$$

- (10) Se  $f$  e  $f'$  forem seccionalmente contínuas em  $-L \leq x < L$ ,  $f$  periódica de período  $2L$ , mostre que  $na_n$  e  $nb_n$  terão limites finitos quando  $n \rightarrow \infty$ .

- (11) Seja  $f$  periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e a SF correspondente:

- (a) Através de integração ache a SF correspondente a

$$F(t) = \int_0^t \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt.$$

- (b) A partir desse resultado mostre que

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(t) dt$$

- (12) Ache a SF da função periódica de período
- $2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} ,$$

e através de integração encontre a SF da função  $g(x) = |x|$ ,  $-\pi < x < \pi$ .

- (13) Ache a SF da função periódica de período  $2\pi$  definida por  $f(x) = x$ ,  $-\pi < x < \pi$ . Porque ao derivar a série obtida não se encontra a série da função  $f(x) = 1$ ,  $-\pi < x < \pi$ ?
- (14) Ache a SF da função periódica de período  $2\pi$  definida por  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi < x < \pi$ . Porque a SF da função periódica de período  $2\pi$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

é a derivada da série anterior?

- (15) Mostre que para
- $-\pi \leq x \leq \pi$

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + 2 \left[ \frac{2}{1.3} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2.4} \operatorname{sen} 3x + \frac{4}{3.5} \operatorname{sen} 4x - \dots \right]$$

e deduza que para  $-\pi \leq x \leq \pi$

$$x \operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \left[ \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 3x}{2.4} + \frac{\cos 4x}{3.5} - \dots \right]$$

Diferenciando esse último resultado mostre que para  $0 \leq x \leq \pi$  tem-se

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

- (16) Seja
- $f$
- seccionalmente contínua em
- $(-\pi, \pi)$
- e periódica de período
- $2\pi$
- . Considere a função
- $F$
- definida por

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(z) dz - a_0 x/2$$

Verifique que:

- a)  $F$  é contínua e  $F(-\pi) = F(\pi)$
- b)  $F' = f(x) - a_0/2$ , exceto nos pontos de descontinuidade, e que  $F$  é seccionalmente suave no intervalo  $(-\pi, \pi)$ .
- c) Expanda  $F$  em Série de Fourier e use integral por partes para determinar os seus coeficientes em termos dos coeficientes da SF da função  $f$ .
- (17) Analise a convergência da SF da função

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

sendo  $f(x) = f(x + 4)$ . A partir deste resultado mostre que:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$$

(18) A função Zeta de Riemann, que é definida por,

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{ou} \quad \zeta(p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} dx \quad , \quad p > 1$$

converge em  $p > 1$  e diverge em  $p \leq 1$ . Através da SF da função  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi < x < \pi$ , determine  $\zeta(2)$ .

(19) Se  $f$  satisfaz as hipóteses do teorema de convergência pontual, e for contínua na vizinhança de zero com  $f(0) = 0$ , qual é o valor da série numérica  $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ?



## Chapter 10

# Convergência na Média e Identidade de Parseval

**Finalidade** - Quando aproximamos uma função  $f(x)$  pela função  $S_n(x)$

$$S_n(x; A_k, B_k) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n [A_k \cos kx + B_k \sin kx] \quad n \text{ fixo,}$$

de um subespaço de dimensão finita onde os coeficientes **não** são necessariamente os coeficientes de Fourier da função  $f$ , comete-se um erro. Qual deve ser a expressão de  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  para que este erro seja mínimo? Que tipo de erro é este?

A finalidade desta lição será:

- (1) Definir erro quadrático e encontrar dentre todas as séries trigonométricas  $S_n$ , a que melhor se aproxima da função  $f$  segundo este erro;
- (2) apresentar a desigualdade de Bessel e a identidade de Parseval que permitirão analisar a convergência na média; e
- (3) analisar a aproximação de uma função  $f$  por uma série trigonométrica pelo teorema da projeção.

A convergência na média ocorre num espaço de funções **mais amplo** do que na convergência pontual e assim em vez de usar funções seccionalmente suaves vamos usar funções periódicas **quadrado integráveis**.

### 10.1 Funções Quadrado Integráveis

Dizemos que a função real  $f(x)$ , definida no intervalo limitado  $[a, b]$ , é quadrado integrável se  $f(x)$  e seu quadrado são integráveis em  $[a, b]$ . Geralmente usa-se a notação  $\mathcal{L}_{[a,b]}^2$  para designar tais funções.

Exemplo: Toda função limitada e integrável, particularmente as seccionalmente contínuas, são quadrado integráveis.

Pode acontecer que  $f$  esteja no espaço  $\mathcal{L}^1$ , onde  $f$  e  $|f|$  são integráveis, mas não no  $\mathcal{L}^2$ . Estes casos podem ocorrer se  $f$  **não** for limitada, por exemplo, se

$$f(x) = x^{-1/2}, \quad 0 < x < 1,$$

existe a integral de  $f$  e de  $|f|$ , porém não existe a integral de  $|f|^2 = 1/x$ .

No entanto se  $f$  for uma função de  $\mathcal{L}^2$  certamente será de  $\mathcal{L}^1$  pelo seguinte motivo:

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  forem funções de  $\mathcal{L}^2$ , isto é quadrado integráveis em  $[a, b]$ , uma vez que

$$|fg| \leq \frac{1}{2} (f^2 + g^2),$$

então  $|fg|$  será sempre integrável. Particularmente tomando  $g = 1$  temos que toda função quadrado integrável será sempre absolutamente integrável ou seja sempre uma função de  $\mathcal{L}^1$ .

Além disso pode-se mostrar no espaço  $\mathcal{L}^2$ , referencia [14], a importante relação

$$\left( \int_a^b fg dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx$$

chamada de desigualdade de Schwarz.

Podemos usar esta desigualdade para mostrar que se  $f$  e  $g$  estão em  $\mathcal{L}^2$  também estará em  $\mathcal{L}^2$  as funções  $f + g$  e  $kf$ , onde  $k$  é uma constante, e portanto  $\mathcal{L}^2$  constitui um espaço vetorial no qual podemos definir um produto interno.

Um conjunto  $\{\phi_n\}$  de funções quadrado integráveis em  $[-L, L]$  é chamado de sistema ortogonal neste intervalo se

$$\int_{-L}^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-L}^L \phi_n^2(x) dx = k_n \neq 0$$

### Comentário:

- (1) Se  $f$  for integrável e limitada então  $f$  será absolutamente integrável ou seja é uma função de  $\mathcal{L}^1$ , porém a recíproca não é verdadeira [8].
- (2) A soma de um número finito de funções quadrado integráveis também será quadrado integrável.

## 10.2 Erro Médio Quadrático

Existem situações que em vez de se usar uma função  $f$ , de um certo espaço, usa-se aproximá-la por outra mais simples  $g$ . Por exemplo, de todos os polinômios da forma

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

poderia se perguntar, qual é o que oferece a melhor aproximação para a função

$$f(x) = \cos x, \quad [0, \pi] ?$$

Neste sentido podemos abordar a SF com o seguinte enfoque: de **todos** os polinômios trigonométricos da forma

$$S_n(x; A_0, A_k, B_k) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n [A_k \cos kx + B_k \sin kx], \quad (10.1)$$

com  $n$  **fixo**, quais são os coeficientes  $A_0$ ,  $A_k$  e  $B_k$  que melhor aproxima  $S_n$  de uma dada função  $f$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  ?

A abordagem nesta aproximação será feita usando o espaço das funções periódicas definidas, em  $[-\pi, \pi]$ , que sejam **quadrado integráveis**, não necessariamente seccionalmente contínuas, podendo a série (infinita) de Fourier convergir pontualmente ou não para a função  $f(x)$ ..

Quando  $f(x)$  é aproximada por  $S_n(x)$ , com  $n$  fixo, isto é quando

$$f(x) \simeq S_n,$$

o "lucro" que teremos será trabalhar com uma função num espaço de dimensão finita, e o "prejuízo" será o erro que se comete em tal aproximação!

Ao substituir a função  $f(x)$  por  $S_n(x)$ , comete-se um desvio dado por:

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

O problema poderia ser colocado também sob a seguinte forma: Quais devem ser os coeficientes  $A_0$ ,  $A_k$  e  $B_k$  para que este desvio seja o menor possível?

Como existem várias formas de expressar erros vamos primeiramente escolher uma que meça a qualidade deste ajustamento entre estas funções no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Embora pareça que a expressão mais natural para este erro fosse o valor máximo de  $|f - S_n|$  neste intervalo, esta geralmente não é adequada pois se  $S_n$  destoar de  $f$  apenas num ponto, como ocorre frequentemente na Série de Fourier, este erro seria "grande" embora  $S_n$  pudesse até ser uma boa aproximação.

Como se pretende medir o erro total na aproximação  $S_n$  de  $f$  poderia se pensar na área entre os gráficos das funções  $f$  e  $S_n$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , isto é, admitir o erro como sendo

$$e_n = \int_{-\pi}^{\pi} |\varepsilon_n(x)| dx \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)| dx$$

Embora esta definição de erro surge de forma intuitiva da geometria, a existência do módulo no integrando geralmente prejudica o seu manuseio nos cálculos e assim vamos descartá-la.

Uma das medidas mais usadas para avaliar a qualidade deste ajustamento, e que aqui será adotada, é o *erro total quadrático*, ou simplesmente *erro quadrático* entre

as funções  $f$  e  $S_n$  no intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , definido como sendo o número  $E_n$  dado por

$$E_n(A_0, A_k, B_k) = \int_{-\pi}^{\pi} [\varepsilon_n(x)]^2 dx \equiv \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \quad (10.2)$$

Conforme veremos neste capítulo esta definição traz consigo uma vantagem adicional pois permitirá aproveitar resultados existentes de projeção ortogonal de qualquer espaço (real)  $V$  munido de produto interno sobre um subespaço  $W$  de dimensão finita.

Observe que todas as funções trigonométricas que aparecem em  $S_n$  são quadrado integráveis e portanto a própria combinação linear  $S_n$  e a diferença

$$f(x) - S_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

também é quadrado integrável.

Diante desta colocação tem-se a seguinte pergunta Para uma dada função  $f$ , quais os valores dos coeficientes para que o erro quadrático  $E_n$  seja mínimo? Que erro é este?

Para responder a estas indagações, desenvolvendo o integrando acima obtemos

$$E_n(A_0, A_k, B_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x) dx$$

Substituindo a expressão de  $S_n$  em  $E_n$  vamos separadamente calcular as integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx \quad \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x) dx$$

Usando o fato de  $a_0$ ,  $a_k$  e  $b_k$  serem coeficientes de Fourier, e portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \pi a_k, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \pi b_k,$$

temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx = \pi A_0 a_0 / 2 + \pi \sum_{k=1}^n [a_k A_k + b_k B_k]$$

Por outro lado usando a propriedade de ortogonalidade das funções  $\{1/2, \sin kx, \cos kx\}$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  segue que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x) dx = \pi A_0^2 / 2 + \pi \sum_{k=1}^n [A_k^2 + B_k^2]$$

Substituindo estas duas últimas integrais na expressão que define  $E_n$ , e completando o quadrado da soma do lado direito, temos que:

$$E_n(A_0, A_k, B_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi(A_0 - a_0)^2/2 + \pi \sum_{k=1}^n (A_k - a_k)^2 + \pi \sum_{k=1}^n (B_k - b_k)^2 - \pi[a_0^2/2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2] \geq 0$$

Observe que a integral de  $f^2$  é uma constante e que o último termo da expressão acima não depende de  $A_0$ ,  $A_k$  e  $B_k$ . Assim  $E_n(A_0, A_k, B_k)$  terá valor mínimo quando

$$A_0 = a_0, \quad A_k = a_k, \quad B_k = b_k$$

ou seja quando os coeficientes de  $S_n$  forem os próprios coeficientes de Fourier. Neste caso a expressão mínima do erro  $E_n$  será

$$E_{n_{\min}}(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi[a_0^2/2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2] \geq 0$$

Como  $f$  é uma função conhecida os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  também o são e portanto o erro  $E_{n_{\min}}$  também é conhecido. Este erro é o **valor mínimo** do erro para um valor **fixo** de  $n$ .

**Conclusão** - Se aproximarmos uma função  $f$  por uma série trigonométrica finita  $S_n(x)$ , então a melhor aproximação no sentido de erro quadrático mínimo ocorrerá quando os coeficientes  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  forem os próprios coeficientes de Fourier da função  $f$ . Vamos designá-la por  $s_n(x)$ , ou seja, por

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx],$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier. Assim sempre teremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

#### COMENTÁRIOS -

- (1) Resultado semelhante também é válido quando a função for definida num intervalo  $[-L, L]$ .
- (2) Função seccionalmente contínua é quadrado integrável.
- (3) O erro médio quadrático entre as funções  $f$  e  $S_n$ , no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , é a expressão

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

- (4) Como veremos oportunamente a expressão do erro mínimo  $E_{n_{\min}}(a_0, a_k, b_k)$  pode ser generalizada para outros conjuntos ortogonais.

### 10.3 Desigualdade de Bessel

Nesta seção vamos admitir que  $f(x)$  seja periódica de período  $2\pi$  e quadrado integrável e investigaremos como ocorre aproximação entre a função  $f$  e a série  $s_n$  dada por

$$E_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx \geq 0, \quad (10.3)$$

A partir da expressão do erro quadrático mínimo desenvolvida anteriormente

$$E_{n_{\min}}(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

observe que como  $f$  é uma função pré-fixada  $E_{n_{\min}}$  não pode aumentar quando  $n$  cresce, porém, pode diminuir. Assim aumentando o número de parcelas  $n$ , as somas parciais  $s_n$  da série de Fourier fornecem aproximações cada vez melhores de  $f$ . Esta expressão ainda fornece a relação

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

a qual é válida para todo  $n$ . Desde que o lado direito **não** depende de  $n$  segue que a desigualdade

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (10.4)$$

ocorre para qualquer função  $f$  do espaço considerado..

Esta expressão, de grande utilidade em matemática pura e aplicada, é chamada de *desigualdade de Bessel* e significa que a soma da série numérica dos quadrados dos coeficientes de Fourier de qualquer função quadrado integrável sempre convergirá.

Desde que o lado esquerdo desta expressão é não decrescente e limitada superiormente, a série numérica

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

é convergente. Como, necessariamente, nas séries convergentes o termo geral tem **limite nulo**, segue que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 \quad (10.5)$$

Podemos provar que este resultado acontece não apenas para o espaço das funções quadrado integráveis mas também para o espaço das funções absolutamente integráveis que mais geral que o primeiro.

## 10.4 Identidade de Parseval

O caso mais interessante na análise feita anteriormente é quando tivermos no limite  $n \rightarrow \infty$  uma igualdade, ou seja, quando o limite do erro médio quadrático **torna-se nulo**. Este caso motiva a seguinte definição:

Uma SF é dita *convergir na média* para  $f(x)$  quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \right]^2 dx = 0 \quad (10.6)$$

e, neste caso, escrevemos:

$$f(x) = \underset{n \rightarrow \infty}{L.i.m.} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]$$

onde *L.i.m.* são as iniciais de expressão inglesa "limit in (the) mean" e le-se: limite na média de  $s_n(x)$  quando  $n \rightarrow \infty$  é igual a  $f(x)$ , ou  $s_n(x)$  converge na média para  $f(x)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Pelo que vimos na seção anterior **se** a SF converge na média para  $f(x)$  então ocorre a igualdade

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (10.7)$$

que é chamada de *identidade de Parseval*.

**Pergunta** - Para que classe de funções existe a convergência na média quadrática ou seja quando a identidade de Parseval é válida?

Embora não seja imediato pode ser provado o seguinte resultado:

**Resultado Chave** - Os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica para as funções reais periódicas de período  $2L$  e quadrado integráveis, e como consequência as seccionalmente contínuas, obedecem a condição

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0,$$

ou equivalentemente a identidade de Parseval, e portanto a SF de  $f$  converge na média quadrática para  $f$  (ver referência [14]).

Assim a identidade de Parseval é a condição necessária e suficiente para a convergência na média da série de Fourier trigonométrica de funções quadrado integráveis. A condição de ser quadrado integrável para ocorrer a identidade de Parseval, é suficiente porém não necessária. Assim as condições da função para a convergência na média são mais fracas do que na convergência pontual ou seja a convergência na média pode ocorrer mesmo que a função não seja seccionalmente suave.

Note que a identidade de Parseval não seria válida se abandonássemos um ou mais termos da SF, digamos  $\cos 2x$ . Neste caso jamais conseguiríamos fazer o erro

médio quadrático tender a zero, por maior que fosse o número de termos tomados, mesmo que a função fosse periódica e quadrado integrável. Em verdade uma condição que está oculta, e que ocorre na SF trigonométrica, é que o conjunto  $\{1/2, \cos nx, \sin kx\}$  é **completo**, segundo a seguinte definição:

Um conjunto de funções ortogonais  $\{\phi_n\}$  no intervalo  $[-L, L]$  é *completo* no espaço das funções quadrado integráveis se  $E_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Nos próximos capítulos vamos abordar sistemas ortogonais mais gerais do que o trigonométrico onde para as funções quadrado integráveis convergindo na média também teremos a identidade de Parseval correspondente a este sistema, a qual também é chamada de condição de completividade.

A completividade de um conjunto ortogonal indica que o conjunto é rico o suficiente para permitir que qualquer função quadrado integrável seja representado pela SF no sentido de convergência na média.

Existe outra caracterização para um conjunto completo: Um sistema ortonormal  $\{\phi_n\}$  é completo se tivermos

$$\int_{-L}^L f(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

então  $f(x) \equiv 0$ , onde  $f = 0$  significa que  $f(x) = 0$  em todos os pontos de continuidade de  $f$ . De outra forma, se o sistema é completo então qualquer função  $f$ , quadrado integrável em  $[-L, L]$ , a qual é ortogonal a todas as funções deste sistema deve ser identicamente nula.

Esta caracterização permite mostrar que o sistema trigonométrico é **completo**, pois se  $f(x)$  for ortogonal a todas as funções deste sistema então todos os seus coeficientes são nulos, pois

$$a_n = \langle f, \cos n\pi x/L \rangle = 0, \quad B_n = \langle f, \sin n\pi x/L \rangle = 0$$

Pela identidade de Parseval (relação de completividade) como os coeficientes são nulos então

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = 0$$

e portanto  $f(x) = 0$ . Assim não podemos acrescentar uma função contínua **não nula** ao sistema ortogonal e ter um sistema ortogonal "maior".

A **identidade de Parseval** é útil em vários tipos de problemas, por exemplo

**Exercício** - Usando a SF da função periódica de período  $2\pi$ ,

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$$

e a identidade de Parseval, determine a soma da série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ .



**Solução** - A série de Fourier desta função foi apresentada anteriormente e os seus coeficientes são dados por

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

Como esta função é quadrado integrável existe convergência na média e portanto podemos usar a identidade de Parseval que neste caso é dada por

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

Resolvendo a integral e simplificando o resultado, segue:

$$2\pi^2/3 = \sum_{n=1}^{\infty} 4/n^2$$

e portanto a soma da série apresentada é  $\pi^2/6$ . ◀

Se  $f$  estiver definida em  $-L < x < L$  e for periódica de período  $2L$  o valor médio quadrático ou *potência de  $f$*  sobre o período  $2L$  é definido por:

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx$$

O nome de potência vem do fato que se  $x$  for o tempo e  $f$  a voltagem ou a corrente elétrica, então esta integral representa a potência média de  $f$  em um resistor de  $1\Omega$ . Pela identidade de Parseval segue que este valor é:

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

A raiz quadrada desta expressão é chamada de *valor eficaz*.

## COMENTÁRIOS

- (1) A identidade de Parseval nos informa que quando  $n \rightarrow \infty$  o erro médio quadrático tende a zero, enquanto que a desigualdade de Bessel sugere a possibilidade desse limite não tender a zero!
- (2) As restrições sobre as função para que ocorra convergência na média são mais fracas do que na convergência pontual e assim não é necessário que seja seccionalmente suave.
- (3) Dizer que  $g(x)$  está "próximo" de  $f(x)$  no sentido do erro médio quadrático não implica que  $[f(x) - g(x)]^2$  seja "pequeno" em cada valor de  $x$ , mas que  $[f(x) - g(x)]^2$  seja pequeno na média.
- (4) O resultado apresentado que a série de Fourier trigonométrica de qualquer função quadrado integrável **sempre** ocorre a convergência na média, e por consequência a identidade de Parseval, é notável lembrando que **nem** sempre existe a convergência pontual mesmo se a função for contínua!
- (5) Observe que se ocorre a convergência na média de uma série para  $f(x)$ , esta função não é única pois a "retirada" de um ponto não muda o valor da integral.

- (6) Na convergência pontual as somas parciais da SF convergem para  $f(x)$  em **cada ponto** de continuidade  $x$  do intervalo, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - s_n(x)| = 0$$

ao passo que na convergência na média temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n]^2 dx = 0$$

com o seguinte significado: para cada  $\varepsilon > 0$  existe um inteiro  $N$ , tal que para  $n \geq N$  temos

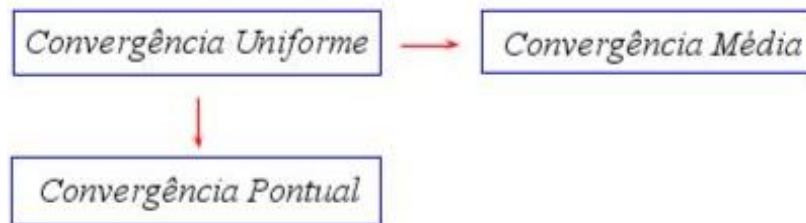
$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n]^2 dx \leq \varepsilon$$

- (7) Dizer que na média quadrática  $f$  se aproxima de  $s_n$  não implica que

$$[f(x) - s_n]^2$$

é "pequeno" para **cada** valor de  $x$  mas unicamente que esta expressão tem valor **médio** "pequeno".

- (8) Note que se a aproximação por SF que inclua termos até  $\cos nx$  e  $\sin nx$  tiver coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  então para melhorar a aproximação não precisamos recalculá-los, mas simplesmente calcular os valores para coeficientes superiores:  $a_{n+1}, b_{n+1}, \dots$
- (9) A convergência na média é um tipo de convergência diferente da convergência pontual. Uma série pode convergir na média sem que convirja em cada ponto, o que é intuitivo se pensarmos como área entre duas curvas. Porém é menos evidente, embora seja verdade que mesmo que uma série infinita seja convergente em cada ponto, é possível que não seja convergente na média [9]! Assim temos as seguintes implicações entre as convergências:



## 10.5 Aproximação num espaço com produto interno

A aproximação apresentada na seção anterior pode ser vista sob o enfoque do produto interno. Vamos explorar o que acontece geometricamente na aproximação no

espaço vetorial  $R^n$  munido do produto escalar usual, e depois estender para casos de maior complexidade

### 10.5.1 Aproximação de Vetores no Espaço $R^n$

Existem problemas que em vez de se trabalhar com um vetor  $\vec{v}$ , de um dado espaço com produto interno fica mais fácil substituí-lo por outro vetor  $\vec{w}$  em um subespaço mais familiar e fixo  $W$ . O erro cometido é a distância entre  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e o interesse será encontrar a melhor aproximação possível, ou seja, o vetor em  $W$  que forneça erro mínimo.

Considere o espaço vetorial  $R^3$  munido do produto interno usual com a base ortonormal  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e o vetor  $\vec{v}$  do  $R^3$  dado por

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Se tivermos necessidade de trabalhar no subespaço  $W$  gerado por  $E = \{\vec{i}, \vec{j}\}$  a melhor aproximação  $\vec{v}_{pw}$  de  $\vec{v}$  em  $W$  é o vetor  $\vec{v}_{pw} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ . Em outras palavras de todos os vetores  $\vec{w}$  de  $W$ , a menor distância

$$d(\vec{v}, \vec{w})$$

ocorre quando  $\vec{w} = \vec{v}_{pw}$ . Neste caso particular temos dois aspectos importantes e que serão válidos para casos mais gerais:

- a) os coeficientes de  $\vec{v}_{pw}$  são as **projeções ortogonais** de  $\vec{v}$  em  $W$

$$2 = \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle, \quad 3 = \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle$$

- b) o vetor diferença  $\vec{v} - \vec{v}_{pw}$ , que neste caso é  $\vec{v}_{ow} = 4\vec{k}$ , é **ortogonal** a todos os vetores de  $W$ .

O raciocínio apresentado pode ser generalizado para o espaço com produto interno  $R^n$ . Seja  $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r\}$ ,  $r < n$ , uma base ortogonal e  $W$  o subespaço gerado por  $E$ . Então para todo vetor  $\vec{v}$  de  $R^n$  tem-se

$$\|\vec{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^r v_i^2 \|\vec{e}_i\|^2$$

onde a igualdade será mantida apenas se  $\vec{v}$  estiver em  $W$ . Assim os vetores de  $E$  são insuficientes para representar um vetor arbitrário de  $R^n$  e dizemos que  $E$  é um **sistema incompleto** do  $R^n$ .

Como tomarmos uma aproximação de  $\vec{v}$  vamos escolher a melhor possível. De todos os vetores de  $W$  o que está mais próximo de  $\vec{v}$  é o vetor projeção ortogonal  $\vec{v}_{pw}$  de  $\vec{v}$  em  $W$ , dado por

$$\vec{v}_{pw} = \sum_{i=1}^r v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^r \frac{\langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle}{\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle} \vec{e}_i$$

220

Com esta expressão de  $\vec{v}_{pw}$  o vetor  $\vec{v}$  pode ser representado de maneira única como

$$\vec{v} = \vec{v}_{pw} + \vec{v}_{ow}$$

onde o vetor  $\vec{v}_{ow} = \vec{v} - \vec{v}_{pw}$  é ortogonal a  $W$ . A distância  $\|\vec{v} - \vec{v}_{pw}\|$ , que é a menor entre  $\vec{v}$  e  $W$ , é chamada de distância de  $\vec{v}$  ao subespaço fixo  $W$ .

Esta distância é o erro cometido ao substituir o vetor  $\vec{v}$  por  $\vec{v}_{pw}$ . Assim  $\vec{v}_{pw}$  é a melhor aproximação se a diferença  $\vec{v} - \vec{v}_{pw}$ , que é o vetor erro, for ortogonal ao subespaço gerado  $W$ . A grandeza deste erro

$$\|\vec{v} - \vec{v}_{pw}\|, \quad (10.8)$$

é a menor possível, ou seja, temos necessariamente que

$$\|\vec{v} - \vec{v}_{pw}\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\| \quad (10.9)$$

para todo vetor  $\vec{w}$  de  $W$ . Este resultado, baseado em condições puramente geométricas, é válido para espaços mais gerais. O sinal de **igual** ocorre apenas se  $\vec{v}$  pertence ao próprio  $W$ .

### 10.5.2 Aproximação de Funções num Espaço Produto Interno

A idéia que usamos acima a partir de considerações puramente geométrica para aproximar um vetor  $\vec{v}$  do  $R^n$ , num subespaço "menor" é mais geral e pode ser aplicada a qualquer espaço (real) com produto interno  $V$  sobre um subespaço  $W$  de **dimensão finita**. Assim temos:

A melhor aproximação de  $f$  em  $V$  é a projeção ortogonal de  $f$  sobre  $W$ , indicada por  $f_p$ , e neste caso a distância  $\|f - f_p\|$  é mínima ou seja

$$\|f - f_p\| \leq \|f - g\|$$

para todo  $g$  em  $W$ . De uma maneira mais geral temos:

**Teorema da Projeção** - Seja  $W$  um subespaço de dimensão **finita** do espaço com produto interno das funções contínuas  $C_{[-L,L]}$ . Então toda função  $f$  neste espaço, poderá ser decomposta de maneira única como

$$f = f_p + f_o$$

onde  $f_p$  **pertence** a  $W$  e  $f_o$  é **ortogonal** a  $W$ .

Além disso esta projeção  $f_p$ , de  $f$  em  $W$ , será a melhor aproximação para  $f$  em  $W$  no sentido que

$$\|f - f_p\| \leq \|f - g\|$$

para toda função  $g$  em  $W$ .

**Pergunta** - Qual a relação que existe entre este erro e o erro quadrático?

Para responder considere o produto interno usual em

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

O erro quadrático definido na seção anterior

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n]^2 dx$$

também pode ser escrito como

$$\|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx,$$

Assim o erro definido desta forma tem a vantagem de poder usar o teorema da projeção ortogonal mencionado acima.

$$E_n(A_0, A_k, B_k) = \|f(x) - S_n(x)\|^2$$

Portanto a aproximação  $S_n$  minimiza o erro quadrático se e só se esta aproximação minimizar  $\|f - S_n\|^2$  ou de modo semelhante, se e só se minimizar  $\|f - S_n\|$ , o que ocorre se  $S_n$  for a projeção ortogonal de  $f$  no subespaço  $W$ .

Com este mesmo enfoque a Identidade de Parseval, em termos do produto escalar, torna-se

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 \equiv \frac{1}{\pi} \langle f, f \rangle \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Observe a analogia que existe entre o comprimento (norma) do vetor  $\vec{v}$  no espaço  $R^n$  com a norma do vetor  $f$  no espaço das funções. Além disso no espaço  $R^n$  a medida que aumentarmos a dimensão do subespaço  $W$  melhora a aproximação, e quando tivermos  $W = R^n$  tem-se a igualdade

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

A SF trigonométrica serve para resolver alguns problemas específicos que apresentaremos nos próximos três capítulos, no entanto deve ficar claro que dependendo do problema será necessário uma série de Fourier mais abrangente e que será apresentada oportunamente.

#### COMENTÁRIOS:

- (1) Se for usada uma outra base ortogonal de  $W$  para calcular a projeção ortogonal de  $\vec{v}$ , essa nova projeção continua sendo o ponto de  $W$  mais próximo de  $\vec{v}$ , ou seja não depende da base ortogonal.
- (2) Para todo subespaço de dimensão finita, não nula, de um espaço com produto interno, pode-se construir uma base ortogonal.

## 10.6 RESUMO

**Convergência na média** - De todas as séries trigonométricas finitas do tipo

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n [A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx]$$

a que melhor representa uma função  $f$  definida em  $-\pi < x < \pi$  no sentido quadrático, isto é, quando o erro dado por

$$E_n(A_0, A_k, B_k) = \int_{-\pi}^{\pi} [\varepsilon_n(x)]^2 dx \equiv \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

for mínimo, é quando  $A_k, B_k$  forem os coeficientes de Fourier ou seja quando  $A_n = a_n$  e  $B_n = b_n$ . Neste caso a expressão deste erro pode ser dada como

$$E_n(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

e, como consequência, temos a desigualdade de Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

A SF é dita convergir na média para  $f$  quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(a_0, a_k, b_k) = 0$$

e neste caso, que ocorre seguramente para funções quadrado integráveis, em vez da desigualdade temos a identidade de Parseval.

No espaço  $C_{[-\pi, \pi]}$  munido do produto interno usual, o erro quadrático

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n]^2 dx$$

pode ser escrito como:

$$E_n(A_0, A_k, B_k) = \|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$$

Assim pelo teorema da projeção ortogonal o erro quadrático será mínimo se e só se esta aproximação minimizar  $\|f - S_n\|^2$  ou de modo semelhante, se e só se minimizar  $\|f - S_n\|$ , o que ocorre se  $S_n$  for a projeção ortogonal de  $f$  no subespaço  $W$ .

## 10.7 Exercícios Propostos

- (1) Mostre que o valor médio quadrático de  $f$  é igual à soma dos valores médios quadráticos de suas componentes par e ímpar.

- (2) Sejam  $f$  e  $g$  funções periódicas seccionalmente contínuas e de período  $2L$ . Usando a identidade de Parseval mostre que:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\alpha_n + b_n\beta_n]$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f$  e  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  os de  $g$ . (Note que as SF de  $f$  e  $g$  não precisam necessariamente convergir pontualmente para essas funções!)

*Sugestão:* Ache as SF correspondentes a  $f + g$  e a  $f - g$  e aplique em cada uma a identidade de Parseval, e subtraia.

- (3) Use o exercício anterior para escrever, em termos de  $b_n$ ,

$$\int_0^L xf(x) dx$$

- (4) Sabendo-se que:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

use a identidade de Parseval para obter a função zeta de Riemann  $\zeta(4)$ .

- (5) A partir da expressão da SF da função coseno, use a identidade de Parseval para mostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^4 = \pi^4/90.$$

- (6) Se  $f(t)$  é periódica de período  $T$  mostre que a representação cossenoidal

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

fornece a seguinte identidade de Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{c_n}{\sqrt{2}} \right]^2$$

e se  $c_n$  são os coeficientes complexos de Fourier então a identidade de Parseval torna-se:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(x)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$





## Chapter 11

# Problema de Valor Inicial e de Contorno

**Finalidade** - Ao aplicar o método de Fourier obtemos uma solução em série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t)$$

Como sabemos a soma de um número finito de funções contínuas é contínua porém se for um número infinito isto é se for uma série, como é o nosso caso, este fato nem sempre acontece e portanto ao usarmos a solução em série devemos tomar um certo cuidado! Neste aspecto a convergência uniforme é mais amigável e faremos aqui um resumo de alguns resultados básicos.

A finalidade deste capítulo será familiarizar o método de Fourier em problemas de valor inicial e de contorno (PVIC) habilitando o aluno a resolver outros problemas de mesma natureza. Neste contexto vamos achar a solução formal de problemas básicos envolvendo a equação da onda e do calor e analisar a existência e a unicidade da solução em tais problemas.

### 11.1 Solução de um PVIC

Antes de mais nada o que é razoável para uma função ser solução de um PVIC? Será, por exemplo, que a função definida por

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & 0 < x < L \quad t > 0 \\ 0 & x = 0, x = L \quad t \geq 0 \\ f(x) & 0 \leq x \leq L \quad t = 0, \end{cases}$$

que satisfaz a EDP do calor em  $0 < x < L, \quad t > 0$

$$u_t = u_{xx},$$

e as condições de contorno é o que se espera de uma solução?

Esta função embora satisfaça as condições do problema fisicamente não é o que se espera de uma solução pois não existe um comprometimento entre o que acontece no interior da haste e o que acontece no seu contorno, ou em outras palavras, para

uma solução que se preze deve haver **continuidade** com as condições auxiliares, o que não ocorre com esta função pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = 1 \neq u(0, t) = 0$$

Neste caso específico o fato importante para que  $u(x, t)$  seja solução é que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = u(0, t),$$

que em  $x = L$  temos uma condição equivalente

$$\lim_{x \rightarrow L^-} u(x, t) = u(L, t),$$

e que também ocorra a continuidade na condição inicial.

Em casos mais gerais se o problema apresentar condições de contorno sob outras formas para ser solução devemos impor esta condição de continuidade.

A resolução completa de um PVIC é um tanto demorada e compreende as seguintes fases:

- (1) **Solução Formal** - Deve-se obter aqui a *solução formal* como sendo uma série  $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  em uma região espacial  $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$ . O termo "solução formal" é aqui usado no sentido de que se o problema tiver solução, então ela será dada por esta série. Em verdade vamos descobrir apenas uma "candidata" à solução que para efetivar-se como tal as condições auxiliares do problema devem satisfazer certas condições.
- (2) **Unicidade** - Deve verificar se o problema **não** apresenta **mais** de uma solução.
- (3) **Existência** - Deve verificar se a solução em série apresentada é de fato solução, ou seja, se ela apresenta os seguintes quesitos:
  - (a) a **série converge** e a sua soma é  $u$ ;
  - (b) a série define uma **função contínua**  $u$  em  $\bar{\Omega}$  tal que as **condições de contorno** impostas ao problema **são satisfeitas**;
  - (c) a série define uma função de classe  $C^2$  sobre uma região aberta  $\Omega$  e **satisfaz a EDPL**  $Lu = 0$ .

Vamos começar pelo último ítem:

Para que a série satisfaça a EDP será necessário calcular as derivadas que aparecem na equação termo a termo, ou seja precisamos derivar sob o sinal de somatório. Assim num caso mais geral devemos verificar que

$$Lu = L[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)] = \sum_{n=1}^{\infty} Lu_n(x, y) = 0$$

Em outras palavras o processo será legalizado se for possível **permutar** as operações entre  $L$  e  $\sum_{n=1}^{\infty}$ .

**Questão chave** - Em quais condições o cálculo das derivadas da série pode ser efetuado mediante derivação termo a termo?

**Resposta** - Uma **condição suficiente** para legitimar a derivada termo a termo é que as séries das derivadas envolvidas na equação **converjam uniformemente** depois da sua derivação.

Mais precisamente, da teoria sobre série de funções, segue:

**Resultado chave** - Se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

**converge** para a função  $f(x, y)$  na região  $R$ , isto é, se

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

para todo  $x$  e  $y$  em  $R$  e **se** esta convergência é **uniforme** então:

- a) Se cada função  $u_n$  é **contínua** em  $R$  então  $f$  também será **contínua** em  $R$ . Isto significa que se as funções  $u_n$  forem contínuas, isto é, se:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} u_n(P) = u_n(P_0)$$

então a função  $f$  também é **contínua** o que acarreta

$$\lim_{P \rightarrow P_0} [\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)] = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(P_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{P \rightarrow P_0} u_n(x, y)$$

onde  $P(x, y)$  é um ponto qualquer em  $R$ . (Se  $P_0$  for um ponto fronteira então os pontos  $P$  são tomados apenas em  $R$ ). Em outras palavras se a convergência de uma série de funções contínuas for uniforme podemos **permutar** os sinais de somatório e limite.

- b) Se cada derivada  $\partial u_n / \partial x$  for contínua em  $R$  e se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial u_n / \partial x$$

**converge uniformemente** em  $R$  então  $\partial f / \partial x$  existe em  $R$  e podemos permutar os símbolos  $\partial / \partial x$  e  $\sum$ , isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}$$

Diante disto a convergência uniforme torna-se indispensável na análise da solução de uma EDP e neste contexto a seguinte pergunta é inevitável:

**Questão** - Qual é o critério para saber se uma determinada série converge uniformemente?

**Resultado chave (condição suficiente)** - M - teste de Weierstrass

228

Se existe uma sequência numérica  $\{M_n\}$  tal que para todo  $(x, y)$  em  $R$  ocorre

$$|u_n(x, y)| \leq M_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e se a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

converge, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

converge uniformemente em  $R$ .

Uma vez que o M - teste de Weierstrass depende da convergência de séries numéricas é importante saber os principais testes, onde alguns deles são:

- (1) (a) a série  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$  converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ ;  
 (b) se nenhum termo da sequência  $\{a_n\}$  é nulo e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = r$$

então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **converge absolutamente** se  $r < 1$  e diverge se  $r > 1$ . Não temos conclusão sobre a convergência se  $r = 1$ .

- (c) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$  então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente se  $L < 1$  e diverge se  $L > 1$ . Se  $L = 1$  não temos conclusão sobre a convergência.

**Exercício** - Considere a função  $u(x, t)$  definida pela série

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi/2) e^{-n^2 t} \sin(n\pi x)$$

Mostre que:

- a)  $u(x, y)$  é uma função contínua no intervalo  $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$ ;  
 b)  $u(x, y)$  é solução da equação do calor

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

**Solução - a)** Considere a sequência  $\{u_n(x, t)\}$  onde seus termos são dados por:

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n^2} \sin(n\pi/2) e^{-n^2 t} \sin(n\pi x)$$

Observe que cada função  $u_n$  é **contínua** no intervalo  $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$  e satisfaz a desigualdade

$$|u_n| \leq 1/n^2$$

Como a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  converge, pelo **M - teste**, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$  **converge uniformemente em**  $R = [0, \pi] \times [0, +\infty)$  e a função dada pela série acima é contínua no intervalo especificado.

b) Por outro lado

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq \frac{1}{n} e^{-n^2 t_0}$$

para todo  $t \geq t_0 > 0$ . Pelo teste da razão a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 t_0}$$

converge e portanto a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \partial u_n / \partial t$  **converge uniformemente em**  $R_1 = [0, \pi] \times [t_0, +\infty)$ . Assim pelo M - teste,  $u_t$  existe em  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $t \geq t_0 > 0$  e

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \partial u_n / \partial t$$

De modo semelhante existe  $u_{xx}$  em  $R_1$  que é dado por

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

### COMENTÁRIOS:

(1) Se  $S_n$  for a soma parcial dos  $n$  primeiros termos da série, isto é, se:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k(x),$$

dizemos que a série **converge pontualmente** para  $f(x)$  num intervalo, se dado um número positivo  $\epsilon$  existe, para cada  $x$  do intervalo considerado, um número positivo  $N$  tal que

$$|S_n - f(x)| < \epsilon$$

sempre que  $n > N$ .

O número  $N$  pode depender **não** apenas de  $\epsilon$  mas também de  $x$ , e  $f(x)$  é chamada de *soma da série*. Se  $N$  depende de  $\epsilon$ , mas **não** do particular valor de  $x$  a série é dita **convergir uniformemente** para  $f(x)$ . O conceito de convergência uniforme **depende do intervalo** em que a série está definida.

- (2) A série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  converge se  $|x| < 1$  (diverge se  $|x| \geq 1$ ) e sua soma é  $1/(1-x)$  no entanto esta série **não converge uniformemente** em  $|x| < 1$ , porém converge uniformemente se  $|x| \leq a < 1$ .
- (3) Além da solução formal, unicidade e convergência, para completar a verificação, embora neste capítulo não seja apresentado, é importante verificar se pequenas variações nos dados do problema não comprometem a solução, ou seja, verificar a **dependência contínua dos dados**.

## 11.2 Problema envolvendo a Equação do Calor

Considere uma haste fina ideal de comprimento  $L$  com superfície lateral termicamente **isolada** cujas extremidades estejam mantidas na temperatura nula para todo tempo  $t > 0$  e tendo a função  $f(x)$  como distribuição inicial de temperatura.

Nestas condições a temperatura  $u(x, t)$  da haste satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{EDP} & u_t = ku_{xx} \quad 0 < x < L \quad t > 0 \\ \text{CC} & u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ \text{CI} & u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Nesta seção vamos analisar a existência e unicidade da solução deste problema

### 11.2.1 Solução Formal

Se admitirmos uma solução na forma

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

a EDP implicará em

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\alpha^2$$

onde  $-\alpha^2$ ,  $\alpha > 0$ , é a constante de separação de variáveis. Portanto temos duas EDOs:

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0 \\ T' + \alpha^2 kT &= 0 \end{aligned}$$

A partir das condições de contorno, segue que

$$\begin{aligned} u(0, t) &= X(0)T(t) = 0 \\ u(L, t) &= X(L)T(t) = 0, \end{aligned}$$

e para **não** termos solução trivial tomamos:

$$X(0) = X(L) = 0$$

Portanto para achar  $X$  devemos resolver o seguinte problema de contorno:

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0 \\ X(0) &= 0 \quad X(L) = 0 \end{aligned}$$

Desde que a solução geral para  $X$  é dada por

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

a condição  $X(0) = 0$  obriga que  $A = 0$ . Para satisfazer a segunda condição devemos ter

$$X(L) = B \operatorname{sen} \alpha L = 0$$

Para que não ocorra solução trivial devemos tomar  $\alpha$  satisfazendo

$$\operatorname{sen} \alpha L = 0$$

e portanto

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.1)$$

Substituindo esses valores temos as soluções

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (11.2)$$

Resolvendo a equação para  $T$  e substituindo o valor  $\alpha$  de segue que

$$T_n(t) = C_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \quad (11.3)$$

Portanto uma solução **não trivial** da equação do calor e que satisfaz as duas condições de contorno é:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde  $b_n \equiv B_n C_n$  é uma constante arbitrária.

No entanto para que esta função satisfaça a condição inicial do problema devemos escolher os coeficientes  $b_n$  de modo que

$$u_n(x, 0) = f(x) = b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

No entanto, exceto para casos particulares, não existem constantes que satisfaçam esta condição e portanto  $u_n(x, t)$  não pode ser solução do problema dado.

Pelo princípio de superposição tomamos como solução a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (11.4)$$

a qual satisfaz as condições de contorno do problema. Para satisfazer a condição inicial devemos ter

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

ou seja os coeficientes  $b_n$  devem ser os coeficientes da SF seno da função  $f(x)$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (11.5)$$

Portanto a solução formal para o problema dado é:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(\tau) \operatorname{sen} \frac{n\pi\tau}{L} d\tau \right] e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

### COMENTÁRIOS

- (1) Tomamos a constante de separação de variáveis como sendo negativa pois estamos interessados apenas em soluções limitadas.
- (2) Precisamos ter cuidado com a compatibilidade física do problema.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & , \quad 0 < t < \infty ; \\ u(x, 0) &= \phi(x) = 1 & , \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Este problema é fisicamente impossível desde que a temperatura salta de um a zero instantaneamente. Nesse caso a condição inicial  $\phi(x)$  deveria ser zero nas extremidades.

- (3) Observe que na solução formal acima os coeficientes  $b_n$  dependem de  $f$  e portanto a convergência uniforme da série dependerá da condição inicial do problema.

#### 11.2.2 Existência da solução

Encontramos anteriormente que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

é uma solução formal do problema de condução de calor apresentado nesta seção, onde os coeficientes  $b_n$  são determinados a partir da condição inicial

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

#### Verificação das Condições de Contorno

Pela definição de solução é importante que ocorra a continuidade da função solução  $u(x, t)$ , que analisaremos a seguir..

Se a integral da função  $f(x)$  **existe** no intervalo  $[0, L]$  e se esta função for **limitada** neste intervalo, temos que:

$$|b_n| = \frac{2}{L} \left| \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx = c$$

onde  $c$  é uma constante positiva. Portanto a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$



tem o valor absoluto dos seus termos

$$|b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}| \leq c e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt_0}, \quad t \geq t_0 > 0$$

limitado para qualquer  $t > 0$ .

Pelo teste da razão a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} c e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt_0}$$

é convergente, e portanto, pelo M-teste de Weierstrass a série de **funções contínuas converge uniformemente** para  $u(x, t)$ , no intervalo  $0 \leq x \leq L$  e  $t \geq t_0$ , sendo  $t_0 > 0$  arbitrário, ou seja para todo  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ . Logo a função solução,  $u(x, t)$  é também **contínua** em  $x = 0$  e  $x = L$  e podemos assim **permutar** os símbolos de limite e somatório

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} [b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}] = 0,$$

o mesmo ocorrendo com

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} u(x, t) = 0$$

Portanto as condições de contorno  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  acontecem no sentido que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow L^-} u(x, t) = 0$$

#### Verificação da Condição Inicial.

Observe que na análise anterior a variável  $t$  deve ser  $t > 0$ , pois se  $t = 0$  teremos a série

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

cuja convergência dependerá de  $b_n$  e assim poderá convergir ou não pois aqui não temos mais a exponencial que "salva a convergência". Assim condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

precisa ser **mais** restritiva do que ocorreu na condição de contorno.

A condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

geralmente é verificada usando outro teste de convergência, que é o teste de Abel, enunciado a seguir:

Seja  $\bar{R}$  uma região fechada no plano  $xt$ :

a) Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)$  converge uniformemente para todo  $x$  tal que  $(x, t)$  está em  $\bar{R}$ ;

b) Se as funções  $T_n(t)$  são uniformemente limitada para todo  $t$  tal que  $(x, t)$  está em  $\bar{R}$ , isto é se existe uma constante  $M$  tal que  $|T_n(t)| \leq M$ ;

c) Se para cada  $t$ , tal que  $(x, t)$  está em  $\bar{R}$ , a sequencia de constantes  $\{T_n(t)\}$  não é crescente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

converge uniformemente na região  $\bar{R}$  do plano  $xt$  (referência [22]).

Impondo que a função  $f$  seja contínua em toda reta, ou seja  $f(x)$  é contínua em  $[0, L]$ ,  $f(0) = f(L) = 0$ , periódica de período  $2L$ , e  $f'$  seccionalmente contínua então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

converge absolutamente e uniformemente, pois  $b_n \propto 1/n^2$ , e pelo teste de Abel a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

converge uniformemente para  $u(x, t)$  e portanto  $u(x, t)$  é contínua em  $0 \leq x \leq L$ ,  $t \geq 0$ . Com esta condição podemos permutar os símbolos de  $\lim$  e  $\sum$  e assim temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Logo a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , é satisfeita no sentido que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$$

Comentário: A distribuição inicial de temperatura  $u(x, t) = f(x)$  deve obedecer as condições do teorema de convergência de Fourier e portanto não precisa ser necessariamente contínua. Indiferente a esta condição a solução  $u(x, t)$  é contínua para valores arbitrariamente pequenos de  $t$ ,  $t > 0$ . Isto ilustra o fato da condução do calor ser um processo difusivo que atenua quase instantaneamente quaisquer descontinuidade que possam estar presentes na distribuição inicial da temperatura.

### Verificação da EDP

Pelo visto acima a série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

converge uniformemente para  $x$  e  $t$  na região  $t > 0$  e  $0 \leq x \leq L$ .

Como devemos verificar se a série acima satisfaz também a EDP precisamos analisar o que acontece se derivarmos termo a termo esta série. A série

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 k e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

obtida derivando a série anterior termo a termo em relação a  $t$ , tem os seus termos satisfazendo a condição

$$\left| -b_n \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 k e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq c \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 k e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt_0}, \quad t \geq t_0 > 0$$

Assim novamente, pelo teste da razão, a série de termos constantes

$$c \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 k e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt_0}$$

converge e portanto pelo M - teste a convergência é uniforme na região  $0 \leq x \leq L$ ,  $t > 0$ . Logo  $\partial u / \partial t$  existe para todo  $t > 0$  e esta derivada pode ser obtida derivando a série termo a termo, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 k e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

De modo semelhante as séries de  $u_x$  e  $u_{xx}$  convergem uniformemente para todo  $t > 0$  e portanto a série de  $u(x, t)$  pode ser diferenciada duas vezes em relação a  $x$  e temos como resultado

$$u_{xx} = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Comparando estas duas últimas séries segue que

$$u_t = k u_{xx}$$

e portanto a série encontrada é solução da equação na região  $0 \leq x \leq L$ ,  $t > 0$ .

**Resumindo:** Se a condição inicial é tal que a função  $f$  é **contínua em toda reta** e  $f'$  **seccionalmente contínua** as operações anteriores são legais e portanto existe solução do problema apresentado.

### 11.2.3 *Unicidade de Solução*

Para provar a unicidade podemos usar o princípio do máximo, princípio este válido para regiões mais gerais [7].

Fisicamente observe que no problema de calor, uma vez dada a temperatura nas extremidades e a distribuição inicial, deve-se procurar a distribuição na haste para  $t > 0$  num ponto  $x$ . O fluxo de calor na haste ocorre de tal forma a reaalizar o equilíbrio térmico temperaturas dos diferentes pontos. Assim é intuitivo esperar que o valor máximo (ou mínimo) ocorra nas extremidades da haste  $x = 0$  e  $x = L$ , ou no instante  $t = 0$ . De fato isto pode ser matematicamente provado, ver referência [8]:

**Princípio do máximo e do mínimo para a equação do calor:** Toda solução da equação do calor

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T$$

que seja contínua no retângulo fechado  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq t \leq T$  assume o seu máximo e o mínimo ou na base  $t = 0$ , ou num dos lados  $x = 0$  e  $x = L$ .

A unicidade é uma consequência pois se o problema tivesse duas soluções  $u_1$  e  $u_2$  então  $u = u_1 - u_2$  seria solução no retângulo fechado para qualquer  $T$  com  $u(x, 0) = 0$  e  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , ou seja nula na base e nas laterais. Como aí alcança o máximo e o mínimo devemos ter  $0 \leq u \leq 0$  e portanto  $u = u_1 - u_2 = 0$  em todo retângulo.

#### COMENTÁRIOS

- (1) Na verificação da condição inicial, com as hipóteses impostas sobre a função  $f$ , os coeficientes  $b_n$  são tais que  $b_n \propto 1/n^2$  e assim podemos analisar a convergência sem usar o teste de Abel!
- (2) Existe outro modo de provar a unicidade (referência [2]). Admitindo que  $u_1$  e  $u_2$  sejam soluções do problema construímos o problema equivalente para a função  $v = u_1 - u_2$ . Para provar que elas são iguais, ou seja que  $v = 0$ , usamos a função auxiliar:

$$J(t) = \frac{1}{2k} \int_0^L v^2 dx \geq 0,$$

e provamos que

$$J(t) = 0, \quad t \geq 0$$

Mas como  $v(x, t)$  é contínua temos

$$v(x, t) = 0$$

- (3) O princípio do máximo pode ser usado também para provar a dependência contínua dos dados (ver ref. [25])
- (4) As condições impostas sobre a condição inicial  $f$  podem ser mais fracas, ver ref [24].
- (5) Observe por este problema que se a função inicial  $f(x)$  é seccionalmente contínua, teremos derivadas parciais contínuas de  $u(x, t)$ ,  $t > 0$ , de **todas** as ordens e não apenas as de 2ª ordem. Este fato é devido a presença da derivada de primeira ordem  $u_t$  na EDP, fato este que dá origem a **solução exponencial** para  $t$ , e não trigonométrica. Esta solução exponencial em  $t$  "é a salvação da lavoura" que permite a convergência uniforme. Este resultado contrasta, por exemplo, com problemas envolvendo a EDP da corda vibrante.

- (6) Existem autores, referência [21], que exigem outras hipótese sobre a condição inicial e não apenas

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$$

- (7) Tal como foi feito podemos também provar a unicidade de solução do problema mais geral:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + g(x, t) & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u_0(t), \quad u(L, t) = u_1(t) & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

### 11.3 Fluxo de Calor em Haste não Isolada Lateralmente

Supomos o problema de calor numa haste ideal de comprimento  $L = 1$  onde o calor está sendo perdido na superfície lateral numa razão proporcional a diferença entre a temperatura  $u(x, t)$  da haste e a do meio circundante que admitiremos ser nula. Se nas extremidades  $x = 0$  e  $x = 1$  as temperaturas forem nulas e se  $\phi(x)$  for a temperatura inicial, para soluções limitadas a temperatura  $u(x, t)$  deve satisfazer o seguinte problema:

$$EDP \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} - hu, \quad h > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty$$

$$CC \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 < t < \infty$$

$$CI \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad 0 < x < 1$$

$$|u(x, t)| < M$$

Embora neste problema podemos separar as variáveis, contudo fica mais fácil primeiramente **simplificarmos** a EDP para depois aplicar o método de Fourier.

Foi visto no 2<sup>a</sup> capítulo para simplificar parabólicas de coeficientes constantes desta forma admitimos uma solução do tipo

$$u(x, t) = e^{rx+st} w(x, t)$$

e determinamos  $r$  e  $s$  de tal forma adequada. Substituindo esta expressão na equação, após simplificações rotineiras, obtemos:

$$w_t = \alpha^2 w_{xx} + \alpha^2 [2rw_x + r^2 w] - hw - sw$$

238

Observe que se tomarmos  $r = 0$ ,  $s = -h$ , que corresponde a transformação

$$u(x, t) = e^{-ht} w(x, t),$$

obteremos a simples equação :

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}$$

Portanto com essa transformação temos o seguinte problema para  $w$ :

$$\begin{aligned} w_t &= \alpha^2 w_{xx} & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \\ w(0, t) &= w(1, t) = 0 & 0 < t < \infty \\ w(x, 0) &= \phi(x) & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Esse problema, resolvido pelo método de Fourier, apresenta a seguinte solução:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t} \text{sen}(n\pi x)$$

onde os coeficientes são:

$$b_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx$$

Portanto a solução formal do problema original é:

$$u(x, t) = e^{-ht} w(x, t),$$

onde  $w(x, t)$  é a série acima.

## COMENTÁRIOS

- (1) Fisicamente este problema representa o fluxo de calor em uma haste não isolada com perda na superfície onde o termo  $-hu$  representa o fluxo através da superfície lateral. O termo  $\alpha^2 u_{xx}$  é responsável pela difusão do calor dentro da haste enquanto que  $-hu$  representa o fluxo de calor através da superfície lateral.
- (2) Observe que se  $\alpha = 0$ ,

$$u_t = -hu$$

fornece a solução:

$$u = e^{-ht}$$

Assim a temperatura obtida:

$$u(x, t) = e^{-ht} w(x, t)$$

é composta de dois fatores:  $e^{-ht}$  representa o caso de superfície **não** isolada, porém sem difusão, e  $w(x, t)$  representa o caso de superfície **isolada** porém com difusão.

## 11.4 Problema da Corda Vibrante

Considere o problema do deslocamento vertical  $u(x, t)$  de uma corda elástica ideal que está vibrando no plano  $xu$  com as seguintes hipóteses:

- corda de comprimento  $L$  e atada nas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$ ;
- deslocamento inicial  $f(x)$ ; e
- velocidade vertical  $g(x)$ .

Traduzindo em linguagem matemática este problema satisfaz o seguinte modelo

$$\begin{array}{ll} EDP & u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < L \quad t > 0 \\ CI & u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ CC & u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \quad t \geq 0 \end{array}$$

Nesta seção vamos analisar a existência e unicidade da solução deste problema.

### 11.4.1 Solução Formal

Pelo método de separação de variáveis supomos uma solução na forma:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Substituindo esta expressão na EDP, obtemos:

$$XT'' = a^2 X''T$$

que para  $XT \neq 0$  resulta em:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T}$$

Desde que o lado esquerdo é **independente de  $t$**  e o direito é **independente de  $x$** , ambos são iguais a uma constante, digamos  $\lambda$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \lambda,$$

onde  $\lambda$  é a constante de separação de variáveis. Portanto:

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$T'' - \lambda a^2 T = 0$$

Usando as condições de contorno impostas e sendo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  temos:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

240

Desde que  $T(t) \neq 0$ , pois caso contrário teríamos apenas a solução trivial, segue que:

$$X(L) = X(0) = 0$$

e portanto temos o seguinte problema de contorno envolvendo uma EDO

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

Primeiramente vamos determinar os valores de  $\lambda$  que fornecem uma solução não trivial e para tal vamos investigar os três seguintes casos:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$ .

**1º Caso:**  $\lambda = r^2$ ,  $r > 0$

A solução geral da EDO é da forma:

$$X(x) = Ae^{-rx} + Be^{rx}$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias. Para satisfazer as condições de contorno devemos ter:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{-rL} + Be^{rL} = 0 \end{cases}$$

Como o determinante deste sistema é **diferente de zero**, a **única** solução possível é  $A = B = 0$ , e portanto neste caso temos **apenas** a **solução trivial**  $X(x) \equiv 0$ .

**2º Caso:**  $\lambda = 0$

Aqui a solução torna-se

$$X(x) = A + Bx$$

Aplicando as condições de contorno, temos:

$$X(0) = A = 0$$

$$X(L) = A + BL = 0$$

e portanto sendo  $A = B = 0$  temos apenas a solução **trivial**.

**3º Caso:**  $\lambda = -r^2 < 0$ ,  $r > 0$

Neste caso a solução geral torna-se:

$$X(x) = A \cos rx + B \sin rx$$

Pela condição  $X(0) = 0$  temos que  $A = 0$ ; e como  $X(L) = 0$  temos que

$$B \sin rL = 0$$



Para termos soluções **não triviais** devemos impor que a constante  $r$  deve ser tal que

$$\text{sen } rL = 0$$

Esta condição fornece

$$rL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja

$$r_n = n\pi/L \quad (11.6)$$

Para este conjunto infinito de **valores discretos** de  $r$  o problema terá solução **não trivial**. Note que não é necessário considerar os valores negativos de  $n$ , pois sendo

$$\text{sen}(-n)\pi x/L = -\text{sen } n\pi x/L$$

e assim temos soluções dependentes.

Para estes valores específicos de  $r_n$  as soluções para  $X(x)$  e  $T(t)$  são:

$$X_n(x) = B_n \text{sen } n\pi x/L \quad (11.7)$$

$$T_n(x) = C_n \cos(n\pi at/L) + D_n \text{sen}(n\pi at/L) \quad (11.8)$$

onde  $B_n$ ,  $C_n$  e  $D_n$  são constantes arbitrárias. Desta forma a função:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = (a_n \cos n\pi at/L + b_n \text{sen } n\pi at/L) \text{sen } n\pi x/L$$

**satisfaz a EDP** e as **condições de contorno impostas**, sendo  $a_n \equiv B_n C_n$  e  $b_n \equiv B_n D_n$ .

Desde que a EDP é linear e homogênea, pelo princípio de superposição a série:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + b_n \text{sen } \frac{n\pi a}{L} t] \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \quad (11.9)$$

será também solução se for **convergente** e **duas vezes diferenciáveis tanto em relação a  $x$  como em relação a  $t$** . Além disso desde que cada termo da série satisfaz as condições de contorno, a série também satisfaz essas condições.

Para **determinar**  $a_n$  e  $b_n$  usaremos as condições iniciais. Derivando formalmente a série anterior em relação a  $t$ ,

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} [-a_n \text{sen } \frac{n\pi a}{L} t + b_n \cos \frac{n\pi a}{L} t] \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$$

e aplicando as condições iniciais dadas segue que

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \\ u_t(x, 0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

Estas expressões serão satisfeitas se  $f(x)$  e  $g(x)$  podem ser representadas pela série de Fourier seno, e neste caso os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (11.10)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (11.11)$$

Assim a **solução formal** do problema da corda vibrante é dado pela série (11.9) onde  $a_n$  e  $b_n$  são determinados por estas integrais ou de outra forma  $a_n$  e  $b_n$  são dadas por:

$$a_n = f_n \quad \text{e} \quad b_n = \frac{L}{n\pi a} g_n \quad (11.12)$$

sendo  $f_n$  e  $g_n$ , respectivamente, os coeficientes da SF seno de  $f$  e de  $g$ .

A partir de  $u_n$  podemos dar a seguinte interpretação física para a corda vibrante. Desde que a função  $u_n$  pode ser escrita como

$$u_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi at}{L} + \alpha_n \right)$$

onde

$$A_n = h_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad h_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{sen} \alpha_n = \frac{a_n}{b_n},$$

temos que:

A amplitude de vibração  $|A_n|$  do ponto de coordenada  $x$  **não** depende de  $t$  e os pontos para os quais:

$$x = 0, \quad L/n, \quad 2L/n, \quad \dots, (n-1)L/n, L$$

permanecem fixos durante o movimento, são os **nós**.

Assim a corda, cuja vibração é descrita por  $u_n$ , pode ser considerada dividida em  $n$  segmentos onde os pontos finais não vibram, sendo que os deslocamentos adjacentes tem sinais opostos e os pontos médios destes segmentos tem amplitude máxima, são os **ventres**.

Além disso no modo fundamental,  $n = 1$ , a frequência e o período são respectivamente dados por:

$$w_1 = \frac{a\pi}{L} \equiv \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{w_1} \equiv 2L \sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

onde  $T$  é a tensão e  $\rho$  a densidade da corda. Para maiores detalhes consulte as referências [5] e [14].

### 11.4.2 Existência de Solução

A solução obtida anteriormente é apenas uma solução formal e para ter certeza de que esta solução pode representar realmente a solução do problema será preciso aprofundar as investigações.

Na equação do calor, devido a a presença de  $u_t$ , e não de  $u_{tt}$ , tínhamos uma série que conduzia a uma solução exponencial decrescente, onde o termo geral era

$$u_n = b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

O termo exponencial propiciava uma série numérica majorante e convergente com pouca restrição sobre  $b_n$ , isto é, sobre a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ . Assim tínhamos a convergência uniforme e a função  $u(x, t)$  era infinitamente diferenciável nas suas variáveis e portanto as suas derivadas podiam ser obtidas derivando termo a termo

Na equação da onda temos um fato novo: em vez de  $u_t$  temos  $u_{tt}$  e como consequência não temos mais a função exponencial "para nos salvar" e assim precisaremos de restrição maior sobre as condições iniciais, ou em outras palavras sobre os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ . Vamos a seguir analisar a convergência

Antes de mais nada precisamos mostrar a continuidade da função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

de onde concluiremos que  $u(x, t)$  tenderá as condições auxiliares impostas ao problema. Uma vez que  $u_n$  são contínuas é suficiente mostrar a convergência **uniforme** da série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ .

A partir da série acima temos a desigualdade

$$|u_n(x, t)| \leq |a_n| + |b_n|$$

e portanto a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

majora  $|u|$ . Se esta série numérica converge, pelo  $M$ - critério de Weiertrass a série que define  $u$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

convergirá uniformemente e portanto a função  $u$  será contínua.

Para provar que  $u_t(x, t)$  é contínua é suficiente mostrar a convergência uniforme da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} \left( -a_n \sin \frac{n\pi a}{L} t + b_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

244

ou que a série numérica majorante de  $|\partial u/\partial t|$

$$\frac{\pi a}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n (|a_n| + |b_n|)$$

seja convergente.

Para demonstrar que a função  $u(x, t)$  satisfaz a equação da onda é suficiente provar que podemos derivar a série desta função, termo a termo, duas vezes em relação a  $x$  e duas vezes em relação a  $t$ . Para tal é suficiente mostrar a convergência uniforme das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$$

A menos de um fator de proporcionalidade ambos os módulos das séries de  $\partial^2 u/\partial x^2$  e  $\partial^2 u/\partial t^2$  são majoradas por

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|)$$

Como

$$a_n = f_n, \quad b_n = \frac{L}{n\pi a} g_n,$$

onde

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

temos assim em última análise, pelo  $M - teste$ , que o problema dado se reduz mostrar a convergência das séries numéricas (referência [5 e 14]):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^k |f_n|, & \quad k = 0, 1 \text{ e } 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |g_n|, & \quad k = -1, 0 \text{ e } 1 \end{aligned}$$

Vamos então analisar a convergência desta série numérica.

Admitiremos que a função  $f(x)$  seja periódica de período  $2L$  contínua em toda reta, tendo a representação

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{L} t] \sin \frac{n\pi x}{L},$$

em todos os pontos e  $f'(x)$  seccionalmente suave tendo a série

$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + b'_n \sin \frac{n\pi a}{L} t] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

convergindo para  $f'$  nos pontos de continuidade. Na derivação da série de Fourier vimos que

$$a'_0 = 0, \quad a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Uma vez que  $f'$  é limitada ela é quadrado integrável e segue, da desigualdade de Bessel para  $f'$ , que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2)$$

converge.

Por outro lado uma vez que  $a_n'$  satisfaz a desigualdade

$$\left( |a_n'| - \frac{1}{n} \right)^2 = a_n'^2 - \frac{2|a_n'|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0,$$

que também é válida para  $b_n'$ , subtraindo ambas temos que

$$\frac{|a_n'|}{n} + \frac{|b_n'|}{n} \leq \frac{1}{2} (a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde o lado direito são os termos de uma série convergente. Portanto a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{|a_n'|}{n} + \frac{|b_n'|}{n} \right)$$

também converge e sendo

$$a_n = -b_n'/n \quad e \quad b_n = a_n'/n$$

então para qualquer **função contínua e seccionalmente suave** a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

também é convergente.

Usando este raciocínio podemos provar que :

- (1) se a função  $f$  for periódica de período  $2L$ ;
- (2) se sua extensão de modo ímpar  $F$  for contínua sobre **toda** a reta;
- (3) se  $F$  possui derivadas de ordem  $k$  contínuas e a derivada de ordem  $k + 1$  seccionalmente contínua; então a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|),$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier, converge.

Uma consequência importante para uma função com estas hipóteses é que a convergência pontual ocorre de forma uniforme pois encontramos uma série majorante convergente!

Para que ocorra a continuidade da extensão ímpar  $F$  da função  $f$  é necessário que  $f(0) = f(L) = 0$ , pois caso contrário  $F$  não seria contínua. A

continuidade da derivada primeira em  $x = 0$  e em  $x = L$  se obtém automaticamente ao efetuar a continuação ímpar, o mesmo ocorrendo com qualquer derivação de ordem ímpar.

No entanto para que ocorra a continuidade das derivadas da função  $F$  de **ordem par** deve-se exigir que

$$F^{(k)}(0) = F^{(k)}(L) = 0, \quad k = 2, 4, 6, ..$$

Assim para a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|f_n|), \quad k = 0, 1, 2$$

é suficiente exigir que o desvio inicial

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

satisfaça as seguintes exigências:

**a) As derivadas da função  $f(x)$  até a  $2^a$  ordem são contínuas, a de  $3^a$  ordem seccionalmente contínua e**

$$f(0) = f(L) = 0; \quad f''(0) = f''(L) = 0 :$$

Por outro lado para a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|g_n|), \quad k = -1, 0, 1$$

temos que impor que a velocidade inicial

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

satisfaz as seguintes hipóteses:

**b) A função  $g(x)$  possui derivada contínua, a derivada de  $2^a$  ordem seccionalmente contínua e**

$$g(0) = g(L) = 0$$

**Resumindo:** Se as **condições iniciais**  $f(x)$  e  $g(x)$  satisfazem as hipóteses **a)** e **b)** então existe a solução na forma de superposição de ondas estacionárias e esta é dada pela série de  $u(x, t)$ . Estas condições **são suficientes** para o método que aplicamos

### 11.4.3 Unicidade de Solução

Existe no máximo uma solução da equação

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

satisfazendo as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

e as condições de contorno:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0$$

onde  $u$  é uma função de classe  $C^2$  em  $0 < x < L$ ,  $t > 0$  e contínua em  $0 \leq x \leq L$ ,  $t \geq 0$ .

**Justificativa:** A estratégia é admitir duas soluções do problema e mostrar que elas são iguais.

Supomos que existam duas soluções  $u_1$  e  $u_2$  e seja  $v = u_1 - u_2$ . Se provarmos que  $v \equiv 0$  então  $u_1 = u_2$ .

Devido a linearidade do problema temos que  $v$  é solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x, 0) &= v_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

pois:

$$v(x, 0) \equiv u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = 0$$

$$v_t(x, 0) \equiv u_{1t}(x, 0) - u_{2t}(x, 0) = 0$$

$$v(0, t) \equiv u_1(0, t) - u_2(0, t) = 0$$

Como a EDP em  $v(x, t)$  e todas as condições auxiliares são **homogêneas**, suspeita-se que a solução matemática seja identicamente nula - é isto que provaremos a seguir.

Considere a seguinte função auxiliar

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (T_e v_x^2 + \rho(x) v_t^2) dx$$

a qual fisicamente representa a *energia total* da corda vibrante, no intervalo  $[0, L]$  e em qualquer tempo  $t$ . sendo  $v(x, t)$  uma solução da equação da onda linear homogênea

$$\rho(x) v_{tt} = T_e(t) v_{xx} \quad (11.13)$$

Desde que  $v$  é da classe  $C^2$ , derivando  $E(t)$  com respeito a  $t$ , admitindo que  $T_e$  não dependa de  $x$  e  $t$ , pelo que foi apresentado no capítulo 5 temos que

$$\frac{dE}{dt} = T_e v_x v_t \Big|_0^L$$

Particularmente quando as extremidades da corda são livres ou fixas em  $x = 0$ ,  $x = L$ , como é o caso do problema apresentado, o segundo membro acima é nulo e portanto

$$E(t) = C \quad (c = cte)$$

Vamos determinar o valor dessa constante:

Desde que  $v(x, 0) = 0$  ou seja  $v(x, 0)$  é identicamente nulo para todo  $x$ , segue que

$$v_x(x, 0) = 0$$

A partir desse valor e sendo por hipótese  $v_t(x, 0) = 0$ , segue que

$$E(0) = C = \frac{1}{2} \int_0^L [T_e v_x^2 + \rho(x) v_t^2]_{t=0} dx = 0$$

e portanto  $C = 0$  ou seja

$$E(t) \equiv 0$$

Contudo a partir da expressão que define  $E$ , sendo  $E(t) = 0$ , segue que:

$$T_e v_x^2 + \rho(x) v_t^2 = 0$$

e que portanto:

$$v_x \equiv 0 \quad v_t \equiv 0$$

ou seja:

$$v(x, t) = C$$

Empregando a condição  $v(x, 0) = 0$ , segue que  $v(x, t) \equiv 0$  e que portanto  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ .

## COMENTÁRIOS

- (1) No caso linear de vibrações forçadas,  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t)$ , usando o mesmo procedimento, teremos o mesmo resultado.
- (2) Igual conclusão chegaremos também para condições de contorno do tipo:  $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ .



(3) Para o problema dado, a energia da corda vibrante no instante  $t = 0$  é:

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L T_e [f'(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) g^2(x) dx$$

e pelo resultado anterior essa energia é mantida constante o que confirma o *princípio de conservação de energia*.

(4) O método anterior utilizado para mostrar a unicidade é chamado de *método da energia*.

#### 11.4.4 Equivalência com a solução de D'Alembert

Podemos partir da solução anteriormente obtida, onde usamos o processo de separação de variáveis e chegar na solução de D'Alembert, e vice-versa.

Consideremos então a solução formal:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{L} t \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes da expansão em SF seno:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

sobre o intervalo  $[0, L]$ .

Usando as identidade trigonométricas:

$$2 \sin a \cos b \equiv \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

$$2 \sin a \sin b \equiv \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

a solução  $u(x, t)$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} (x + at) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} (x - at) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi}{L} (at - x) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi}{L} (x + at) \end{aligned} \quad (11.14)$$

Se  $F$  e  $G$  são as **extensões periódicas ímpares** de período  $2L$ , respectivamente de  $f$  e  $g$ , e definirmos

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (11.15)$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi a}{L} \right) b_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

temos que:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L G(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

A partir da expressão de  $G(x)$ , integrando termo a termo, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} G(s) ds &= -a \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi s}{L} \Big|_{x-at}^{x+at} = \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n \cos \frac{n\pi}{L}(x+at) + b_n \cos \frac{n\pi}{L}(x-at)] \end{aligned} \quad (11.16)$$

Usando as expressões (11.15) e (11.16), a série (11.14) pode ser escrita como:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[F(x+at) + F(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} G(s) ds \quad (11.17)$$

que é a **solução de D'Alembert**. Assim se o problema dado tem uma solução então ela é dada por esta função.

A partir desta solução formal para verificar a existência devemos admitir que as extensões ímpares  $F$  e  $G$ , respectivamente, são de classe  $C^2$  e  $C^1$ , em toda reta.

### COMENTÁRIOS

- (1) Podemos também partir da solução de D'Alembert e obter a mesma solução encontrada pelo método de Fourier.
- (2) É mais difícil obter a solução através do método de Fourier, porém este permite, ao truncar a série, achar uma solução aproximada, além de possibilitar uma análise física através das componentes individuais da série (ver referência [5]).

### 11.5 RESUMO

Para resolver formalmente o PVIC da corda vibrante

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad , \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

usamos o método de Fourier, isto é, admitimos uma solução do tipo:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

Para a equação da onda determinamos uma solução equivalente que é a solução de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[F(x + at) + F(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} G(s) ds$$

onde  $F$  e  $G$  são extensões periódicas ímpares de  $f$  e  $g$  respectivamente.

Para verificar a unicidade do problema admitimos duas soluções  $u_1$  e  $u_2$  do mesmo problema. Devido a linearidade do problema

$$v = u_1 - u_2$$

é uma solução do problema homogêneo correspondente. Provaremos a unicidade ao mostrarmos que  $v \equiv 0$ , o qual é feito por caminhos diferentes:

No problema da corda vibrante a prova de que  $v \equiv 0$  é feita através da função energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (T_e v_x^2 + \rho(x) v_t^2) dx$$

e das condições do problema, ao provar que

- a)  $dE/dt = 0$ , ou seja que  $E(t) = C$
- b)  $E(t) \equiv 0$

Para resolver formalmente o PVIC de condução de calor

$$u_t = k u_{xx} \quad , \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

ou o fluxo de calor na haste não isolada lateralmente:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} - \beta u, & , & \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & , & \quad 0 \leq t \leq \infty \\ u(x, 0) &= \phi(x) & , & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

usamos o método de Fourier, isto é, admitimos uma solução do tipo:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

onde no último problema primeiramente eliminamos o termo  $\beta u$ .

No problema de calor usando o princípio ao máximo que afirma:

252

Se  $u(x, t)$  é uma função contínua no retângulo  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , satisfazendo a equação

$$u_t = ku_{xx}$$

em  $0 < x < L$  e  $0 < t < t_0$ , então o máximo e o mínimo de  $u$  é alcançado ou em  $t = 0$  ou nos lados  $x = 0$ ,  $x = L$  para  $0 \leq t \leq t_0$ .

### 11.6 Exercícios Propostos

(1) Resolva os seguintes PVIC:

(a)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x(1-x), \quad u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n] \cos(n\pi at) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

(b)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 3 \operatorname{sen} x, \quad u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = 3 \cos at \operatorname{sen} x$$

(2) Obtenha a solução da equação da onda amortecida [2].

$$\begin{aligned} u_{tt} + \alpha u_t &= a^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \end{aligned}$$

(3) Encontre a solução sobre  $\bar{R}$  do problema de tipo misto:

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= 0 & \text{sobre } \bar{R} \\ u(x, 0) &= 1 - \cos 2x, \quad u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \end{aligned}$$

Usando a identidade:

$$\operatorname{sen} kx \cos kt \equiv \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(kx + kt) + \operatorname{sen}(kx - kt)]$$

mostre que a solução pode ser dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [1 - \cos 2(x+t)] + \frac{1}{2} [1 - \cos 2(x-t)]$$

- (4) Resolva o problema da corda amortecida

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} - \beta u_t & 0 < x < 1, & \quad 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & , & \quad 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= f(x) & , & \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

- (5) Prove a unicidade da solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} & 0 < x < L, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & , & \quad 0 \leq x \leq L \\ u_x(0, t) &= 0 & , & \quad u_x(L, t) = 0 \end{aligned}$$

- (6) Prove a unicidade de solução do PVI

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & , & \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(x, 0) &= 0 & , & \quad u_x(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

- (7) Pelo método de separação de variáveis resolva a equação do telégrafo:

$$\begin{aligned} u_{tt} + au_t + bu &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) = 0, & \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{aligned}$$

- (8) Resolva o PVIC de difusão:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u & 0 < x < 1 & , \quad 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & & \quad 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= e^{x/2} & 0 \leq x \leq 1 & \end{aligned}$$

simplificando primeiramente o termo de 1ª ordem.

- (9) Resolva o PVIC

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u & , & \quad 0 < x < 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & & \quad 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= \text{sen}(\pi x) & & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

diretamente pelo método de Fourier.

- (10) Obtenha a solução dos seguintes PVIC:

(a)

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} & 0 < x < 1 & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x^2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 & \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & & \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 \pi^3} \left[ 2(-1)^{n+1} - 1 \right] e^{-4n^2 \pi^2 t} \text{sen } n\pi x$$

(b)

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & , & \quad 0 < x < \pi \quad , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \text{sen}^2 x & \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Resp: } u(x, t) &= \frac{4}{3\pi} e^{-\alpha^2 t} \text{sen } x + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} [(-1)^n - 1] \left[ \frac{n}{\pi(4-n^2)} - \frac{1}{n\pi} \right] e^{-n^2 \alpha^2 t} \text{sen } nx \end{aligned}$$

- (11) Encontre a distribuição de temperatura numa haste de comprimento  $L$  sabendo-se que as faces estão isoladas e a distribuição inicial de temperatura é dada por  $x(L-x)$ .

$$\text{Resp: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \exp \left[ - \left( \frac{\alpha n \pi}{L} \right)^2 t \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

- (12) Mostre que a solução do problema de calor com isolamento perfeito nas extremidades da haste

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \quad , \quad u(x, 0) = f(x)$$

onde  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$ , é dada por:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-m^2 t} \cos mx \\ a_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx, \end{aligned}$$

Quando quando  $t \rightarrow \infty$ . qual é a expressão da solução? O que isto significa?

- (13) Prove a unicidade da solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \\ u_x(0, t) &= 0 \quad , \quad u_x(L, t) = 0 \end{aligned}$$

- (14) Resolva o problema de fluxo de calor

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= 0 \quad , \quad u_x(1, t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

A sua solução está de acordo com a intuição? Qual é a solução em estado estacionário.

## Chapter 12

# Problemas de Contorno

**Finalidade:** Os problemas vistos até agora envolviam a equação hiperbólica ou a parabólica onde para se obter as soluções, que variavam no espaço e tempo, era necessário a condição inicial. Há contudo importantes problemas envolvendo equações elíticas, cuja solução não varia com o tempo mas apenas em relação as variáveis espaciais, e nestes casos temos apenas condições de contorno.

A finalidade aqui será resolver problemas de contorno clássicos do tipo de Dirichlet ou Neumann em regiões retangulares ou circulares, além de analisar em alguns casos a unicidade e a dependência contínua dos dados iniciais, o que será feito por meio do princípio do máximo. Também apresentaremos uma condição de compatibilidade envolvendo a condição de contorno que é necessária para a existência da solução de problemas deste tipo.

### 12.1 O que é solução de um PVC?

A resposta para esta pergunta não é tão óbvia quanto parece pois não basta que a função, candidata à solução, satisfaça a EDP e as condições impostas. A título de curiosidade observe o seguinte exemplo:

Exemplo - Considere no quadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  o problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ u(x, y) &= 2, & \text{quando } x = 0, & x = 1, y = 0, y = 1 \end{aligned}$$

que fisicamente pode representar o problema do calor, em estado estacionário. Observe que a função definida por

$$u(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 2, & x = 0, x = 1, y = 0, y = 1 \end{cases}$$

satisfaz este problema, isto é, satisfaz tanto a equação de Laplace no interior do quadrado como a condição de contorno.

No entanto por uma inspeção rápida percebe-se que ela não é o que se espera de uma solução pois não existe um comprometimento entre o que ocorre no interior do quadrado

e o que acontece na fronteira, assim do ponto de vista físico seria como se uma alteração no contorno não afetasse a solução no seu interior. Em outras palavras esta candidata à solução do problema, que é descontínua no quadrado fechado, não tem interesse prático e deve ser descartada.

A definição do que venha ser solução de um PVIC ou de PVC depende da continuidade da função, e dependendo do problema, e de suas derivadas na região espacial fechada. A definição completa será apresentada quando da resolução dos mesmos e até lá, para efeito de resolução de problemas, vamos ignorar esta advertência e admitir a solução apenas no sentido formal, ou seja, aquela que satisfaz apenas a EDP e as condições auxiliares.

## 12.2 Principais Problemas de Contorno

As principais equações que envolvem problemas exclusivamente de contorno são:

### Equação de Laplace

$$\nabla^2 u = 0$$

Uma função  $u$  é dita *harmônica* em  $\Omega$  se ela for de classe  $C_{\Omega}^2$  e satisfizer a equação de Laplace identicamente nesse domínio. Essa equação aparece em vários problemas físicos, por exemplo:

- 1) Condução do calor em estado estacionário ( $\partial/\partial t \equiv 0$ )
- 2) Potencial elétrico.

### Equação de Poisson

$$\nabla^2 u = g$$

### Equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \quad , \quad \lambda > 0$$

Uma vez que essas equações são de 2ª ordem seria plausível esperarmos que fossem necessárias duas condições de contorno para determinar completamente a solução. Isto entretanto não ocorre. Lembre-se que no problema de condução de calor para a barra finita foi dado **apenas uma** condição em cada ponto de contorno!

Se  $f$  é uma função real contínua no contorno  $\partial\Omega$ , determinar uma solução para um problema de contorno numa região limitada  $\Omega$  significa determinar uma função real  $u$  definida em  $\bar{\Omega}$  satisfazendo às seguintes condições:

- a)  $u$  é contínua em  $\bar{\Omega}$
- b)  $u$  é harmônica em  $\Omega$
- c)  $u = f$  em  $\partial\Omega$

Os problemas de contorno envolvendo a equação de Laplace são classificados de acordo com o tipo da condição de contorno.



### 12.2.1 *Problema de Dirichlet*

Também chamado de 1º **problema** de valor de contorno consiste em encontrar uma função harmônica  $u$  em  $\Omega$  que satisfaz a condição.

$$u = f(s) \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

onde  $f$  é uma função contínua prescrita sobre a fronteira do domínio  $\Omega$ .

**Exemplo** - Determinar a temperatura em estado estacionário dentro de uma região quando a temperatura for dada sobre o contorno .

### 12.2.2 *Problema de Neumann*

Também chamado de 2º **problema** de valor de contorno. Consiste em encontrar uma função  $u$  harmônica em  $\Omega$  que satisfaz a condição

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(s) \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

O símbolo  $\partial u/\partial n$  denota a derivada direcional de  $u$  ao longo da normal exterior sobre a fronteira  $\partial\Omega$ . Para que exista solução, dentre outras hipóteses,  $f$  deve satisfazer a *condição de compatibilidade*

$$\int_{\partial\Omega} f(s) ds = 0$$

que será mostrada neste capítulo.

### 12.2.3 *Problema de Robin*

Consiste em encontrar uma função  $u(x, y)$ , harmônica em  $\Omega$ , que satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = f(s), \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

onde  $h$  é uma constante e  $f$  é uma função conhecida.

**Exemplo** - Nos problemas de fluxo de calor a condição sobre o contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u - \mathbf{g}), \quad h > 0$$

significa que o fluxo de calor para dentro através da superfície é proporcional a diferença entre a temperatura  $u$  e a temperatura do meio  $\mathbf{g}$  (lei de Newton). Neste caso:

- a) Se a temperatura  $\mathbf{u}$  sobre contorno for **maior** que a temperatura  $\mathbf{g}$ , então o fluxo do calor será **para o exterior**.
- b) Se a temperatura  $\mathbf{u}$  for **menor** que  $\mathbf{g}$  então o fluxo de calor entra.

Particularmente o problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial r} + h(u - \text{sen } \theta) &= 0, & 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

pode representar fisicamente a temperatura em estado estacionário dentro de um círculo de raio 1, sendo  $g(\theta) = \text{sen } \theta$  a temperatura exterior.

Se  $h$  for "grande" então  $u = \text{sen } \theta$  sobre o contorno e temos um problema do tipo Dirichlet. Por outro lado se  $h = 0$  então a condição de contorno é reduzida a condição isolante sobre o contorno.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

e neste caso a solução  $u(r, \theta)$  é uma constante (a solução não é única).

Os problemas apresentados são chamados de **PVC interior**. Eles diferem do **PVC exterior** em 2 aspectos.

- a) No PVC exterior parte da fronteira está no infinito.
- b) Soluções do PVC exterior devem satisfazer a exigência adicional de serem limitadas no infinito.

## 12.3 Problemas de Dirichlet

### 12.3.1 Problema de Dirichlet no Retângulo

Procuraremos aqui a solução do seguinte problema

$$\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (12.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (12.2)$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (12.3)$$

onde  $f$  é contínua em  $0 \leq x \leq a$  e na sua extensão, e  $f'$  seccionalmente contínua.

#### 12.3.1.1 Solução formal

Fazendo

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

e substituindo na EDP, separando as variáveis, temos:

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

onde  $\lambda$  é a constante de separação de variáveis.

Pelas condições de contorno

$$X(0)Y(y) = 0 \quad X(a)Y(y) = 0$$

segue que  $X$  deve satisfazer o seguinte problema de contorno:

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ X(0) &= X(a) = 0 \end{aligned}$$

Como para  $\lambda \geq 0$ , temos apenas a solução trivial, vamos tomar  $\lambda = -\alpha^2 < 0$ ,  $\alpha > 0$ . Substituindo na equação e resolvendo-a encontraremos os seguintes valores de  $\alpha$ ,

$$\alpha = n\pi/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12.4)$$

que produzem as seguintes soluções não triviais:

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad (12.5)$$

Para a equação em  $Y$ , desde que  $\lambda = -(n\pi/a)^2$ , temos a solução:

$$Y(y) = C \cosh \frac{n\pi y}{a} + D \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

e sendo

$$u(x, b) = 0 = X(x)Y(b) = 0$$

temos  $Y(b) = 0$ , que fornece a seguinte solução para  $Y$

$$Y_n(y) = b_n \sinh \frac{n\pi}{a}(y - b) / \cosh n\pi b/a \quad (12.6)$$

Desta forma as soluções que satisfazem a EDP e as condições de contorno homogêneas são:

$$u_n(x, y) = b_n \sinh \frac{n\pi}{a}(y - b) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} / \cosh (n\pi b/a) \quad (12.7)$$

Usando o princípio de superposição tomamos como solução formal a seguinte série:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \frac{n\pi}{a}(y - b) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} / \cosh (n\pi b/a) \quad (12.8)$$

Pela condição de contorno em  $y = 0$  e por esta solução, segue:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -b_n \frac{\sinh n\pi b/a}{\cosh n\pi b/a} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

fornecendo

260

$$-b_n \frac{\sinh(n\pi b/a)}{\cosh(n\pi b/a)} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$

ou

$$b_n = -\frac{\cosh n\pi b/a}{\sinh n\pi b/a} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx \quad (12.9)$$

Assim podemos representar a solução formal do seguinte modo:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \frac{\sinh n\pi(b-y)/a}{\sinh n\pi b/a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad (12.10)$$

onde:

$$b_n^* = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx \quad (12.11)$$

Pode-se verificar, referência [2], que esta solução formal é efetivamente uma solução do problema apresentado.

### 12.3.1.2 Existência da solução no retângulo

Para verificar a existência temos que verificar a convergência uniforme e para tal, para usar o teste  $M$  de Weirstrass, deve-se procura uma série majorante. Com este raciocínio, usando as definições de seno e coseno hiperbólico, podemos mostrar que

$$\sinh \frac{n\pi}{a} (b-y) / \sinh \frac{n\pi b}{a} = e^{-n\pi y/a} [(1 - e^{-2n\pi(b-y)/a}) / (1 - e^{-2n\pi b/a})]$$

Uma vez que  $y$  varia de 0 a  $b$  o segundo membro pode ser majorado por

$$K_1 e^{-n\pi y/a}$$

onde  $K_1$  é uma constante. Por outro lado a partir da integral que define  $b_n^*$  uma vez que  $f$  é limitada segue que  $|a_n| \leq C_2$ . e portanto a série para  $u(x, t)$  é majorada pela série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} M e^{-n\pi y_0/a}, \quad y \geq y_0 > 0$$

onde  $M$  é uma constante. Como a série numérica é convergente, critério da razão, a série de  $u(x, y)$  converge uniformemente em  $0 \leq x \leq a$ ,  $y \geq y_0 > 0$ . Assim  $u(x, y)$  é contínua na região e satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0$$

Para satisfazer a EDP precisamos calcular as derivada termo a termo,  $u_{xx}$  e  $u_{yy}$ , o que é também possível pois as tais séries são majoradas por uma série numérica do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 M^* e^{-n\pi y_0/a}$$

a qual é convergente e portanto, como temos convergência uniforme, podemos derivar sob o sinal de somatório duas vezes.

Para satisfazer a condição de contorno não homogênea temos um trabalho extra (ver referência [2]).

### 12.3.2 *Problema de Dirichlet no Círculo.*

#### 12.3.2.1 *Solução Formal*

Para este problema consideraremos a região  $\Omega$  como sendo o círculo

$$x^2 + y^2 < a^2$$

tendo o contorno  $\partial\Omega : x^2 + y^2 = a^2$ . A equação de Laplace em coordenadas polares  $r, \theta$  é

$$\nabla^2 u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < a \quad (12.12)$$

Vamos admitir  $u(r, \theta)$  tal que  $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$  sendo

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad (12.13)$$

contínua no contorno  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $f(0) = f(2\pi)$  e  $f'$  seccionalmente contínua.

A solução deste problema consiste em construir uma função  $u$  harmônica em  $\Omega$  contínua em  $\partial\Omega$  e que seja igual a  $f$  sobre o o contorno.

Pelo método de Fourier vamos procurar uma solução sob a forma

$$u(r, \theta) = R(r)\psi(\theta)$$

Substituindo na EDP temos:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\psi''}{\psi} = \lambda$$

onde  $\lambda$  é a constante de separação de variáveis. Portanto temos duas equações

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' - \lambda R &= 0 \\ \psi'' + \lambda\psi &= 0 \end{aligned}$$

onde a equação em  $R$  é a **equação de Euler**.

Desde que  $u(r, \theta + 2\pi) = R(r)\Psi(\theta + 2\pi) = R(r)\Psi(\theta)$ , devemos ter  $\Psi(\theta) = \Psi(\theta + 2\pi)$ , ou seja  $\Psi$  é periódica de período  $2\pi$ .

**Vamos analisar os possíveis valores de  $\lambda$ .**

**a)  $\lambda < 0$**

Devido a periodicidade de  $\psi$ ,  $\psi(0) = \psi(2\pi)$ , este caso não é aceitável pois temos apenas a solução trivial.

262

**b)**  $\lambda = 0$ 

Desde que

$$\Psi(\theta) = A\theta + B$$

para que tenhamos solução periódica será preciso que  $A = 0$  ( $B$  qualquer) e portanto  $\lambda = 0$  fornece apenas a **solução constante**.

**c)**  $\lambda = k^2 > 0, \quad k > 0$ A solução para  $\psi$  torna-se:

$$\psi(\theta) = A \cos k\theta + B \sin k\theta$$

Devido a condição de periodicidade,  $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$  devemos ter  $\mathbf{k} = \mathbf{n}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$

A **equação de Euler** pode ser resolvida admitindo-se uma solução do tipo

$$R(r) = r^\alpha$$

onde  $\alpha$  é uma **constante a ser determinada**. Substituindo na ED, sendo  $\lambda = n^2$ , os possíveis valores de  $\alpha$  são  $+n, -n$ . Logo a solução geral é dada por

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Desde que  $r^{-n} \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow 0^+$ , para que tenhamos uma solução limitada em  $r = 0$  a constante  $D$  deve ser nula. Portanto  $u$  é dado por:

$$u_n(r, \theta) = C_n r^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta) \quad (12.14)$$

Usando princípio de superposição tomamos a solução como sendo:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta] \quad (12.15)$$

onde o termo constante  $a_0/2$  representa a solução para  $\lambda = 0$ . Usando a condição de contorno podemos escrever esta solução como:

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

onde designamos:

$$\rho \equiv r/a \quad (12.16)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (12.17)$$

Como a função  $f$  é contínua em toda reta e  $f'$  seccionalmente contínua em  $0 \leq \rho < 1$  então a convergência acima é uniforme.

Note que o termo  $a_0/2$ , dado por

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta,$$

representa a média da função  $f$ .

### 12.3.2.2 Existência da Solução

Pela imposição sobre a função  $f$  as seqüências  $a_n$  e  $b_n$  são limitadas por um fator positivo  $M$  e assim a série que define a solução formal é majorada pela série numérica:

$$2M (1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \rho_1^3 + \dots), \quad \rho < \rho_1 < 1$$

Por raciocínio semelhante as séries das derivadas também são majoradas. Pelo critério da razão todas estas séries numéricas são convergentes e portanto pelo  $M$ -teste a convergência destas séries é uniforme o que garante que podemos derivar a série termo a termo. Logo substituindo na equação vemos que a função  $u(\rho, \theta)$ , definida pela série acima, satisfaz a equação de Laplace e portanto é harmônica no círculo  $\rho < 1$ .

Falta mostrar que a solução em série obtida é contínua no disco fechado  $\rho \leq 1$ . Como  $f'$  é seccionalmente contínua os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  da série de Fourier são proporcionais a  $1/n$ , e se  $f$  for contínua a  $1/n^2$ . Portanto a série que define a solução é majorada pela série convergente

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

em  $\rho \leq 1$ . Logo existe a convergência uniforme em  $\rho \leq 1$  e portanto a solução construída é contínua neste intervalo.

### 12.3.2.3 Integral de Poisson no Círculo

No problema anterior, substituindo os coeficientes de Fourier  $a_n$  e  $b_n$  na série solução, temos:

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_0^{2\pi} f(\tau) [\cos n\tau \cos n\theta + \sin n\tau \sin n\theta] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \tau)] f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

onde a troca dos sinais de somatório e de integralção foi devida a convergência uniforme da série.

Uma solução fechada para a solução pode ser obtida da seguinte forma. Sendo  $0 \leq \rho < 1$ , e

$$\cos \theta \equiv (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) / 2,$$

264

segue que

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^n \cos n(\theta - \tau)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \rho^n \exp[in(\theta - \tau)] + \rho^n \exp[-in(\theta - \tau)] \}$$

Usando a fórmula da soma para séries geométricas

$$S_{\infty} = a_1 / (1 - q),$$

onde  $a_1$  é o primeiro termo da série e  $q$  a sua razão, temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^n \cos n(\theta - \tau)] &= 1 + \frac{\rho e^{i(\theta - \tau)}}{1 - \rho e^{i(\theta - \tau)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta - \tau)}}{1 - \rho e^{-i(\theta - \tau)}} \\ &= \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} \end{aligned}$$

Portanto a solução do problema de Dirichlet na forma fechada torna-se

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} f(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (12.18)$$

A partir desta solução pode-se mostrar, ver referência [2], que

$$\lim_{r \rightarrow a^-} u(r, \theta) = f(\theta)$$

Esta fórmula, que expressa a solução da equação de Laplace dentro do círculo em termos dos valores pré-definidos sobre o círculo, é chamada de fórmula integral de *de Poisson* e a função  $\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\tau})$ , definida por

$$K(a, r, \theta - \tau) = (a^2 - r^2) / [a^2 - 2ar \cos(\theta - \tau) + r^2],$$

é conhecida como *núcleo de Poisson*

Desde que:

$$1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2 \geq 1 - 2\rho + \rho^2 = (1 - \rho)^2 > 0$$

o denominador do integrando da integral de Poisson nunca se anula.

Sendo  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , e portanto  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , a integral de Poisson pode também ser escrita como:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - x^2 - y^2)}{1 - 2x \cos \tau - 2y \sin \tau + x^2 + y^2} f(\tau) d\tau \quad (12.19)$$

**Exercício** - Se  $R$  é o interior do círculo unitário centrado na origem,  $\partial R$  seu contorno e  $f(x, y) = 1 + x^2 - y$  sobre  $\partial R$ , encontre a solução do problema de Dirichlet na região  $\bar{R} \equiv R \cup \partial R$ .

**Solução** - A parametrização da circunferência  $\partial R$  é dada por

$$x = \cos \phi, \quad y = \sin \phi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$



e portanto

$$f(x, y) = 1 + \cos^2 \phi - \operatorname{sen} \phi \equiv f(\phi)$$

Pelo resultado anterior temos que:

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 + x^2 - y^2, & x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-x^2-y^2)(1+\cos^2 \tau - \operatorname{sen} \tau)}{1-2x \cos \tau - 2y \operatorname{sen} \tau + x^2 + y^2} d\tau, & x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

Desde que  $\rho = r/a$ ,  $r < a$ , temos também a integral de Poisson para um círculo de raio  $a$  como sendo:

$$u(x, y) = \begin{cases} f(x, y) \equiv f(\tau), & x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - x^2 - y^2)}{a^2 - 2ax \cos \tau - 2ay \operatorname{sen} \tau + x^2 + y^2} f(\tau) d\tau, & x^2 + y^2 < a^2 \end{cases}$$

#### 12.3.2.4 Existência de Solução no círculo

Desde que a solução formal do problema é dada por

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta],$$

onde  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier da função  $f(\theta)$  contínua em  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $f(0) = f(2\pi)$  e  $f'$  seccionalmente contínua, existe uma constante  $M > 0$  tal que  $|c_n| < M$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ , sendo  $c_n$  qualquer um destes coeficientes.

Se considerarmos a sequência de funções  $\{u_n\}$  definidas por

$$u_n = \rho^n [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta]$$

temos que

$$|u_n| < 2\rho_0^n M, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1$$

Como esta série numérica converge, pelo  $M$ -teste de Weierstrass a série que define  $u(r, \theta)$  converge uniformemente em qualquer região circular fechada.

Se derivarmos  $u_n$  em relação a  $r$  temos

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial r} \right| < 2 \frac{n}{a} \rho_0^{n-1} M$$

Usando o mesmo argumento anterior temos que a série obtida por derivação em relação a  $r$  converge uniformemente e portanto podemos derivar a série que define  $u$ , termo a termo, em relação a  $r$ . Com o mesmo raciocínio e usando a convergência uniforme podemos obter as séries de  $u_{rr}$  e  $u_{\theta\theta}$  derivando a série de  $u$  termo a termo. Introduzindo  $u_r$ ,  $u_{rr}$  e  $u_{\theta\theta}$  substituindo em

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

encontramos que

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1$$

Assim, uma vez que cada termo da série é uma função harmônica, e desde que as séries convergem uniformemente,  $u(r, \theta)$  é harmônica em qualquer ponto interior a  $0 \leq \rho < 1$ .

Para satisfazer a condição de contorno é um pouco mais demorado e geralmente usa-se recorrer a integral de Poisson. (referência [2]).

O problema de Dirichlet *exterior* ao círculo de raio  $a$  é feito de modo semelhante. Neste caso ao resolver a equação de Euler e obter a solução

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n} \quad n = 1, 2, 3,$$

para obter solução limitada em vez de tomar  $D = 0$ , como foi feito no problema de Dirichlet interior, tomamos  $C = 0$ .

Impondo que  $u$  deva ser limitado quando  $r \rightarrow \infty$ , obtemos a solução.

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^{-n}}{a^{-n}}\right)(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

onde:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau \quad n = 1, 2, \dots$$

Substituindo  $a_n$  e  $b_n$  na expressão de  $u$  e procedendo de modo análogo ao que foi feito na integral de Poisson, vamos obter

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - 1}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} f(\tau) d\tau$$

o qual é válida para  $\rho > 1$ .

### COMENTÁRIOS

- (1) Podemos obter os mesmos resultados com menos restrição sobre a função  $f$ .
- (2) Se o problema de Dirichlet no círculo for para um anel circular onde a equação de Laplace é válida em  $r_1 < r < r_2$  precisamos fornecer as condições de contorno em  $r = r_1$  e em  $r = r_2$ . Neste caso ao separarmos as variáveis e obtermos, para a equação de Euler, a solução

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

não anulamos  $D$  como se fez no problema anterior.

- (3) Na integral de Poisson observe que se  $\rho = 0$ , temos:

$$u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau$$

ou seja: Se  $u$  é **harmônica** no círculo, então o valor de  $u$  no centro é igual ao valor médio de  $u$  sobre o contorno do círculo. Este resultado é conhecido como *propriedade do valor médio*.

### 12.3.3 Princípio do Máximo

Supomos que  $u(x, t)$  é uma função **harmônica** em um domínio **limitado**  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$ , onde  $\bar{\Omega} \equiv \partial\Omega \cup \Omega$ . Então o **máximo** (e o **mínimo**) de  $u$  é alcançado **sobre a fronteira**  $\partial\Omega$  (referência [2]).

Em outras palavras uma solução da equação de Laplace no interior de uma região limitada com contorno  $\partial\Omega$ , como no retângulo, círculo, esfera, etc, alcança os seus valores máximos e mínimos em  $\partial\Omega$ .

**Exemplo** - Se for a função constante, que é uma função harmônica, os valores extremos estarão em  $\Omega$  como também na fronteira  $\partial\Omega$ .

**Exemplo** - Considere a região  $\Omega$  como sendo  $x^2 + y^2 < 1$  e  $\partial\Omega$  o seu contorno  $x^2 + y^2 = 1$ . A função  $u(x, y) = x^2 - y^2$  (parabolóide hiperbólico) é harmônica em  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$ .

Pelo resultado acima essa função alcança o valor máximo (mínimo) na região  $x^2 + y^2 \leq 1$  sobre o contorno  $\partial\Omega$  ou seja em  $x^2 + y^2 = 1$

Usando cálculo para funções de 2 variáveis esta conclusão pode ser verificada diretamente pois na região  $x^2 + y^2 \leq 1$  embora  $(0, 0)$  seja um ponto crítico neste ponto não ocorre nem máximo e nem mínimo relativo e portanto o máximo (mínimo) só poderá ocorrer na fronteira Assim na região fechada  $x^2 + y^2 \leq 1$  o máximo de  $u$  é  $u_{\max} = 1$  que é alcançado nos pontos  $(\pm 1, 0) \in \partial\Omega$  e o mínimo que é  $u_{\min} = -1$  ocorre nos pontos  $(0, \pm 1) \in \partial\Omega$ .

#### 12.3.3.1 Unicidade

Como consequência do princípio de máximo temos a unicidade de solução do problema de Dirichlet, isto é, se este problema tem solução ela é única.

**Justificativa** - Supomos que  $u_1$  e  $u_2$  são duas soluções do problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1 &= 0, & \nabla^2 u_2 &= 0 & \text{em } \Omega \\ u_1 &= f, & u_2 &= f & \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

Ou seja são funções

- de classe  $C^2_{\Omega}$  que satisfaçam a equação de Laplace;
- **contínuas** na região fechada  $\bar{\Omega} \equiv \partial\Omega \cup \Omega$ ;
- que tenham sobre a fronteira o mesmo valor de  $f$ .

Com estas hipóteses devemos mostrar que  $u_1 = u_2$  em  $\bar{\Omega}$ .

Desde que  $u_1$  e  $u_2$  são funções harmônicas em  $\Omega$ ,

$$v \equiv u_1 - u_2$$

é também harmônica em  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$  além de satisfazer a condição

$$v(x, y) = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

268

Pelo princípio do máximo

$$v(x, y) \leq 0 \quad \text{em } (x, y) \in \bar{\Omega}$$

e desde que o valor mínimo também está no contorno, temos:

$$v(x, y) \geq 0 \quad \text{em } (x, y) \in \bar{\Omega}$$

Segue que  $v(x, y) \equiv 0$  em  $(x, y) \in \bar{\Omega}$  e portanto  $u_1 \equiv u_2$  em  $\bar{\Omega}$

### 12.3.3.2 Estabilidade\*

Uma outra consequência do **princípio do máximo** é a **estabilidade**. Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções dos problemas

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1 &= 0 && \text{em } \Omega \\ u_1 &= g_1 && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_2 &= 0 && \text{em } \Omega \\ u_2 &= g_2 && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

Como  $u_1$  e  $u_2$  são soluções contínuas em  $\bar{\Omega}$ , e harmônicas dentro de  $\Omega$ , então

$$v = u_1 - u_2$$

está definida e é contínua em  $\bar{\Omega}$  e a função  $v$  satisfaz o seguinte problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 v &= 0, && \text{em } \Omega \\ v &= g_1 - g_2, && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

Pelo princípio do máximo (mínimo)  $g_1 - g_2$  alcança o máximo e o mínimo de  $v$  sobre  $\partial\Omega$ , portanto se

$$|g_1 - g_2| < \varepsilon, \quad \partial\Omega$$

então, como

$$-\varepsilon < g_1 - g_2 < \varepsilon, \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

segue que

$$-\varepsilon < v_{\min} \leq v_{\max} < \varepsilon, \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

e portanto em qualquer ponto interior em  $\Omega$  segue que

$$-\varepsilon < v_{\min} \leq v \leq v_{\max} < \varepsilon$$

implicando que  $|v| < \varepsilon$ , ou seja,  $|u_1 - u_2| < \varepsilon$ , em  $\Omega$

Em resumo, se  $|g_1 - g_2| < \varepsilon$  então  $|u_1 - u_2| < \varepsilon$ , e portanto temos a solução do problema de Dirichlet depende continuamente dos valores impostos na condição de contorno.

**Comentário:**

O princípio do máximo é válido para qualquer número de dimensões.

## 12.4 Problemas de Neumann

Considere o problema de Neumann

$$\nabla^2 u = 0, \quad \Omega \quad (12.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv f(z), \quad \partial\Omega \quad (12.21)$$

Este problema tem uma diferença em relação ao problema de Dirichlet. a solução **não** é única. Observe que se  $u$  for solução então  $u + C$ , onde  $C$  é uma constante, também é solução. Por esta razão se quisermos encontrar uma **única** solução, devemos ter alguma informação adicional, por exemplo, devemos conhecer a solução em um ponto.

Mas além desta particularidade para que este tipo problema tenha solução é preciso que a condição de contorno,  $f(z)$  definida sobre  $\partial\Omega$ , satisfaça necessariamente uma condição de compatibilidade que apresentaremos a seguir.

### 12.4.1 Condição de compatibilidade

Pela 2ª fórmula de Green temos

$$\int_{\Omega} \int (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dS = \int_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds \quad (12.22)$$

que é verdadeira para todas as funções  $u$  e  $v$  contínuas em  $\bar{\Omega}$  e de classe  $C^2$  em  $\Omega$ . Particularmente para  $v = 1$ , desde que

$$\nabla^2 v = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

segue que

$$\int_{\Omega} \int \nabla^2 u dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (12.23)$$

Nesta última identidade se  $u$  é uma função harmônica em  $\Omega$  então

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

270

e, por imposição do problema, sendo  $\partial u/\partial n = f(z)$  em  $\partial\Omega$ , temos

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$$

Portanto em **todo** problema de Neumann é necessário que a condição de contorno satisfaça esta condição, chamada de **condição de compatibilidade**, caso contrário o problema não terá solução. É importante ressaltar esta condição **não** é suficiente para provar a existência de solução do problema de Neumann.

**Exemplo** - Se o fluxo de calor para dentro de um círculo varia de acordo com

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \text{sen } \theta,$$

o problema da temperatura em estado **estacionário** dentro do círculo de raio  $r = 1$  é expresso por

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \text{sen } \theta, & r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

onde

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta d\theta = 0$$

Em outras palavras, se  $u$  representa a temperatura em estado **estacionário** este problema de Neumann faz sentido unicamente se o ganho (ou perda) de calor através da fronteira for **zero**.

**Exemplo** - O problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) &= 1, & r = 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

**não** faz sentido físico uma vez que o fluxo constante não produz uma solução estacionária.

**Exemplo** - O problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) &= \cos(2\theta), & r = 1, \end{aligned}$$

onde existe a condição de compatibilidade  $\int_0^{2\pi} (\partial u/\partial r) d\theta = 0$ , tem mais de uma solução. Por verificação uma solução para este problema é

$$u(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta),$$

porém é óbvio que se acrescentarmos uma constante a esta solução uma outra será obtida.

### 12.4.2 Problema de Neumann no Círculo

Considere o problema de Neumann no **interior** do círculo de raio  $R$

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 < r < R, \quad (12.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{\partial u}{\partial r} = f(\theta), \quad r = R \quad (12.25)$$

Tal como no caso do problema de Dirichlet no interior do círculo, uma solução da equação de Laplace é:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta) \quad (12.26)$$

Diferenciando com respeito a  $r$  e aplicando as condições de contorno, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} kR^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta) = f(\theta) \quad (12.27)$$

e portanto os coeficientes são dados por:

$$a_k = \frac{1}{k\pi R^{k-1}} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos k\tau d\tau \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (12.28)$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi R^{k-1}} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sen k\tau d\tau \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (12.29)$$

Observe que a expansão de  $f(\theta)$  em série do tipo (13.27) é possível unicamente pela condição de compatibilidade

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau = 0$$

Inserindo  $a_k$  e  $b_k$  na expressão de  $u(r, \theta)$  temos:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k(\theta - \tau) \right] f(\tau) d\tau, \quad (12.30)$$

Usando a identidade

$$-\frac{1}{2} \ln[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \tau)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k(\theta - \tau) \quad (12.31)$$

tomando  $\rho = r/R$ , encontramos:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} - \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln[R^2 - 2rR \cos(\theta - \tau) + r^2] f(\tau) d\tau \quad (12.32)$$

De maneira semelhante, para o **problema de Neumann exterior**, encontraremos que:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln[R^2 - 2rR \cos(\theta - \tau) + r^2] f(\tau) d\tau \quad (12.33)$$

### 12.4.3 Problema de Neumann no Retângulo

Para o problema de Neumann no retângulo.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b \\ u_x(0, y) &= f_1(y), & u_x(a, y) &= f_2(y) \\ u_y(x, 0) &= g_1(x), & u_y(x, b) &= g_2(x) \end{aligned}$$

a condição de compatibilidade (13.25) significa que:

$$\int_0^a [g_1(x) - g_2(x)] dx + \int_0^b [f_2(y) - f_1(y)] dy = 0$$

Ao decompor este problema em outros do tipo Neumann com condições de contorno mais favoráveis será preciso que a condição de compatibilidade aconteça em **cada** problema, o que convenhamos é bastante restritivo. Portanto este método em geral não é o mais adequado. Para tais problemas, referência [2], é proposto outro método menos restritivo onde se usa apenas **uma** vez a condição de compatibilidade!

## 12.5 RESUMO

Problemas de contorno são problemas cuja solução não varia com o tempo, mas apenas em relação as variáveis espaciais. Esses problemas são descritos por equações elípticas, onde destacamos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 && \text{equação de Laplace} \\ \nabla^2 u &= f && \text{equação de Poisson} \\ \nabla^2 u + \lambda u &= 0 && \text{equação de Helmholtz} \end{aligned}$$

Uma função  $u$  é dita *harmônica* em  $\Omega$  se ela for de classe  $C_\Omega^2$  e satisfizer a equação de Laplace identicamente nesse domínio. Os principais problemas de contorno que envolvem a equação de Laplace são:

**Problema de Dirichlet-** Consiste em encontrar a função que satisfaz:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 && \text{em } \Omega \\ u &= f(s) && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$



**Problema de Neumann-**Consiste em encontrar a função que satisfaz:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= g(s) & \text{em } \partial\Omega\end{aligned}$$

onde  $\partial u / \partial \vec{n}$  denota a derivada direcional de  $u$  em relação a **normal exterior** sobre a fronteira. Neste problema a solução não é única e para a existência da solução a função  $g(s)$  **não** pode ser arbitrária mas deve satisfazer a condição de compatibilidade

$$\int_{\partial\Omega} g(s) ds = 0$$

Particularmente no círculo temos que  $g$  deve satisfazer:

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0$$

**Problema de Robin:** É o problema

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= 0 & \text{em } u \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + hu &= f(s), & u \in \partial\Omega\end{aligned}$$

onde  $h$  é uma constante e  $f$  uma função conhecida. Este problema ocorre, por exemplo, no fluxo de calor através de uma superfície.

Para se obter a solução formal destes problemas, quer no retângulo ou no círculo, usamos o método de Fourier. Particularmente no problema de Dirichlet no círculo ao substituirmos as expressões de  $a_n$  e  $b_n$  na solução série e simplificarmos adequadamente vamos obter a solução dada na forma fechada, solução esta chamada de integral de Poisson

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} f(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \rho < 1$$

sendo  $u(1, \theta) = f(\theta)$

## 12.6 Problemas Propostos

- (1) Uma placa de raio circular unitário, cujas faces são isoladas, tem metade de sua fronteira mantida à temperatura constante  $u_1$  e a outra metade à temperatura  $u_2$ . Determine a temperatura estacionária.

Resp.:

$$u(\rho, \theta) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u_1 - u_2)(1 - \cos m\pi)}{m\pi} \rho^m \sin(m\theta)$$

- (2) Determine a temperatura estacionária  $u(x, t)$  numa placa quadrada  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  de faces isoladas sabendo-se que a temperatura no lado,  $y = 1$ ,  $0 < x < 1$ , é mantida à temperatura constante  $u_1$  e nos demais lado à temperatura zero.

Resp.:

$$u(x, y) = \frac{2u_1}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos m\pi}{m \sinh m\pi} \operatorname{sen}(m\pi x) \sinh(m\pi y)$$

- (3) Determine a temperatura estacionária em uma placa delimitada por 2 círculos concêntricos de raios  $a$  e  $b$ ,  $a < b$ , sabendo-se que as faces estão isoladas e os contornos são mantidos às temperaturas  $f(\theta)$  e  $g(\theta)$  respectivamente.
- (4) Ache a solução  $u(x, y)$  da equação de Laplace no retângulo  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & 0 < y < b \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= g(x), & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

Resp.:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}, \quad c_n = \frac{2/a}{\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$

- (5) Ache a solução  $u(r, \theta)$  da equação de Laplace na região semicircular  $0 < r < a$ ,  $0 < \theta < \pi$  satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= f(\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(r, 0) &= 0, & u(r, \pi) = 0, & 0 \leq r \leq a \end{aligned}$$

Resp.:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \operatorname{sen} n\theta \quad c_n = \frac{2}{\pi a^n} \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta$$

- (6) Ache a solução  $u(x, y)$  da equação de Laplace na faixa semi infinita  $y > 0$ ,  $0 < x < a$ , satisfazendo também as condições de contorno.

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

e a condição que  $u(x, y) \rightarrow 0$  quando  $y \rightarrow \infty$ . Resp.:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$

- (7) Mostre que a condição de compatibilidade para o problema de Neumann

$$\nabla^2 u = f \quad \text{em } \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{em } \partial\Omega$$

é dada por

$$\int_{\Omega} f ds + \int_{\partial\Omega} g ds = 0$$

onde  $\partial\Omega$  é a fronteira do domínio  $\Omega$ . Se  $f = g = 1$  e  $\Omega$  for uma região circular de raio 1, o problema é compatível?

- (8) Determine a solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 1 < r < 2, & \quad 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) &= \text{sen } \theta, & u(2, \theta) &= 0, & \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(r, 0) &= u(r, \pi) = 0, & 1 \leq r \leq 2 \end{aligned}$$

*Resp.:*

$$u(r, \theta) = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{4} \right) \text{sen } \theta$$

- (9) Mostre que a solução do problema entre os círculos de raios 1 e 2

$$\nabla^2 u = 0, \quad 1 < r < 2$$

$$u(1, \theta) = 0, \quad u(2, \theta) = \text{sen } \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

é dada por  $u(r, \theta) = \frac{2}{3} \left( r - \frac{1}{r} \right) \text{sen } \theta$ .

- (10) Considere o problema de potencial entre dois círculos concêntricos de raios 1 e 2.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) &= 3, & u(2, \theta) &= 5, & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Mostre que a solução é dada por  $u(r, \theta) = 3 + 2.9 \ln r$

**SUGESTÃO:** A solução é independente de  $\theta$  uma vez que as condições de contorno são independentes de  $\theta$ .

- (11) Resolva o problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 1 < r < 2, & \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u_r(1, \theta) &= \text{sen } \theta, & u(2, \theta) &= 0, & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

*Resp.:*

$$u(r, \theta) = -\frac{1}{3} \left( r - \frac{4}{r} \right) \text{sen } \theta + \text{constante}$$

- (12) Mostre que a solução do problema, entre os círculos de raios 1 e 2,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 1 < r < 2, \\ u(1, \theta) &= \text{sen } \theta, & u(2, \theta) &= \text{sen } \theta, & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

276

é dada por:

$$u(r, \theta) = \left( \frac{1}{3}r + \frac{2}{3r} \right) \text{sen } \theta$$

(13) Resolva o seguinte problema para a região semi circular:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < r < R, & \quad 0 < \theta < \pi \\ u_r(R, \theta) &= \text{sen } \theta, & 0 &\leq \theta \leq \pi \\ u(r, 0) &= u(r, \pi) = 0 \end{aligned}$$

*Resp.:*

$$u(r, \theta) = r \text{sen } n\theta$$

(14) Resolva o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < x < 1, & \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) &= x(x-1), & 0 &\leq x \leq 1 \\ u(x, 1) &= 0, & u(0, y) &= u(1, y) = 0 \end{aligned}$$

*Resp.:*

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3 \sinh n\pi} \text{sen } n\pi x \sinh n\pi(y-1)$$

(15) Seja  $R$  uma região circular centrada em  $(0, 0)$ . Encontre a integral de Poisson dos seguintes problemas de Dirichlet, cujo raio e a função  $f$  definida sobre o contorno são dados por:

(a)

$$f(x, y) = x + y^2, \quad r = 1 \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos t + \text{sen}^2 t)(1 - x^2 - y^2) dt}{1 - 2x \cos t - 2y \text{sen } t + x^2 + y^2}$$

(b)

$$f(x, y) = x, \quad r = 2 \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos t(4 - x^2 - y^2) dt}{4 - 4x \cos t - 4y \text{sen } t + x^2 + y^2}$$

(16) Considere a distribuição de temperatura em uma placa fina retangular com as duas faces isoladas. Resolva o problema.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) &= f(x), & u(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a \\ u_x(0, y) &= 0, & u_x(a, y) &= 0, & 0 \leq y \leq b \end{aligned}$$

e interprete-o fisicamente [2].

$$u(x, y) = \frac{(b-y)a_0}{b} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{a}(b-y)}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

onde:

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx$$

(17) O problema de Neumann no círculo de raio 1 dado a seguir tem solução?

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, \quad 0 < r < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \sin^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

(18) Qual é a solução do problema de Dirichlet

$$\nabla^2 u = 0, \quad 1 < r < \infty$$

para os seguintes contornos?

a)  $u(1, \theta) = 1$

b)  $u(1, \theta) = 1 + \cos(3\theta)$

c)  $u(1, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta < \pi \\ 0, & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$

(19) Resolva o problema de Neumann exterior

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, \quad a < r < \infty \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) &= \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

(20) Ache a solução limitada  $u(r, t)$  do problema

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0 \\ u(r, 0) &= f(r) \end{aligned}$$

(21) Se  $\Omega$  for uma região limitada e fechada cuja fronteira é  $\partial\Omega$  é suave por partes e  $\vec{n}$  vetor normal exterior a esta fronteira se  $\vec{F}$  for de classe  $C^1$  o teorema da divergência, ou de Gauss é dado por

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dv = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Fazendo  $\vec{F} = f \nabla g$  mostre que

$$\iiint_V f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \, dv = \oint_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS$$

Após intercambiar  $f$  e  $g$  prove a 2ª fórmula de Green.



## Chapter 13

# Problemas Não Homogêneos

**Finalidade** - Para que os PVIC apresentados anteriormente pudessem ser resolvidos pelo método de separação de variáveis foi indispensável que ele fosse homogêneo, ou seja que a equação e as condições de contorno fossem homogêneas, como no problema de calor a seguir

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= 0, & t > 0, & 0 < x < L, \\u(0, t) &= u(L, t) = 0, & t > 0 \\u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L\end{aligned}$$

Quando o PVIC é **não** homogêneoisto, por exemplo, se

$$u(0, t) = 1, \quad u(L, t) = 0,$$

não seria possível aplicar o método de Fourier, sem antes fazer uma alteração conveniente do problema.

O método de separação de variáveis também depende da homogeneidade da EDP, por exemplo, quando o calor é gerado a uma taxa constante,  $f(x, t) = r$ , dentro da haste, equação toma a forma

$$ku_{xx} + r = u_t$$

a qual certamente **não** é separável.

Assim é evidente que o sucesso para aplicar o método de Fourier depende da homogeneidade da EDP e da condição de contorno. Se o PVIC for **não** homogêneo o processo de obtenção da solução nem sempre é tão simples. A finalidade deste capítulo será apresentar um procedimento capaz de usar este método em uma classe de **problemas lineares não homogêneos**, e que será feito a partir de casos particulares. A discussão será puramente formal, isto é vamos ignorar as questões de convergência e continuidade.

A estratégia para resolver tais problemas não é única, pode ser, por exemplo:

- repassar a não homogeneidade das condições de contorno para a EDP e depois resolver esse novo problema com técnicas próprias; ou
- repassar a não homogeneidade da EDP para as condições de contorno; ou
- decompor o problema em outros mais simples .

A questão central será resolver um problema quando a equação for não homogênea, o que será feito por um método análogo ao de variação de parâmetros usado nas EDOs. Começaremos a análise de tais problemas com a decomposição em outros mais simples, onde a abordagem será puramente formal.

### 13.1 Decomposição de Problemas

Quando a EDPL ou a condição de contorno for não homogênea uma decomposição adequada em problemas mais simples pode ser um caminho para a resolução de tais problemas. Por meio de exemplos apresentaremos o que venha ser "problemas mais simples".

**Exemplo** - Considere o problema

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_t &= \text{sen } x \\ u(x, 0) &= e^{-x}\end{aligned}$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são de classe  $C^2$ . Se

a)  $u_1$  for solução do problema:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \text{sen } x, \quad u_1(x, 0) = 0;$$

b)  $u_2$  fo solução do problema:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad u_2(x, 0) = e^{-x}$$

Então a função  $u = u_1 + u_2$  será solução do problema dado pois

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_1 + u_2) + \frac{\partial}{\partial t} (u_1 + u_2) = \text{sen } x$$

$$u(x, 0) = (u_1 + u_2)(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = e^{-x}$$

Esta idéia pode ser aproveitada para casos mais gerais, como no exemplo a seguir:

**Exemplo** - O problema



$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) & 0 < x < L & & t > 0 \\
u(0, t) &= g_1(t) & & & t > 0 \\
u(L, t) &= g_2(t) & & & t > 0 \\
u(x, 0) &= g_3(x) & 0 \leq x \leq L & & \\
u_t(x, 0) &= g_4(x) & 0 \leq x \leq L & & 
\end{aligned}$$

pode ser decomposto em 4 problemas particulares com variáveis dependentes  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$ ,

$$u = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t)$$

da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x, t)$$

com as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
u_1(0, t) &= 0, & u_1(L, t) &= 0, & u_1(x, 0) &= g_3(x), & \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) &= g_4(x) \\
u_2(0, t) &= g_1(t), & u_2(L, t) &= 0, & u_2(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) &= 0 \\
u_3(0, t) &= 0, & u_3(L, t) &= g_2(t), & u_3(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_3}{\partial t}(x, 0) &= 0 \\
u_4(0, t) &= 0, & u_4(L, t) &= 0, & u_4(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_4}{\partial t}(x, 0) &= 0
\end{aligned}$$

É evidente que esta decomposição pode ser generalizada desde que o problema seja **linear**.

**Exercício** - Decomponha o PVIC:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + \text{sen}(\pi x) & 0 < x < 1 & , & 0 < t < \infty \\
u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= 0 & 0 < t < \infty \\
u(x, 0) &= \text{sen}(2\pi x) & 0 \leq x \leq 1 & & 
\end{aligned}$$

em dois problemas sendo que em um deles a não homogeneidade aparecerá apenas na EDP e no outro apenas na condição inicial.

**Solução** - Como o problema é linear podemos fazer a seguinte decomposição,  $u = v + w$ , sendo

$$\begin{aligned}
w_t &= w_{xx} + \text{sen}(\pi x) \\
w(0, t) &= w(1, t) = 0, & w(x, 0) &= 0
\end{aligned}$$

282

e

$$\begin{aligned}v_t &= v_{xx} \\v(0, t) &= v(1, t) = 0 \\v(x, 0) &= \text{sen}(2\pi x)\end{aligned}$$

Se estes problemas forem resolvidos individualmente a solução do problema apresentado será  $v + w$  ◀

Uma vez decomposto devemos resolver cada um individualmente. No entanto a resolução destes problemas individuais requer uma estratégia que dependerá, ou da natureza do termo não homogêneo da EDP ou da condição de contorno: se forem variáveis teremos um procedimento diferente do caso em que forem constantes. Vamos estudar a seguir alguns casos particulares.

**Comentário** - A decomposição só é útil quando temos a solução de cada um dos problemas. Para ilustrar tomamos o seguinte problema de EDO

$$y'' + \pi^2 y = \pi^2 x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

que tem por solução

$$y = c_1 \sin \pi x + \cos \pi x + x$$

Como este problema é linear poderíamos decompô-lo em outros dois, por exemplo:

$$\begin{aligned}u'' + \pi^2 u &= 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \\v'' + \pi^2 v &= \pi^2 x, \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0\end{aligned}$$

Se  $u_0$  for a solução do primeiro e  $v_0$  solução do segundo, então a solução do problema dado seria  $y = u_0 + v_0$ , no entanto o primeiro problema **não** tem solução (referência [9])!

### 13.2 PVIC com condições de contorno não homogêneas

Nesta seção mostraremos como transformar condições de contorno **não** homogêneas em homogêneas. Para servir como roteiro vamos tomar um caso particular envolvendo a equação do calor homogênea e considerar o seguinte PVIC:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{13.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(L, t) + \beta_2 u(L, t) = g_2(t) \end{cases} \tag{13.2}$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \tag{13.3}$$

Ilustraremos o procedimento em dois problemas particulares com condições de contorno não homogêneas - um com **condição constante** e outro com **condição variável**.

### 13.2.1 *Condição de contorno constante.*

Como exemplo considere o problema onde a EDP é **homogênea** e a condição de contorno **não homogênea**, porém **constante**:

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (13.4)$$

$$u(0, t) = 10, \quad u(L, t) = 100 \quad (13.5)$$

$$u(x, 0) = 20, \quad (13.6)$$

Supomos uma solução como sendo:

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$$

onde  $\psi$ , **dependendo apenas de  $x$** , será determinada adequadamente de modo a transformar o problema dado em outro de variável dependente  $v$  porém com **condição de contorno homogênea**.

Substituindo na EDP temos

$$v_{xx} + \psi_{xx} = v_t$$

onde  $\psi$  é escolhido de forma que

$$\psi_{xx} = 0$$

resultando

$$v_{xx} = v_t$$

Sendo

$$\begin{aligned} u(0, t) = 10 &= v(0, t) + \psi(0) = 10 \\ u(L, t) = 100 &= v(L, t) + \psi(L) = 100 \\ u(x, 0) = 20 &= v(x, 0) + \psi(x) \end{aligned}$$

vamos impor sobre  $\psi$  condições de contorno de tal forma que o problema em  $v$  tenha condição de **contorno homogênea**. Assim tomamos:

$$\begin{aligned} \psi(0) = 10 &\Rightarrow v(0, t) = 0 \\ \psi(L) = 100 &\Rightarrow v(L, t) = 0 \end{aligned}$$

além de:

$$v(x, 0) = 20 - \psi(x)$$

Portanto teremos que resolver:

a) O problema de EDO com condições de contorno **não homogêneas**

$$\psi_{xx} = 0, \quad \psi(0) = 10, \quad \psi(L) = 100 \quad (13.7)$$

b) O problema de EDP com condição de contorno **homogênea**

$$\begin{aligned} v_{xx} &= v_t \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) &= 20 - (90x/L + 10) \equiv 10 - 90x/L \end{aligned} \quad (13.8)$$

Como a solução do primeiro é:

$$\psi(x) = \frac{90}{L}x + 10, \quad (13.9)$$

se

$$v_0(x, t) = v(x, t)$$

for solução do problema em  $v$ , que já foi resolvido em capítulos anteriores, a solução formal do problema proposto será:

$$u(x, y) = \frac{90}{L}x + 10 + v_0(x, t) \quad (13.10)$$

De forma análoga se a equação da onda, ou do calor, for **homogênea** e a condição de contorno for **constante arbitrária**

$$u(0, t) = U_0, \quad u(L, t) = U_1, \quad t \geq 0$$

o problema auxiliar para  $\psi$  torna-se

$$\psi_{xx} = 0$$

$$\psi(0) = U_0, \quad \psi(L) = U_1$$

e a solução correspondente é dada por

$$\psi(x) = U_0 + \frac{x}{L}(U_1 - U_0) \blacktriangleleft$$

Tal com antes se a condição de contorno for constante arbitrária e a EDP for **não homogênea**, **porém** do tipo

$$u_t = u_{xx} + F(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

e a função  $F$  depende **apenas** de  $x$  o procedimento é o mesmo.

**Resumindo** - Se o termo **não** homogêneo da EDP linear e a condição de contorno **não** depende do tempo fazemos a decomposição

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$$

onde **impomos** sobre a função  $\psi$  "toda" não homogeneidade do problema, com uma diferença: em vez de procurar uma função auxiliar  $\psi$  tal que  $\psi_{xx} = 0$  escolheremos  $\psi$  de modo que

$$\psi_{xx} = F(x)$$

Neste problema envolvendo esta equação do calor não homogênea usamos o mesmo procedimento, no entanto como

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x),$$

e  $v$  é uma solução limitada, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$$

e portanto devemos ter  $u(x, \infty) \rightarrow \psi(x)$ . Esta solução  $\psi(x)$ , que não depende de  $t$ , é chamada de *solução em regime permanente* enquanto que  $v$  é chamada de *solução transitória*. Observe que a solução  $\psi(x)$  representa a solução do problema em estado estacionário (solução quando  $t \rightarrow \infty$ , ou  $\partial/\partial t = 0$ ).

Dependendo do problema do calor podemos não ter uma solução em regime permanente.

Vamos esclarecer este procedimento no problema da equação da onda a seguir.

**Exercício** - Considere o PVIC com CC não homogênea, porém constante

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + F(x), & 0 < x < L, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L & \\ u(0, t) &= A, \quad u(L, t) = B, & t \geq 0 & \end{aligned} \quad (13.11)$$

Usando uma transformação do tipo  $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$  obtenha um problema na variável  $v$  com condição de contorno homogênea.

**Solução** - Supondo uma solução da forma:

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x), \quad (13.12)$$

após substituir na EDP e efetuar as devidas simplificações temos:

$$v_{tt} = v_{xx} + \psi_{xx} + F(x)$$

Escolhendo  $\psi(x)$  de forma que

$$\psi_{xx} + F(x) = 0$$

286

segue

$$v_{tt} = v_{xx}$$

Por outro lado pelas condições impostas ao problema, segue:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x, 0) + \psi(x) = f(x) \\ u_t(x, 0) &= v_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) &= v(0, t) + \psi(0) = A \\ u(L, t) &= v(L, t) + \psi(L) = B \end{aligned}$$

Desta forma se definirmos  $\psi(x)$  como sendo a solução do problema de contorno

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + F &= 0 \\ \psi(0) &= A \quad \psi(L) = B \end{aligned} \quad (13.13)$$

então  $v(x, t)$  deve satisfazer o seguinte problema

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx} \\ v_t(x, 0) &= g(x), \quad v(x, 0) = f(x) - \psi(x) \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (13.14)$$

onde **tanto a EDP como à CC são homogêneas.**

Vamos determinar a solução para  $\psi$ :

Integrando-se uma vez em relação a  $x$  obtemos:

$$\psi_x(x) = - \int_0^x F(r) dr + C$$

Integrando-se novamente, temos a solução geral para  $\psi$ :

$$\psi(x) = - \int_0^x \left( \int_0^s F(r) dr \right) ds + Cx + D \quad (13.15)$$

Substituindo nesta solução as condições de contorno de  $\psi$ , segue que:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= A = D \\ \psi(L) &= - \int_0^L \left( \int_0^s F(r) dr \right) ds + CL + A = B \end{aligned}$$

e portanto:

$$C = \frac{B - A}{L} + \frac{1}{L} \int_0^L \left( \int_0^s F(r) dr \right) ds$$

Substituindo na solução geral  $\psi$  os valores das constantes  $C$  e  $D$ , temos

$$\psi(x) = A + (B - A) \frac{x}{L} + \frac{x}{L} \int_0^L \left( \int_0^s F(r) dr \right) ds - \int_0^x \left( \int_0^s F(r) dr \right) ds \quad (13.16)$$

Como no problema em  $v$  tanto a equação como a CC **são homogêneas**, pelo método de separação de variáveis acha-se a solução  $v_0(x, t)$ , e a solução do problema proposto torna-se

$$u(x, t) = v_0(x, t) + \psi(x)$$

**Resumindo** - Se a condição de contorno for **não homogênea**, porém **constante**, e/ou o termo **não homogêneo** da EDP **não depende de  $t$** , podemos transformar este problema em outro onde tanto a **EDP** como a **CC** são **homogêneas**.

### 13.2.2 PVIC com condição de contorno variável

Este tipo de problema é mais complicado do que o anterior pois ao transformar o problema dado em outro com **condição de contorno homogênea**, a **EDP** será **não homogênea** mesmo se originalmente fosse homogênea. Em outras palavras a **não** homogeneidade da CC será **transferida** para a EDP. Vamos ilustrar este caso com o seguinte exemplo, onde a diferença é que a função auxiliar  $\psi$  em vez de depender apenas de  $x$  **dependerá também de  $t$** .

**Exemplo** - Considere o PVIC

$$\begin{array}{ll} \text{EDP} & u_{xx} = u_t \\ \text{CC} & u(0, t) = u_0(t), \quad u(L, t) = u_1(t), \quad t \geq 0 \\ \text{CI} & u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{array} \quad (13.17)$$

Vamos admitir que a solução  $u$  seja do tipo:

$$u(x, t) = \psi(x, t) + v(x, t) \quad (13.18)$$

onde  $\psi(x, t)$ , **dependendo de  $x$  e de  $t$** , será determinada convenientemente de modo que a condição de contorno para o problema em  $v$  seja homogênea. No entanto a abordagem é diferente:

Construiremos uma função  $\psi$  onde "jogaremos" sobre esta a não homogeneidade da condição de contorno sendo que esta função **não** satisfará, necessariamente, uma equação diferencial.

Substituindo na EDP, temos:

$$v_{xx} - v_t = -(\psi_{xx} - \psi_t)$$

Pelas condições do problema, segue que

$$\begin{array}{lll} u(0, t) = \psi(0, t) + v(0, t) = u_0(t) & \Rightarrow & v(0, t) = u_0(t) - \psi(0, t) \\ u(L, t) = \psi(L, t) + v(L, t) = u_1(t) & \Rightarrow & v(L, t) = u_1(t) - \psi(L, t) \\ u(x, 0) = \psi(x, 0) + v(x, 0) = f(x) & \Rightarrow & v(x, 0) = f(x) - \psi(x, 0) \end{array}$$

288

Assim se escolhermos uma função  $\psi(x, t)$  de modo que

$$\psi(0, t) = u_0(t), \quad \psi(L, t) = u_1(t),$$

por exemplo,

$$\psi(x, t) = u_0(t) + \frac{x}{L} [u_1(t) - u_0(t)]$$

para  $v$  termos o seguinte PVIC

$$\begin{aligned} v_{xx} - v_t &= u_0'(t) + x[u_1'(t) - u_0'(t)]/L \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) &= f(x) - \psi(x, 0) = f(x) - u_0(0) - x[u_1(0) - u_0(0)]/L \end{aligned}$$

O "lucro" foi que a condição de contorno **é homogênea** e o "prejuízo" é que a EDP em  $v$  tornou-se **não** homogênea.

**Resumindo** - Com a construção da função  $\psi$  da forma acima o problema para  $v$  é composto:

- (1) de uma EDP não homogênea do tipo

$$v_{xx} - v_t = F(x, t),$$

onde  $F$  é conhecida pois as funções  $u_0(t)$  e  $u_1(t)$  são conhecidas;

- (2) da condição de contorno **homogênea**

$$v(0, t) = v(L, t) = 0,$$

- (3) e da condição inicial

$$v(x, 0) = f_1(x),$$

onde  $f_1$  é conhecida.

Se por algum método descobrirmos uma solução  $v = v_0$  para este problema, a solução  $u$  do problema dado será

$$u(x, t) = u_0(t) + \frac{x}{L} [u_1(t) - u_0(t)] + v_0(x, t) \quad (13.19)$$

**Exemplo** - Decomponha o problema

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = \cos t, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$



da seguinte forma

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t)$$

onde o problema em  $v$  tenha condição de contorno homogênea.

**Solução** - Como neste problema

$$L = 1, \quad u(0, t) = u_0(t) = \cos t, \quad u(L, t) = u_1(t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) = 0$$

a expressão para  $\psi$  torna-se

$$\psi(x, t) = \cos t + x(0 - \cos t) = (1 - x) \cos t$$

e portanto usaremos a seguinte decomposição

$$u(x, t) = v(x, t) + (1 - x) \cos t$$

onde a função  $v$  satisfaz o seguinte problema com condição de contorno homogênea:

$$v_{xx} + (1 - x) \sin t = v_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$v(x, 0) = x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Observe neste problema que a equação original é **homogênea** porém a equação transformada é **não homogênea**. O método de solução de tal problema não é imediato e será apresentado na próxima seção.

## COMENTÁRIOS

- (1) A expressão que tomamos para  $\psi(x, t)$  pode ser obtida, admitindo-se  $t$  como parâmetro, como sendo a função afim (reta) que passa pelos pontos:

$$(0, u_0(t)), \quad (L, u_1(t))$$

É lógico que a expressão para  $\psi$  não é única.

- (2) Se a condição de contorno for de outro tipo, por exemplo,

$$u(0, t) = g_1(t)$$

$$u_x(L, t) + hu(L, t) = g_2(t)$$

ao fazermos a decomposição  $u = \psi + v$ , para que  $\psi$  satisfaça estas condições tomamos como sendo da forma

$$\psi(x, t) = A(t) [1 - x/L] + B(t) [x/L]$$

e determinamos  $A$  e  $B$  de tal forma que as condições sejam preservadas.

### 13.3 PVIC com EDP não Homogênea

Pelo que foi visto na seção anterior a não homogeneidade da condição de contorno pode ser "descarregada" na EDP tornando assim uma equação onde o termo não homogêneo é  $F(x, t)$ . Temos dois casos:

- a)  $F$  depende apenas de  $x$  e a CC é homogênea,
- b)  $F$  depende de  $x$  e de  $t$

Como o primeiro caso já foi analisado estudaremos apenas o segundo onde partiremos de um problema com CC **homogênea**. O método que utilizaremos consistirá na decomposição do termo **não** homogêneo da EDP usando expansão em Série de Fourier.

Para ilustrar consideraremos o seguinte problema envolvendo a equação do calor

$$\begin{array}{ll} \text{EDP} & u_t = u_{xx} + F(x, t) \quad 0 < x < L \quad t > 0 \\ \text{CC} & u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ \text{CI} & u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq L \end{array} \quad (13.20)$$

onde  $L$  é constante,  $F(x, t)$  e  $\varphi(x)$  funções conhecidas.

**1º passo:** Resolvemos o problema com  $F(x, t) \equiv 0$

Como a EDP e as condições de contorno são homogêneas, usando o método de Fourier vamos encontrar a solução:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp[-n^2 \pi^2 t / L^2] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (13.21)$$

onde:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.22)$$

**2º passo:** Uma vez obtido o conjunto ortogonal  $\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \dots\}$  vamos procurar uma solução da equação **não homogênea** sob a forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (13.23)$$

onde  $T_n(t)$  serão determinadas convenientemente.

Supondo que esta série seja adequadamente convergente a condição de contorno  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  está verificada, e sendo

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \\ u_{xx} &= -\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

substituindo na EDP, encontramos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n'(t) + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \right] \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = F(x, t) \quad (13.24)$$

**3<sup>o</sup> passo** - Decompomos a função  $F(x, t)$

A função  $F(x, t)$  pode ser considerada como função de  $x$  ( $t$  parâmetro) e vamos desenvolvê-la no intervalo  $0 \leq x \leq L$  em série de Fourier do conjunto ortogonal obtido, ou seja,  $\left\{ \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right\}$ . Assim

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (13.25)$$

onde:

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(z, t) \text{sen} \frac{n\pi z}{L} dz \quad (13.26)$$

Substituindo a expressão de  $F(x, t)$  obtida em 13.25 na expressão (13.24), segue:

$$T_n'(t) + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) = F_n(t) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.27)$$

onde  $F_n$  é conhecida para cada  $n$  pois  $F(x, t)$  é dada.

**4<sup>o</sup> passo** - Determinação de  $T_n$

Usando a condição inicial do problema proposto na série solução 13.23 temos:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (13.28)$$

onde  $T_n(0)$  são os coeficientes da SF seno da função  $\varphi(x)$ , ou seja

$$T_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (13.29)$$

Assim devemos resolver o problema consistindo da EDO

$$T_n'(t) + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) = F_n(t) \quad (13.30)$$

onde  $T_n(0)$ , dado pela expressão anterior, é conhecido pois  $\varphi(x)$  é a condição inicial do problema. Uma vez achado  $T_n(t)$  temos a solução em série.

## COMENTÁRIOS

- (1) Existem outros procedimentos para resolver uma EDP linear não homogênea. Um deles é baseado na transformada de Fourier finita seno e coseno e outro através das **funções de Green** (ver referência [5]).

- (2) Se a condição de contorno não for homogênea devemos primeiramente torná-la homogênea e depois aplicar o método.

No caso do problema envolvendo a equação da onda, a EDO para  $T_n$  é de  $2^a$  ordem. O próximo exercício envolve esta equação.

**Exercício** - Ache a solução do seguinte PVIC envolvendo a equação da onda:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + F(x, t), & 0 < x < L, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & & \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

**Solução** - A solução do problema que satisfaz a equação homogênea correspondente:

$$u_{tt} = u_{xx}$$

e a condição de contorno homogênea  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  é do tipo:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Vamos supor esta série como solução da equação **não** homogênea e determinar uma relação para  $T_n(t)$ .

Admitindo-se que esta série convirja adequadamente, calculando  $u_{xx}$  e  $u_{tt}$ , substituindo na equação temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n''(t) + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = F(x, t)$$

Por outro lado, fazendo a expansão

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

onde,

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

a expressão anterior fornece:

$$T_n''(t) + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 T_n(t) = F_n(t)$$

Pelo método de variação de parâmetros uma solução desta EDO pode ser dada por:

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} t + \frac{L}{n\pi} \int_0^t F_n(\tau) \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{L} (t - \tau) \right] d\tau$$

Assim a solução formal torna-se

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

sendo

$$r_n \equiv a_n \cos \frac{n\pi}{L}t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}t + \frac{L}{n\pi} \int_0^t F_n(\tau) \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{L}(t - \tau) \right] d\tau$$

Aplicando as condições iniciais uma vez que para  $t = 0$ ,  $r_n = a_n$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

segue

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

e devido a condição

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

segue que

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

### COMENTÁRIO

Se uma corda vibra sujeita a uma força externa  $F(x, t)$  e se a frequência  $w$  dessa força for igual a uma das frequências da corda livre  $w_0$ ,  $w = w_0$ , a amplitude crescerá de forma não limitada e dizemos que temos uma *ressonância*. No caso da corda vibrante ou em outros sistemas mecânicos em vibração, a ressonância pode ser considerada uma tragédia, algo a ser evitado pois, praticamente implica em que o sistema "se quebre". Já no caso de sistemas elétricos, a ressonância pode ser explorada beneficemente: o processo de sintonização consiste em pôr em ressonância um circuito elétrico com um impulso externo.

### 13.4 PVC com equação não homogênea

Em PVC não homogêneo envolvendo a equação elítica, tais como a equação de Laplace e de Poisson, existem outras abordagens. Além do método apresentado anteriormente **dependendo do caso** podemos usar outro procedimento: o de transferir a não homogeneidade da EDP para a condição de contorno. Vamos analisar o caso consistindo da equação de Poisson

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad \text{em } D \quad (13.31)$$

com a condição de Dirichlet

$$u = g(x, y) \quad \text{em } \partial D \quad (13.32)$$

Para resolver problemas deste tipo tal como foi feito nos casos anteriores vamos decompor em outros dois problemas da seguinte forma:

**a)**  $v$  é uma solução particular da equação de Poisson. Particularmente quando  $f(x, y)$  for polinômio de grau  $n$  ela é procurada como um polinômio de grau  $(n + 2)$  com coeficientes indeterminados.

**b)**  $w$  é a solução da equação homogênea correspondente isto é,  $\nabla^2 w = 0$  onde a condição de contorno é tomada como sendo:

$$w = -v + g(x, y) \quad \text{sobre} \quad \partial D$$

Para ilustrar considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b \\ u(0, y) &= u(a, y) = 0 \\ u(x, 0) &= u(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (13.33)$$

Seja:

$$u = v + w$$

Admitindo-se:

$$v(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

uma possível solução ocorrerá quando  $2D + 2F = -2$ . É evidente que temos várias opções de escolha onde a mais conveniente é a que propicia condição de contorno homogênea. Neste sentido uma possibilidade é tomar  $D = -1$ ,  $F = 0$ . Como os demais coeficientes são arbitrários vamos escolhê-los de tal forma a simplificar as condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = a$ . Para tal fazemos

$$v(x, y) = ax - x^2 \quad (13.34)$$

que é anula em  $x = a$  e  $x = 0$ .

A partir da mudança de variáveis  $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$  vamos definir o seguinte problema para  $w$ .

$$\begin{aligned} \nabla^2 w &= 0 & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b \\ w(0, y) &= -v(0, y) = 0 \\ w(a, y) &= -v(a, y) = 0 \\ w(x, 0) &= -v(x, 0) = -(ax - x^2) \\ w(x, b) &= -v(x, b) = -(ax - x^2) \end{aligned} \quad (13.35)$$

Tal como na solução do problema de Dirichlet no retângulo, encontramos

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cosh \frac{n\pi y}{a} + b_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad (13.36)$$

Aplicando a condição de contorno não homogênea, temos:

$$w(x, 0) = -(ax - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

$$w(x, b) = -(ax - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cosh \frac{n\pi b}{a} + b_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

Segue que os coeficientes de Fourier satisfazem

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a (x^2 - ax) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ par} \\ \frac{-8a^2}{\pi^3 n^3} & , \quad n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$a_n \cosh \frac{n\pi b}{a} + b_n \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a (x^2 - ax) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$

e portanto:

$$b_n = \frac{(1 - \cosh n\pi x/a)}{\sinh n\pi x/a} a_n$$

Assim a solução formal do problema proposto é dada por:

$$u(x, y) = (a - x) x - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(2n-1) \frac{\pi(b-y)}{a} + \sinh(2n-1) \frac{\pi y}{a}}{\sinh(2n-1) \pi b/a} \cdot \frac{\operatorname{sen}(2n-1) \frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^3}$$

### 13.5 RESUMO

Para casos de problemas não homogêneos devemos inicialmente fazer uma transformação deixando-os numa forma aceitável para usar o método de separação de variáveis. Vamos apresentar, como modelo para outros problemas, o problema de condução de calor dado por:

$$u_t = u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_0(t) \quad u(L, t) = u_1(t)$$

- (1) Se  $u_0$  e  $u_1$  são **constantes** e  $f$  depende **apenas** de  $x$  admitimos uma solução tipo

$$u(x, t) = v(x, t) + \Psi(x)$$

e fazemos com que a não homogeneidade da equação e das condições de contorno "recaia" sobre  $\Psi$ , usando para  $v$  um problema com equação e condições de contorno homogêneas.

**Nota:** Em alguns problemas envolvendo a equação de Poisson e condições de contorno de Dirichlet, usamos essa técnica para obtermos uma equação homogênea

- (2) Se  $u_0$  e/ou  $u_1$  forem variáveis admitimos uma solução do tipo

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

onde  $v(x, t)$  é determinada de tal modo que as condições de contorno para o problema em  $w$  sejam homogêneas. A função  $v$  **não** precisa satisfazer a EDP e no problema em  $w$  a EDP geralmente é **não** homogênea.

- (3) Se  $u_0(t) = u_1(t) \equiv 0$  e  $f(x, t)$  envolve as duas variáveis usamos o seguinte procedimento .

- (a) Primeiramente determina-se família de autofunções

$$\phi_n = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

que satisfaz a equação, com  $f(x, t) \equiv 0$ , e as condições de contorno.

- (b) admitindo-se  $t$  um parâmetro, decompomos  $f(x, t)$  em série de Fourier daws autofunções obtidas:

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

- (c) procura-se uma solução da equação do problema dado na forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

obtendo uma EDO não homogênea para  $T_n$ .

- (d) Resolve-se esta equação e usa-se a condição inicial do problema para eliminar a constante arbitrária.

Para aplicar o método de Fourier em problemas de Dirichlet no retângulo usamos decompô-lo em vários problemas resolvíveis pelo método apresentado, e em seguida somamos.

### 13.6 Exercícios Propostos

- (1) Ache a solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + h, & h &= cte \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = \frac{hx}{2} (L - x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{4L^2 h}{\pi^3} \right] \frac{\cos(2n-1)\pi t/L}{(2n-1)^3} \text{sen}(2n-1)\pi x/L$$

- (2) Encontre a solução do problema:

$$\begin{aligned} \text{EDP } u_{tt} - u_{xx} &= h, & 0 < x < 1, t > 0 & \quad h = cte \\ \text{CI } u(x, 0) &= x(1-x), & u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ \text{CC } u(0, t) &= t, & u(1, t) &= \text{sen } t, & t \geq 0 \end{aligned}$$



(3) Determine a solução de

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + A \sinh x & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) &= h \quad u(L, t) = k & t > 0 \end{aligned}$$

onde  $A, h$  e  $k$  são constantes. Resp:  $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$  onde:

$$\psi(x) = -\frac{A}{a^2} \sinh x + \left( \frac{A}{a^2} \sinh L + k - h \right) \frac{x}{L} + h$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -2 \frac{2}{L} \int_0^L \psi(\tau) \operatorname{sen} \frac{n\pi\tau}{L} d\tau \right] \cos \frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

(4) Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_t - k u_{xx} &= A e^{-\alpha x}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} x & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \end{aligned}$$

Resp:  $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$  onde:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{A}{a^2 k} \left[ 1 - e^{-\alpha x} + \frac{x}{\pi} (e^{-\alpha\pi} - 1) \right] \\ v(x, t) &= e^{-kt} \operatorname{sen} x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 kt} \operatorname{sen}(nx) \end{aligned}$$

(5) Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + g(x, t) & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 < x < \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} a_n(\tau) d\tau \operatorname{sen} nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)$$

onde:

$$a_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x, t) \operatorname{sen} nx dx, \quad b_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$$

(6) Determine a solução do PVIC:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + h, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad h = cte \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

(7) Determine a solução do seguinte PVIC:

$$\begin{aligned} u_t - k u_{xx} &= h(x, t), & 0 < x < L, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u(0, t) = p(t), & u(L, t) &= q(t), & \quad t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

298

(8) Resolva o PVIC:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} + \text{sen}(3\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= \text{sen}(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = \exp[-(\pi\alpha)^2 t] \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{(3\pi\alpha)^2} \left\{ 1 - \exp[-(3\pi\alpha)^2 t] \right\} \text{sen}(3\pi x)$$

(9) Resolva o PVIC

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(2\pi x), & 0 < x < 1, & 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & & 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(10) Resolva o PVIC:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & 0 < x < 1, & 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = \cos t & & 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= x & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(11) Encontre quatro PVICs cuja soma das soluções será solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < 1, & 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t), & & 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= \phi(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(12) Resolva o PVIC:

$$\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} \\ u(0, t) &= 10, \quad u(3, t) = 40 \\ u(x, 0) &= 25 \\ |u(x, t)| &< M \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = 10x + 10 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{30}{m\pi} (\cos m\pi + 1) e^{-m^2\pi^2 t/9} \text{sen} \frac{m\pi x}{3}$$

(13) Resolva o problema de contorno:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - \alpha^2 u, & 0 < x < L, & t > 0 \\ u(0, t) &= u_1, \quad u(L, t) = u_2, & u(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $L$  são constantes. Interprete fisicamente o resultado.

- (14) Resolva o problema da corda elástica

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= a^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\
 u(x, 0) &= f(x) & \text{(deslocamento inicial),} \\
 u_t(x, 0) &= g(x) & \text{(velocidade inicial)}
 \end{aligned}$$

decompondo-o em dois problemas: um com deslocamento inicial nulo, e o outro com velocidade inicial nula.

- (15) Transforme o problema:

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= Ae^{-\alpha t}, \quad u(L, t) = B & t > 0 \\
 u(x, 0) &= 0 & 0 < x < L
 \end{aligned}$$

num outro em que as condições de contorno sejam homogêneas.

- (16) Resolva o problema:

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\
 u(0, t) &= 0 \quad u(L, t) = u_0 & t \geq 0 \\
 u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq L
 \end{aligned}$$

$$\text{Resp : } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L \left( f - \frac{u_0 x}{L} \right) \text{sen} \frac{n\pi\tau}{L} d\tau \right] e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} + \frac{u_0 x}{L}$$

- (17) Resolva o problema de Dirichlet exterior ao círculo

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u &= 0, & 1 < r < \infty \\
 u(1, \theta) &= 1 + \text{sen } \theta + \cos(3\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi
 \end{aligned}$$

- (18) Resolva o problema de Dirichlet no anel:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u &= 0, & 1 < r < 2 \\
 u(1, \theta) &= \cos \theta, \quad u(2, \theta) = \text{sen } \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi
 \end{aligned}$$

- (19) Qual é a solução do problema de Dirichlet

$$u_{rr} + u_r/r + u_{\theta\theta}/r^2 = 0 \quad 0 < r < 1$$

com as seguintes condições:

- (a)  $u(1, \theta) = 1 + \text{sen } \theta + \cos \theta/2$
- (b)  $u(1, \theta) = 2$
- (c)  $u(1, \theta) = \text{sen } 3\theta$

300

(20) Resolva o PVIC:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} + kx \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(21) Considere o problema de Dirichlet para a equação de Poisson:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= F(x, y, z) && \text{em } R \\ u &= f(x, y, z) && \text{em } \partial R \end{aligned}$$

onde  $u$  é de classe  $C_R^2$ .(a) Se  $u_1$  e  $u_2$  são duas soluções, mostre que  $\phi = u_1 - u_2$  satisfaz o problema homogêneo:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 && \text{em } R \\ \phi &= 0 && \text{em } \partial R \end{aligned}$$

(b) Aplique a 1ª identidade de Green em  $\phi = \psi$ , para mostrar que

$$\int \int \int_R |\nabla \phi|^2 dv = 0$$

(c) Use o resultado em (b) para mostrar a unicidade de solução.

(22) Encontre a solução do problema.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2, \quad 0 < r < a, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(a, \theta) &= 0 \end{aligned}$$

Resp.:  $u(r, \theta) = \frac{1}{2}(a^2 - r^2)$ 

(23) Ache a solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2y, && 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(0, y) &= u(1, y) = 0, && 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = 0, && 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Resp. : } u(x, y) = xy(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n\pi^3 \sinh n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \sinh n\pi y$$

(24) Ache a solução do seguinte problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, && 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x) && 0 < x < a \\ u(0, y) &= f_3(y), \quad u(a, y) = f_4(y) && 0 < y < b \end{aligned}$$

ao decompô-lo em outros dois problemas e usando o princípio de superposição.

(25) Transforme o problema

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= 2x^3 - 5 \sin t, & 0 < x < L, & t > 0 \\u(0, t) &= u(L, t) = 0, & t > 0 \\u(x, 0) &= 7, & 0 \leq x \leq L\end{aligned}$$

em um problema equivalente onde a EDP é homogênea.

(26) Mostre que o problema

$$\begin{aligned}u_t - ku_{xx} &= q(x), & 0 < x < L, & t > 0 \\u_x(0, t) &= A, & u_x(L, t) &= B, & t > 0 \\u(x, 0) &= f(x)\end{aligned}$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes em geral não tem uma solução em estado estacionário..

Encontre relações entre  $A, B, L, k$  e  $q$  para que exista uma solução em equilíbrio.

(27) Transforme o problema

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= q(x, t), & 0 < x < L, & t > 0 \\u_x(0, t) &= A(t), & u_x(L, t) &= B(t), & t > 0 \\u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L,\end{aligned}$$

onde  $A(t)$  e  $B(t)$  são diferenciáveis, em um problema no qual as condições de contorno são homogêneas.

Resp:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x^2}{2L}[B(t) - A(t)] + xA(t)$$



## Chapter 14

# Série de Fourier Generalizada

**Finalidade:** Seria ingenuidade admitir que toda teoria da SF, que não é pouca, fosse apenas para as funções seno e cosseno, o que teria, se assim fosse, alcance limitado pois não cobriria casos importantes que aparecem em problemas práticos. A propriedade de ortogonalidade, que foi indispensável para encontrar os coeficientes da SF, existe em outros conjuntos e a finalidade aqui será estender o conceito de série de Fourier de forma que a série anteriormente apresentada seja um caso particular. Desta forma vamos adequar para estes novos conjuntos os conceitos anteriormente apresentados tais como convergência na média, desigualdade de Bessel, identidade de Parseval, etc. As condições para que exista convergência pontual serão apresentadas no próximo capítulo.

### 14.1 Por que Generalizar a Série de Fourier?

Para determinar os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  da série de Fourier trigonométrica foi **indispensável** a propriedades de ortogonalidade da sequência

$$\{1/2, \sin(n\pi x/L), \cos(m\pi x/L)\},$$

no intervalo  $[-L, L]$  com  $m$  e  $n$  **inteiros não negativos**, o que permitiu que todas as parcelas da série, **exceto uma**, se anulassem. No entanto, quer pela natureza da EDP, quer pelas condição de contorno imposta ao problema, nem sempre teremos uma sequência do tipo acima; ou o argumento da função seno (ou cosseno) não é  $n\pi x/L$ , ou as soluções obtidas dos problemas de contorno não são estas funções.

**Exemplo** - Pelo método de separação de variáveis ao admitir uma solução do tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

304

do problema

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= 0, & u_x(1, t) + u(1, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= x, & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

a variável espacial  $x$  satisfaz o seguinte **problema de contorno**

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) + X(1) = 0$$

Ao resolvê-lo encontramos como solução

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x)$$

onde  $\lambda_n$  são raízes da equação algébrica

$$\tan \lambda = -\lambda$$

Neste caso  $\lambda_n$  **não é igual** a  $n\pi$  e assim não se tem uma série envolvendo  $\sin n\pi x$ , ou  $\cos n\pi x$ , com  $n$  inteiro.

**Exemplo** - Em coordenadas polares  $(\rho, \varphi)$  a equação do fluxo radial de calor numa lâmina circular delgada é dada por:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

No caso da temperatura  $u$  não variar com o ângulo, isto é, quando  $\partial/\partial\varphi = 0$ , e o raio da lâmina for  $\rho = 1$ , um possível problema envolvendo esta equação pode ser

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} u_t &= u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} \\ u(1, t) &= 0, \quad t \geq 0; & u(\rho, 0) &= f(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ |u(\rho, t)| &< M, \end{aligned}$$

onde  $f$  é conhecida. Ao admitir uma solução do tipo  $u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$  encontra-se para a **variável espacial**  $\rho$  o seguinte **problema de contorno** envolvendo EDO

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \rho^2 \lambda^2 R = 0, \quad R(1) = 0,$$

onde  $\lambda$  é a constante de separação de variáveis. Neste caso a solução para  $R$  **não** contém as funções senos ou cosenos, mas sim, a **função de Bessel** que é uma função especial.



## 14.2 Série de Fourier para um conjunto ortogonal qualquer

No espaço vetorial  $C_{[a,b]}$  considere a sequência infinita de funções ortogonais,  $\{\psi_n(x)\}$  no intervalo  $[a, b]$ . Se  $f(x)$  for uma função definida neste mesmo intervalo quais serão os valores dos coeficientes  $c_k$ , para que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \quad ?$$

Se admitirmos o produto interno usual para este espaço de funções,

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad (14.1)$$

e como  $\langle f, f \rangle$  é um número real não negativo, a norma induzida de  $f$  é a raiz quadrada não negativa

$$\|f\| \equiv \langle f, f \rangle^{1/2} \equiv \left\{ \int_a^b f^2(x)dx \right\}^{1/2} \quad (14.2)$$

Assim a partir da série acima e devido a propriedade de ortogonalidade da sequência, sob certas condições temos

$$\langle f, \psi_n \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x), \psi_n \rangle = c_n \langle \psi_n, \psi_n \rangle$$

e portanto

$$c_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle} = \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\|\psi_n(x)\|^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Em resumo para uma dada função  $f$  e uma sequência ortogonal  $\{\psi_n(x)\}$  se

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x),$$

então formalmente temos a representação

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle} \psi_n(x),$$

que é análoga a decomposição de um vetor do  $R^3$  num conjunto ortogonal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , ou a SF trigonométrica obtida anteriormente.

## 14.3 Produto Interno com função peso

Mas a generalização "não para por aí". Por vezes em problemas de engenharia aparecem sequências de funções  $\{\psi_n(x)\}$  que **não** são ortogonais em um dado intervalo  $[a, b]$ , e portanto, em princípio, não podemos expandir uma função em série de funções desta sequência. Ou seja, se admitirmos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

306

e multiplicarmos membro a membro por  $\psi_m(x)$  e integrarmos no intervalo  $[a, b]$  a integral

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)dx$$

**não será nula** para  $m \neq n$ .

Antes de abandonar a idéia poderia perguntar: Em vez de **apenas** multiplicar a série acima membro a membro por  $\psi_m(x)$ , tal como foi feito anteriormente, será que não existe uma função particular  $\rho(x)$  de tal forma que ao multiplicar esta série por  $\rho(x)\psi_m(x)$  e integrá-la no intervalo  $[a, b]$  todas as parcelas, **exceto uma**, se anulam? Esta função dependendo do problema existe e neste caso, vamos determinar os seus coeficientes.

Tal como na seção anterior vamos usar um produto interno e que seja adequado a esta situação. Considere a função  $\rho(x)$  contínua em  $[a, b]$ , sendo  $\rho(x) > 0$  neste mesmo intervalo **fechado**. A função que associa as funções  $f$  e  $g$ , definidas em  $[a, b]$ , de um certo espaço de funções reais, o número real

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx, \quad (14.3)$$

onde  $\rho(x)$  é chamada de *função peso*, **também** constitui um produto interno.

De forma semelhante ao produto interno usual podemos redefinir ortogonalidade, norma, distância, etc. Assim temos:

a) **Ortogonalidade**

Seja  $\{\phi_k(x)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  um conjunto de funções reais quadrado integráveis num intervalo  $I$ , o qual pode ser aberto, fechado, infinito, etc. Dizemos que esse conjunto é *ortogonal* em  $I$ , com respeito a função peso  $\rho(x) > 0$ , se

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho \equiv \int_I \phi_n(x)\phi_m(x)\rho(x)dx = 0, \quad m \neq n \quad (14.4)$$

Quando  $m = n$ , tem-se  $\|\phi_n\|_\rho^2$ .

**Exercício** - Verifique se o conjunto  $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}$  é ortogonal no intervalo  $[0, \pi]$  com respeito a função peso  $\rho(x) = 1$ .

**Solução** - De fato as funções  $\cos nx$  e a unidade são ortogonais neste intervalo, pois,

$$\langle 1, \cos nx \rangle = \int_0^\pi \cos nx dx = \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_{x=0}^{x=\pi} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Além disso resolvendo a integral

$$\langle \cos nx, \cos mx \rangle = \int_0^\pi \cos nx \cos mx dx, \quad m \neq n$$

encontramos que seu valor é nulo e portanto o sistema é ortogonal.

**Exercício** - A sequência

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

é simplesmente ortogonal no intervalo  $[-L, L]$  em relação a função peso  $\rho(x) = 1$ . pois se  $m$  e  $n$  forem inteiros positivos ao efetuar as integrais abaixo, temos:

$$\begin{aligned} \left\langle 1, \cos \frac{n\pi x}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \mathbf{0}, & \left\langle 1, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \mathbf{0} \\ \left\langle \cos \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{m\pi x}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \mathbf{0} & \mathbf{m} \neq \mathbf{n} \\ \left\langle \sin \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{m\pi x}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \mathbf{0} & \mathbf{m} \neq \mathbf{n} \\ \left\langle \sin \frac{n\pi x}{L}, \cos \frac{m\pi x}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \mathbf{0} \end{aligned}$$

**Exemplo** - Os *polinômios de Hermite*, muito usados em problemas da Física Matemática, são ortogonais com respeito a função peso  $\rho(x) = e^{-x^2/2}$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

**b) Norma**

A norma induzida por este produto interno é o número real não negativo  $\|f\|_\rho$  definido por

$$\|f\|_\rho^2 = \langle f, f \rangle_\rho = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \quad (14.5)$$

Se  $\|f\|_\rho = 1$  dizemos que a função está **normalizada** relativamente a  $\rho$ .

**c) Distância**

Como a definição de *distância*, entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , foi admitida anteriormente como sendo:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

a distância neste espaço específico torna-se

$$d(f, g) = \|f - g\|_\rho = \left\{ \int_a^b \rho(x) [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

De forma semelhante à seção anterior devido a propriedade de ortogonalidade da sequência  $\{\psi_n(x)\}$  os coeficientes  $c_n$  são dados por:

$$c_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle_\rho}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle_\rho}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

308

e portanto

$$f(x) \propto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \psi_n \rangle_{\rho}}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle_{\rho}} \psi_n(x),$$

onde usamos o símbolo  $\propto$ , em vez de  $=$ , enquanto não tivermos a certeza sobre a convergência da série.

### COMENTÁRIOS

- (1) A função definida por  $\langle f, g \rangle_{\rho}$  satisfaz os axiomas de definição de produto interno e quando não houver dúvida retiraremos o índice  $\rho$ .
- (2) A ortogonalidade depende da função do peso e também do intervalo.
- (3) Se uma sequência de funções  $\psi_n(x)$  é ortogonal num intervalo com respeito a função peso  $\rho(x) > 0$ , podemos redefini-la de tal forma que ela seja simplesmente ortogonal no sentido usual. Basta tomar a sequência como sendo

$$\phi_m = \sqrt{\rho(x)} \psi_m(x)$$

- (4) Observe que as integrais usadas para definir produto interno, norma e distância, particularmente **existem** para todas as funções no espaço das funções **seccionalmente contínuas** e quando nada for dito subentende-se este espaço. Estas funções são limitadas para todos os pontos no intervalo no qual está definida, isto é, existe uma constante  $M$  tal que  $|f(x)| < M$ . Outros espaços de funções podem ser usados de conjuntos ortogonais, por exemplo, o das **funções contínuas** que é mais restrito, ou o espaço das funções **quadrado integráveis** mais geral e usado principalmente em análise funcional.
- (5) Como a norma e a distância dependem do produto interno ao alterá-lo geralmente altera-se os seus valores.

#### 14.4 Convergência na média da série de Fourier generalizada

O procedimento usado para determinar os coeficientes  $c_n$  foi feito de modo puramente formal. Neste sentido partimos de um conjunto ortogonal com respeito a uma função peso num certo intervalo e nenhuma outra restrição foi colocada sobre este conjunto ou sobre a função  $f$  a qual queremos desenvolver em série. Por exemplo, ao determinar  $c_n$  admitimos condições ideais que permitissem fazer a permuta entre os símbolos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b$$

As condições que devemos impor para que tenhamos convergência pontual serão apresentadas no capítulo sobre o Problema de Sturm-Liouville. Nesta seção vamos investigar a convergência na média que "funciona" com condições menos restritivas do que a convergência pontual.

Supomos que:

- $f$  seja quadrado integrável em  $[a, b]$ , isto é, existem as seguintes integrais

$$\int_a^b \rho f(x) dx \quad e \quad \int_a^b \rho f^2(x) dx$$

- $\{\phi_n\}$  uma sequência ortogonal e quadrado integrável com respeito a função peso  $\rho(x)$  em  $[a, b]$ , sendo

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k \phi_k(x) \quad (14.6)$$

a  $n$ -ésima soma parcial da série onde as constantes  $A_k$  até o momento são **desconhecidas**.

Como todas as funções da sequência ortogonal são quadrado integráveis segue que a combinação  $S_n$  e a diferença  $f(x) - S_n(x)$  também é uma função quadrado integrável.

**Objetivo** - Determinar os coeficientes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de modo que a função  $S_n(x)$  aproxime  $f$  em  $a \leq x \leq b$  da melhor forma segundo um critério.

Quando aproximamos  $f$  por  $S_n$  cometemos um erro. O *erro quadrático* desta aproximação em  $[a, b]$  é definido por:

$$E_n(x, A_k) = \int_a^b \rho(x) [f(x) - S_n(x)]^2 dx \quad (14.7)$$

De forma semelhante ao que foi visto para a SF trigonométrica os coeficientes  $A_k$ , tais que  $S_n(x)$  seja a melhor aproximação de  $f(x)$  no sentido de minimizar a integral  $E_n(x, A_k)$ , são os próprios coeficientes de Fourier, ou seja,  $A_k = c_k$ , referência [14], sendo:

$$c_k = \frac{\langle f(x), \phi_k(x) \rangle}{\|\phi_k(x)\|^2}$$

Neste caso dizemos que  $s_n$ , que é a soma parcial  $S_n$  com coeficientes de Fourier  $c_k$ , é a **melhor** aproximação de  $f(x)$  no sentido dos mínimos quadrados.

Substituindo os coeficientes de Fourier, o erro quadrático torna-se

$$E_n(x, c_k) = \int_a^b \rho(x) [f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x)]^2 dx \geq 0, \quad ou \quad (14.8)$$

$$E_n(x, c_k) = \int_a^b [\rho(x) f^2(x) - 2\rho(x) f(x) \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) + \rho(x) \left( \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \right)^2] dx \geq 0$$

Uma vez que

$$\langle f, \phi_k \rangle = c_k \|\phi_k\|^2,$$

310

e sendo

$$\int_a^b \rho(x) \left[ \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \right]^2 dx = \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_a^b \rho \phi_k^2 dx \equiv \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\phi_k\|^2,$$

pois  $\{\phi_k(x)\}$  é uma sequência ortogonal no intervalo  $[a, b]$ , então o erro quadrático torna-se

$$E_n(x, c_k) = \int_a^b \rho f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\phi_k\|^2 \geq 0$$

Usando o fato que esta expressão ser não negativa, quando  $n$  aumenta o valor de  $E_n$  pode unicamente decrescer e portanto

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \|\phi_k\|^2 \leq \int_a^b \rho f^2 dx \quad (14.9)$$

#### 14.5 Desigualdade de Bessel

Como a integral do lado direito da expressão anterior é finita, a série do lado esquerdo é limitada para qualquer  $n$ . Portanto, quando  $n \rightarrow \infty$ , a desigualdade anterior torna-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\phi_k\|^2 \leq \int_a^b f(x)^2 \rho(x) dx \quad (14.10)$$

a qual é a chamada de *desigualdade de Bessel*.

Como a série do lado esquerdo é convergente o seu termo geral tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , e portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k \|\phi_k\| = 0$$

Se o sistema for **normalizado**, tem-se, como consequência:

**a) a desigualdade de Bessel**

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f(x)^2 \rho(x) dx,$$

e portanto a série numérica dos quadrados dos coeficientes da série de Fourier para as funções quadrado integráveis é sempre convergente;

**b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k = 0$** , ou seja, os coeficientes de Fourier para o espaço considerado tendem a zero quando  $n \rightarrow \infty$ .

Quando  $n \rightarrow \infty$  seria natural esperar que  $E_n \rightarrow 0$ , porém isto nem sempre ocorre. Dizemos que a sequência  $s_n$ , com coeficientes  $c_k$ , *converge na média* para

$f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  com respeito a função peso  $\rho(x)$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$$

e neste caso temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\phi_k\|^2 c_k^2 = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx$$

que é chamada de *identidade de Parseval*. Reciprocamente se acontece esta identidade prova-se que o limite de  $E_n$  tenderá a zero.

#### 14.6 Conjunto Completo

Deve-se destacar que a condição de uma função ser quadrado integrável garante a existência dos coeficientes  $c_n$  porém isso **não** significa necessariamente a convergência na média da série e, caso isso aconteça, se ela irá convergir para  $f(x)$ . Para que ocorra a convergência neste espaço de funções o conjunto ortogonal de funções deve ser **completo**.

Uma sequência ortogonal  $\{\phi_n(x)\}$  é dita ser completa em relação à convergência na média quadrática, para um espaço de funções, se para qualquer função  $f(x)$  deste espaço, a série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

com os coeficientes

$$c_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2}$$

converge na média, ou seja, se e só se  $E_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , ou, em outras palavras, quando a **identidade de Parseval** for preservada. Esta é a razão porque esta identidade é conhecida como *condição de completividade*.

**Importante:** Pode-se provar que a SF **trigonométrica** de qualquer função quadrado integrável  $f(x)$  definida em  $[-L, L]$  converge na média para  $f(x)$ , e portanto o sistema

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

é completo e satisfaz a identidade de Parseval. Este resultado é interessante em vista do fato já visto que a SF trigonométrica **nem** sempre converge **pontualmente**, mesmo se a função for contínua!

Para se ter um conjunto **incompleto** basta remover qualquer elemento de um conjunto completo. Por exemplo, o conjunto infinito de funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

é ortonormal no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , porém **incompleto** pois podemos acrescentar a esse conjunto a função **não nula**  $(\sin x)/\sqrt{\pi}$  que é ortogonal a cada membro do conjunto acima.

Observe que se  $f$  for uma função quadrado integrável **não** nula tendo a representação

$$f = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + \dots,$$

se  $f$  for ortogonal a cada função  $\phi_k$  segue

$$c_k = \langle f, \phi_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

e pela identidade de Parseval

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\phi_k\|^2 c_k^2 = \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx = 0,$$

o que obriga  $f$  a ser a função nula, e portanto teríamos uma contradição pois a Identidade de Parseval não seria verdadeira.

Este resultado informa que a sequência é completa se e só for **impossível adicionar** a ela uma outra função **não nula** que seja ortogonal a cada uma das funções da sequência. Em resumo para o espaço das funções quadrado integráveis, são equivalentes as seguintes afirmações:

- I - sistema completo;
- II - convergência na média;
- III - identidade de Parseval;
- IV - qualquer função ortogonal as demais do sistema só pode ser a função nula.

### COMENTÁRIOS

- (1) A **convergência na média** não implica necessariamente **convergência uniforme** ou **pontual**, ou seja, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

- (2) Para o espaço das funções quadrado integráveis ao contrário do que ocorre na convergência na média, mesmo que o sistema for completo a **convergência pontual** da SF **nem** sempre ocorre.
- (3) Existe uma definição de sequência ortogonal completa em relação a convergência pontual.



- (4) A série pode convergir na média sem convergir em cada ponto. É menos óbvio contudo, porém também verdadeira, que mesmo que a série infinita convirja em cada ponto, ela pode não convergir na média. Exemplos podem ser vistos na excelente referência [9].

A teoria sobre a SF é longa e existem publicações específicas sobre o assunto tal como na referência [14] e o que foi aqui abordado é um resumo dos principais resultados, porém suficiente para resolver uma ampla classe de problemas da física matemática.

## 14.7 RESUMO

Dependendo do problema por vezes a sequência não é **simplesmente ortogonal** num certo espaço de funções com respeito ao produto interno usual

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

porém torna-se **ortogonal** com respeito a uma certa **função peso**.

Seja  $\rho(x) > 0$  uma função real definida em  $a \leq x \leq b$  e  $f, g$  funções reais quadrado integráveis neste intervalo. O produto escalar de  $f$  e  $g$  com respeito a função  $\rho$  será indicado por  $\langle f, g \rangle_\rho$  ou simplesmente por  $\langle f, g \rangle$  é definido por:

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx,$$

Um conjunto  $\{\phi_n(x)\}$  de funções reais é ortogonal se

$$\langle \phi_n(x), \phi_m(x) \rangle_\rho = 0, \quad m \neq n$$

Se além disso

$$\langle \phi_n(x), \phi_n(x) \rangle_\rho \equiv \|\phi_n(x)\|_\rho^2 = 1$$

dizemos que o conjunto é ortonormal.

Com as condições anteriores os coeficientes  $c_n$  da série de Fourier generalizada de  $f$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

são dados por:

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|_\rho^2}$$

Por outro lado quando aproximamos uma função  $f$  quadrado integrável pela série

$$S_n(x, A_k) = \sum_{k=1}^n A_k \phi_k(x),$$

onde  $A_k$  é desconhecido, o erro quadrático nesta aproximação em  $a \leq x \leq b$  é definido por:

$$E_n(A_k) = \int_a^b \rho(x)[f(x) - S_n(x, A_k)]^2 dx$$

Este erro torna-se **mínimo** quando os coeficientes  $A_k$  forem os próprios **coeficientes de Fourier** de  $f$ , ou seja quando  $A_k \equiv c_k$  definido acima. Desenvolvendo a expressão de  $E_n$  para  $c_k$ , ou seja  $E(c_k)$ , levando-se em conta que esta expressão é não negativa e que o conjunto  $\{\phi_k\}$  é ortogonal, tem-se que:

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \|\phi_k\|^2 \leq \int_a^b \rho f^2(x) dx$$

Desde que a integral exista, tomando-se o limite quando  $n \rightarrow \infty$  temos a desigualdade de Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\phi_k\|^2 \leq \int_a^b \rho f^2(x) dx$$

Dizemos que a sequência  $S_n$ , com  $A_k \equiv c_k$ , converge na média quadrática para  $f(x)$  no intervalo  $a \leq x \leq b$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$$

e portanto tem-se a expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\phi_k\|^2 = \int_a^b \rho f^2(x) dx,$$

que é chamada de *identidade de Parseval*. Reciprocamente se esta identidade ocorre segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$$

Um conjunto ortogonal  $\{\phi_n(x)\}$  é dito completo em relação à convergência na média quadrática para uma classe de funções se este limite ocorre. No capítulo sobre problema de Sturm-Liouville veremos de onde surgem estes conjuntos ortogonais e em que espaços eles são completos.

## 14.8 Exercício propostos

- (1) Se  $\phi$  e  $\psi$  são quadrado integráveis em  $I$  e  $\rho(x) > 0$ , no intervalo  $I$ , use a desigualdade de Schwarz,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

para mostrar que

$$\left| \int_I \phi(x) \Psi(x) \rho(x) dx \right|^2 \leq \int_I \phi^2(x) \rho(x) dx \int_I \Psi^2(x) \rho(x) dx$$

- (2) Os *polinômios de Legendre* são definidos por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Verifique a ortogonalidade dos 4 primeiro polinômios no intervalo  $[-1, 1]$ .

- (3) Os *polinômios de Hermite* são definidos por :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \quad n = 0, 1, 2$$

Determine os quatro primeiros polinômios e verifique que são ortogonais no intervalo  $(-\infty, \infty)$  em relação a função peso  $\rho(x) = e^{-x^2/2}$ .

- (4) Mostre que as funções  $1, 1 - x, 2 - 4x + x^2$  são mutuamente ortogonais em  $(0, \infty)$  em relação a função peso  $e^{-x}$ .
- (5) Mostre que as funções  $\cos(n \arccos x)$   $n = 0, 1, 2, \dots$  são mutuamente ortogonais em  $(-1, 1)$  em relação a função peso  $(1 - x^2)^{-1/2}$ .
- (6) Se o sistema  $\{\phi_k(x)\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  for ortogonal em  $[a, b]$  e completo em relação as funções quadrado integráveis; se as séries de Fourier generalizada de  $f(x)$  e  $F(x)$ , quadrado integráveis, são:

$$f(x) \propto \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad F(x) \propto \sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k(x)$$

então

$$\int_a^b f(x) F(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k C_k \|\phi_k\|^2$$

*Sugestão:* Como o conjunto é completo e  $f - F$  e  $f + F$  são quadrado integráveis, utilize a identidade de Parseval para estas duas novas funções, subtraindo em seguida.

- (7) Se  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(x)$ , onde  $\{\phi_n(x)\}$  é um conjunto ortonormal em  $[a, b]$ , mostre que:

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2$$

onde

$$c_n = \langle f(x), \phi_n(x) \rangle$$

são os coeficientes de Fourier generalizados de  $f(x)$ .

- (8) Se  $c_k$  são coeficientes generalizados de Fourier da função  $f(x)$  mostre a desigualdade de Bessel  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx$

Porque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \phi_k(x) dx = 0?$$

O que isso significa ?

*Sugestão:* Use a condição necessária para a convergência da série.

- (9) Prove que o conjunto de funções ortogonais  $\{\phi_n(x)\}$  não pode ser completo em  $[a, b]$  se existe nele uma função não nula  $f(x)$  que seja ortogonal a todos os membros do conjunto, isto é, se

$$\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (10) Mostre que as funções  $f(x) = 1$  e  $g(x) = x$  são ortogonais no intervalo  $(-1, 1)$  e determine as constantes  $A$  e  $B$  de tal forma que  $h(x) = 1 + Ax + Bx^2$  é ortogonal tanto a  $f(x)$  como a  $g(x)$  sobre este intervalo. *Resp.*  $A = 0, B = -3$
- (11) Se o conjunto  $\{\phi_n(x)\}$  é ortogonal em  $[a, b]$  prove que o conjunto  $\{\phi_n(ct + k)\}$   $c \neq 0$ , é também ortogonal sobre o intervalo  $(a - k)/c \leq t \leq (b - k)/c$
- (12) Considere o conjunto ortonormal completo  $\{\phi_n(x)\}$  no intervalo  $[0, 1]$  com respeito a função peso  $r(x)$ . A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$$

pode ser a série de autofunções de qualquer função quadrado integrável?

*Resp.* Não, pois para este espaço de funções a desigualdade de Bessel exige que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , o que aqui não ocorre.

- (13) Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{n}}$$

não pode ser série de um conjunto ortonormal completo  $\{\phi_n(x)\}$  no intervalo  $[0, 1]$  com respeito a função peso  $r(x)$  de qualquer função quadrado integrável.

*Sugestão:* Use a desigualdade de Bessel.

## Chapter 15

# Problema de Sturm-Liouville

**Finalidade** - *O método de separação de variáveis usado nas EDPs, quando for possível de ser aplicado, conduz a um número de EDOs igual ao de variáveis independentes e devido a ortogonalidade das soluções dos problemas de contorno homogêneos envolvendo estas EDOs permitiu-se a obtenção da solução em série. Assim é importante um estudo mais detalhado destas equações pois dependendo da geometria do problema, ou das condições de contorno, elas diferem das soluções apresentadas anteriormente.*

Será que as soluções obtidas destes problemas de contorno envolvendo EDOs serão sempre ortogonais? Se forem, em que intervalo e qual a função peso?.

Os resultados que chegaram os matemáticos franceses Sturm e Liouville são um "verdadeiro achado" - estes nos informa que sob certas condições o conjunto é ortogonal, o intervalo e a função peso! Em outras palavras este problema atua como uma "fábrica" de conjuntos ortogonais indicando o peso e o intervalo.

Como é um problema que envolve EDO, já visto em cursos anteriores, não vamos exagerar no conteúdo e tratar apenas os casos de interesse da física matemática, em caso de dúvida consulte a excelente referência [9].

### 15.1 Introdução

Quando aplicamos o método de separação de variáveis para resolver um problema envolvendo uma EDP com duas variáveis e condições auxiliares, aparecerão duas **EDOs** com uma constante de separação de variáveis  $\lambda$ . Problemas deste tipo são chamados de *problemas de auto valores*.

**Exemplo** - Considere a equação de condução de calor

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L$$

com a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ . Vamos analisar dois problemas com condições de contornos diferentes:

318

1<sup>o</sup> **Problema:** Condição de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

Ao separar as variáveis, admitindo-se que

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

a função  $X(x)$  deve satisfazer o seguinte PVC

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

A solução será não trivial apenas se

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e neste caso temos a solução

$$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x/L)$$

Como foi visto para achar uma solução deste problema foi indispensável que a sequência  $\{\sin \frac{n\pi}{L}x\}$ , solução do PVC envolvendo a EDO acima, fosse **ortogonal** no intervalo  $[0, L]$ .

2<sup>o</sup> **Problema** - Condição de contorno

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) + u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

Para que este problema tenha solução do tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

a função  $X(x)$  deve satisfazer o PVC dado por

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) + X(L) = 0$$

Para que tenhamos solução não trivial a constante de separação de variáveis  $\lambda$  deve satisfazer a condição

$$\tan \lambda_n = -\lambda_n,$$

e para estes valores de  $\lambda$  teremos a seguinte solução  $X(x)$

$$X(x) = B_n \sin(\lambda_n x)$$

Para satisfazer a condição inicial propomos uma solução em série a qual deve satisfazer a condição inicial, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\lambda_n x)$$

No entanto para se determinar os parâmetros  $B_n$  é **indispensável que a sequência**  $\{\sin(\lambda_n x), n = 1, 2, 3, \dots\}$  seja simplesmente **ortogonal no intervalo**  $[0, L]$ , ou então ortogonal com respeito a uma função peso  $\rho(x)$ .

Este caso difere do anterior pois enquanto que no primeiro a sequência  $\{\sin(n\pi x/L), n = 1, 2, 3, \dots\}$  era ortogonal no intervalo  $[0, L]$  para o segundo devemos **provar** que a sequência  $\{\sin(\lambda_n x), n = 1, 2, 3, \dots\}$  é ortogonal, ou seja devemos encontrar uma função específica  $\rho$  e **provar** que

$$\int_0^L \rho(x) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

Esta tarefa de um modo geral não seria tão fácil se não fossem conhecidas algumas propriedades que governam tais problemas.

Apresentamos nos capítulos anteriores como devemos fazer para expandir uma função a partir de um conjunto ortogonal qualquer desde que **conhecido**, porém não foi dado um meio para reconhecer quando este conjunto tem esta característica.

**Pergunta** - Será que não existe uma forma de reconhecer indiretamente a ortogonalidade de um conjunto sem calcular uma integral do tipo acima?

**Investigação** - No primeiro problema apresentado após separar as variáveis encontramos a EDO

$$\frac{d}{dx} \left[ (1) \frac{dX}{dX} \right] + [0 + (1)\lambda]X = 0,$$

onde  $X$  satisfaz condições de contorno lineares homogêneas. As soluções deste problema sabidamente formam um conjunto ortogonal em  $[0, L]$ , com função peso  $\rho(x) = 1$ .

**Suspeita** - Como estas soluções são ortogonais será que de modo geral as soluções procedentes de problemas deste tipo também não são ortogonais num intervalo  $[a, b]$ ?

A resposta a esta pergunta é **sim** e foi dada pelos matemáticos franceses Charles Sturm e Joseph Liouville que investigaram este tipo de problema e publicaram resultados neste sentido nos anos de 1836 e 1837.

## 15.2 Problema de Sturm-Liouville Regular

Os problemas anteriores são casos particulares do problema de valor de contorno.

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [-q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \quad a < x < b$$

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro independente de  $x$  e  $y$  sendo  $p$ ,  $q$  e  $r$  funções reais de  $x$ , é chamada de *equação de Sturm-Liouville* (ESL). Para assegurar a existência da solução vamos admitir também que  $q$ ,  $r$  e  $p'$  sejam contínuas no intervalo (finito) fechado  $a \leq x \leq b$ . Se além disso  $p(x) > 0$  e  $r(x) > 0$  em todos os pontos em  $a \leq x \leq b$  dizemos que a ESL é *regular*.

Se  $L$  for o operador diferencial

$$L = -\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \quad (15.1)$$

a equação acima pode ser escrita como

$$Ly = \lambda r(x) y, \quad a < x < b \quad (15.2)$$

O problema constituindo da equação de Sturm-Liouville regular junto com as condições de **contorno separadas**, isto é, cada uma envolvendo apenas **um** ponto do contorno,

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0, \quad (15.3)$$

onde as constantes  $a_1$  e  $a_2$ , tais como  $b_1$  e  $b_2$ , são reais independentes de  $\lambda$  e não nulas simultaneamente, é chamado de *Problema ou Sistema de Sturm-Liouville regular (PSLr)*.

Como este problema é **homogêneo sempre** teremos a solução trivial  $y = 0$ , e se  $y = \phi(x)$  for solução então para toda constante  $k$ ,  $y = k\phi(x)$  também será solução.

Se existem valores  $\lambda = \lambda_n$  que permitam a solução não trivial

$$y(x, \lambda_n) \equiv y_n, \quad n = 1, 2, 3, ..$$

$\lambda_n$  são chamados *autovalores* ou *valores característicos*, e a solução não trivial correspondente  $y_n$ , de *autofunções* ou *funções características*.

**Exemplo** - O PVC apresentado anteriormente

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

é um exemplo de um PSL onde as constantes

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \quad n = 1, 2, 3, ..$$

são os seus **autovalores**, e a função

$$X(x) = \sin(n\pi x/L),$$

ou suas múltiplas são as suas **autofunções**.



**Exercício** - Determine os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}y'' + \lambda y &= 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) &= y'(\pi) = 0\end{aligned}$$

**Solução** - Quando  $\lambda < 0$ , a solução geral, que é dada por

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

para satisfazer as condições impostas deve ter  $c_1 = c_2 = 0$ , ou seja, neste caso temos apenas solução trivial e portanto **não** temos **autovalores negativos**.

Se  $\lambda = 0$  a solução geral, que é dada por

$$y = c_1 x + c_2,$$

Neste caso para satisfazer as condições de contorno devemos ter  $c_1 = c_2 = 0$ . Assim  $\lambda = 0$  também **não** é autovalor.

Quando  $\lambda > 0$ , a solução da equação é

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x$$

Aplicando a condição  $y(0) = 0$ , obtemos  $c_1 = 0$ . A condição  $y'(\pi) = 0$  produz:

$$c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\pi = 0$$

Desde que  $\lambda \neq 0$  e  $c_2 = 0$  produz uma solução trivial, o caso de interesse será quando:

$$\cos \sqrt{\lambda}\pi = 0, \quad c_2 \neq 0$$

Desde que essa equação é satisfeita quando

$$\pi \sqrt{\lambda} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, \dots,$$

ou seja, para

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2n - 1}{2},$$

os autovalores são

$$\lambda_n = \left( \frac{2n - 1}{2} \right)^2$$

e as autofunções correspondentes são múltiplas de

$$y_n = \operatorname{sen} \left( \frac{2n - 1}{2} \right) x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**COMENTÁRIOS:**

- (1) Vamos frequentemente considerar o PSLr apenas no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ . Se o intervalo for originalmente  $\alpha \leq s \leq \beta$ , ele pode se transformar em  $0 \leq x \leq 1$  pela mudança de variável:  $x = (s - \alpha) / (\beta - \alpha)$ .
- (2) Quando referirmos ao PSLr significa não apenas a equação e as duas condições de contorno separadas, **mas também** com as hipóteses admitidas no problema.

### 15.3 Ortogonalidade das autofunções

Como a solução para um PSLr geral não pode ser obtida vamos investigar propriedades qualitativas das suas autofunções e autovalores.

Antes de abordarmos um PSLr vamos tomar um caso particular como guia..Considere o caso particular

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

Se os autovalores  $\lambda_n$  e  $\lambda_m$  fornecem respectivamente as autofunções  $\phi_n$  e  $\phi_m$  então

$$\phi_m'' + \lambda_m \phi_m = 0 \quad \text{e} \quad \phi_n'' + \lambda_n \phi_n = 0$$

Multiplicando a primeira por  $\phi_n$ , a segunda por  $\phi_m$ , e subtraindo membro a membro temos:

$$\phi_n \phi_m'' - \phi_m \phi_n'' + \phi_m \phi_n (\lambda_m - \lambda_n) = 0$$

Desde que

$$\frac{d}{dx} [\phi_n \phi_m' - \phi_m \phi_n'] \equiv \phi_n \phi_m'' - \phi_m \phi_n'',$$

integrando membro a membro no intervalo de 0 a  $L$ , temos:

$$(\phi_n \phi_m' - \phi_m \phi_n') \Big|_0^L = (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx$$

Desde que  $\phi_n$  e  $\phi_m$  satisfazem as condições de contorno,

$$\phi_n(0) = \phi_m(0) = 0, \quad \phi_n'(L) = \phi_m'(L) = 0,$$

pois são soluções do problema, segue que o termo da esquerda é nulo, e que portanto

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$$

Logo para  $\lambda_n \neq \lambda_m$  temos:

$$\int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0,$$

e portanto, **sem** efetuar a integral, descobrimos que as soluções do problema, isto é as suas **autofunções** são **ortogonais** no intervalo  $0 \leq x \leq L$ .

Resolvendo este problema encontramos os autovalores

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 (2n - 1)^2}{4L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e as autofunções correspondentes

$$\text{sen} \left[ \frac{\pi (2n - 1) x}{2L} \right]$$

Neste exemplo particular podemos observar que:

- a) os autovalores são reais;
- b) a cada autovalor  $\lambda_n$  corresponde somente uma autofunção linearmente independente;
- c) os autovalores podem ser ordenados  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  sendo  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .
- d) as autofunções são ortogonais no intervalo  $0 \leq x \leq L$ .

O que é mais interessante é que podemos provar que estas propriedades são mantidas **para todo PSL regular!**

Para provar a ortogonalidade usaremos a mesma estratégia do exemplo acima:

Sejam  $u$  e  $v$  funções de classe  $C_{[0,1]}^2$ , então:

$$\int_0^1 v L u dx = \int_0^1 \left[ -(pu')' v + qvu \right] dx$$

Integrando por partes duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 v L u dx &= -p(x) u'(x) v(x) \Big|_0^1 + p(x) u(x) v'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left[ -u (pv')' + uvq \right] dx \\ &= -p(x) [u'(x) v(x) - u(x) v'(x)] \Big|_0^1 + \int_0^1 u L v dx \end{aligned}$$

Transpondo a integral do 2º membro para o primeiro segue:

$$\int_0^1 [v L u - u L v] dx = -p(x) [u'(x) v(x) - u(x) v'(x)] \Big|_0^1 \quad (15.4)$$

Se denotarmos

$$W(v, u)(x) \equiv \begin{vmatrix} v & u \\ v' & u' \end{vmatrix} = u'(x) v(x) - u(x) v'(x),$$

324

a expressão anterior pode ser escrita como:

$$\int_0^1 [vLu - uLv] dx = -p(x) [W(v, u)(x)] \Big|_0^1,$$

resultado este conhecido como *identidade de Lagrange*, ou fórmula de Green.

Particularmente se

$$u = \phi_n(x) \quad \text{e} \quad v = \phi_m(x)$$

forem autofunções correspondentes aos autovalores  $\lambda_n$  e  $\lambda_m$ , ou seja, se

$$L\phi_m \equiv \lambda_m r(x)\phi_m, \quad L\phi_n \equiv \lambda_n r(x)\phi_n$$

a expressão anterior torna-se

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 r(x)\phi_m\phi_n dx = -p(x) [\phi'_m(x)\phi_n(x) - \phi_m(x)\phi'_n(x)] \Big|_0^1$$

O lado direito da igualdade **depende das condições de contorno** impostas ao problema e de  $p(x)$ . Se este lado se **anular**, então,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 r(x)\phi_m\phi_n dx = 0$$

e portanto as autofunções, correspondendo aos autovalores distintos  $\lambda_m \neq \lambda_n$ , são ortogonais duas a duas e o peso é  $r(x)$ .

**Resultado Chave** - O lado direito da identidade de Lagrange é fundamental para saber se as autofunções são ortogonais no intervalo  $[0, 1]$  com respeito a função peso  $r(x)$ . Se as condições de contorno do problema são tais que o lado direito é nulo, as autofunções serão ortogonais.

**Pergunta** - Que tipo de condição de contorno devemos impor ao problema para que tenhamos autofunções ortogonais, isto é, para que o lado direito da Identidade de Lagrange seja nulo?

Admitindo-se que as funções  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de contorno do PSLr vamos analisar os seguintes casos:

a) Primeiro caso:  $a_2 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$

O 2º membro da identidade de Lagrange torna-se:

$$-p(x) [u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_0^1 =$$

$$= -p(1) [u'(1)v(1) - u(1)v'(1)] + p(0) [u'(0)v(0) - u(0)v'(0)]$$

$$= -p(1) \left[ -\frac{b_1}{b_2} u(1)v(1) + \frac{b_1}{b_2} u(1)v(1) \right] +$$

$$+p(0) \left[ -\frac{a_1}{a_2} u(0)v(0) + \frac{a_1}{a_2} u(0)v(0) \right] = 0$$

**b)** Segundo caso  $a_2 = 0$  e  $b_2 = 0$

Como  $a_1 \neq 0$  e  $b_1 \neq 0$  temos que  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 0$

Logo  $u(0) = v(0) = 0$ ,  $u(1) = v(1) = 0$  e portanto o 2º membro também é **nulo**.

Estes resultados estabelecem a importante conclusão:

**Resultado Chave** - As autofunções do SSLr são ortogonais com peso  $r(x)$ , no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ . Isto é se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  forem duas autofunções de PSL regular dado correspondendo aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente, e se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então:

$$\int_0^1 r(x) \phi_1(x) \phi_2(x) dx = 0$$

As condições impostas ao PSLr são oriundas de problemas envolvendo EDP com condições de contorno **homogênas**. Note que as condições de Dirichlet, Neumann ou Robin estão todas aí incluídas! **Isto é fantástico!**

Em resumo: se as funções  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de contorno do PSLr a identidade de Lagrange se reduzirá na expressão

$$\int_0^1 [vLu - uLv] dx = 0 \quad (15.5)$$

Usando o produto escalar, usual para o espaço  $C_{[0,1]}$ , a relação anterior pode ser escrita como:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{Lu} \rangle = \langle \mathbf{Lv}, \mathbf{u} \rangle \quad (15.6)$$

Todo operador linear diferencial que satisfaz esta condição para quaisquer duas funções de classe  $C^2$  com condições de contorno apropriadas é chamado de auto-adjunto. Assim os operadores do tipo de Sturm-Liouville são auto-adjuntos.

**Exemplo** - Como os problemas:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

são PSLr as soluções não triviais, isto é, as autofunções são ortogonais no intervalo  $[0, \pi]$  com respeito a função peso  $r(x) = 1$ . No primeiro caso temos as autofunções  $\cos nx$  e no segundo,  $\sin nx$ .

Admitindo-se que o PLSr tenha realmente autovalores vamos analisar algumas consequências do resultado obtido.

**Teorema** - Se  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  são quaisquer duas soluções de  $Ly = \lambda r(x)y$  em  $0 \leq x \leq 1$ , então

$$p(x)W(x; \phi_1, \phi_2) = \text{constante}$$

onde  $W$  é o Wronskiano.

**Prova** - Desde que  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  são soluções de  $Ly = \lambda r(x)y$ , temos:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_1}{dx} \right) + q\phi_1 &= \lambda r\phi_1 \\ -\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_2}{dx} \right) + q\phi_2 &= \lambda r\phi_2 \end{aligned}$$

Multiplicando-se a primeira por  $\phi_2$ , a segunda por  $\phi_1$  e subtraindo membro a membro obtemos:

$$\phi_1 \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_2}{dx} \right) - \phi_2 \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\phi_1}{dx} \right) = 0$$

Integrando esta equação de 0 até  $x$ , segue:

$$p(x) [\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x)] = p(0) [\phi_1(0)\phi_2'(0) - \phi_1'(0)\phi_2(0)] = cte$$

Esta identidade é chamada de *fórmula de Abel*.

Pode ser provado que os **autovalores** de um PSL regular, quando existem, são **reais e** o seguinte resultado cuja justificativa omitiremos (referência [9]).

**Teorema I** - O PSL regular dado tem uma sequência infinita de autovalores reais simples (multiplicidade um) e que podem ser reagrupados em uma sequência crescente  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ . (não pode ter duas autofunções linearmente independentes correspondendo ao mesmo autovalor).

Além disso para cada  $n$  a autofunção correspondente  $\phi_n(x)$  é determinada unicamente, a menos que um fator multiplicativo, e tem exatamente  $(n-1)$  zeros no intervalo aberto  $(a, b)$ .

O exercício a seguir visa esclarecer estes resultados.

**Exercício** - Ache os autovalores e autofunções do problema de valor de contorno.

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) &= 0, & y(1) + y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

**Solução** - Se  $\lambda = 0$ , como a solução geral é

$$y = c_1x + c_2,$$

teremos apenas a **solução trivial**.

Se  $\lambda = -\alpha^2 < 0$ , desde que a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0$$

as condições de contorno obrigam que:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ e^{2\alpha} (1 + \alpha) c_1 + (1 - \alpha) c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para termos solução não trivial é preciso que o determinante da matriz dos coeficientes seja zero, isto é,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\alpha} (1 + \alpha) & (1 - \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, que  $(1 - \alpha)/(1 + \alpha) = e^{2\alpha}$ . No entanto para  $\alpha > 0$ , essa equação não possui raízes e portanto nesse caso **não temos autovalores**.

Se  $\lambda = \alpha^2 > 0$ ,  $\alpha > 0$ , a solução geral dada por:

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Desde que  $y(0) = 0$ , devemos ter  $A = 0$  e portanto:

$$y(x) = B \sin \alpha x$$

Aplicando a segunda condição de contorno, temos:

$$B(\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) = 0$$

Para uma solução não trivial devemos ter  $B \neq 0$  e assim  $\alpha$  deve satisfazer

$$\sin \alpha + \alpha \cos \alpha = 0$$

Devemos supor  $\cos \alpha \neq 0$ , pois se ocorresse ao contrário  $\cos \alpha = 0$ , a expressão anterior nos obrigaria a tomar  $\sin \alpha = 0$  ou que  $\alpha = n\pi$ . No entanto para estes valores de  $\alpha$  a solução acima não satisfaria a condição de contorno no ponto  $x = 1$ .

Assim dividindo por  $\cos \alpha$ , vamos obter a seguinte equação algébrica

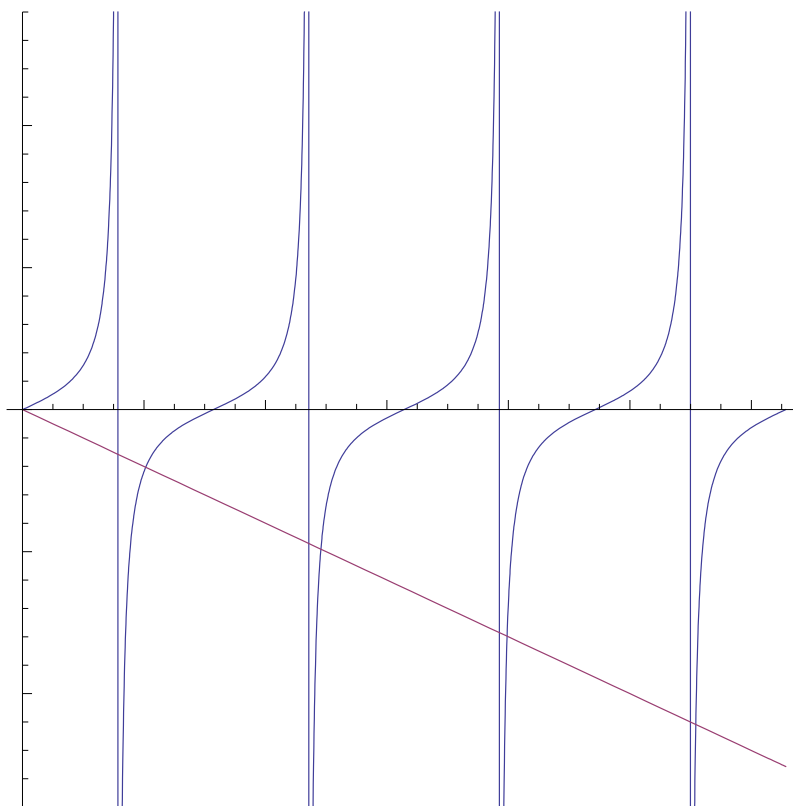
$$\tan \alpha = -\alpha$$

que não possui uma solução explícita.

Para fazer uma análise gráfica desta solução esboçamos os gráficos de  $f(\alpha) = -\alpha$  e  $g(\alpha) = \tan \alpha$  e identificamos os pontos de intersecção das curvas

É evidente no gráfico que há uma infinidade de raízes  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Para cada raiz  $\alpha_n$  corresponde um autovalor

$$\lambda_n = \alpha_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Portanto existe uma seqüência de autovalores

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

com  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .

As autofunções correspondentes são  $\sin \alpha_n x$  e pela propriedade de ortogonalidade tem-se

$$\int_0^1 \sin \alpha_n x \sin \alpha_m x dx = 0$$

para  $\alpha_n \neq \alpha_m$ .

Observe que embora as curvas se interceptem em  $\sqrt{\lambda} = 0, \lambda = 0$  não é autovalor. Poderíamos também pesquisar autovalores complexos porém **não** encontraríamos.

**Teorema II** - Sejam  $\{\phi_n(x)\}$  autofunções do PSL regular.

$$Ly = \lambda r(x)y \quad a < x < b$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$



Se as funções  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas em  $a \leq x \leq b$  então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

cujos coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n(x) \rangle}{\|\phi_n(x)\|^2},$$

converge pontualmente para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  em cada ponto no intervalo **aberto**  $a < x < b$ .

Este resultado afirma que as autofunções de um PSLr constituem um conjunto completo em relação a convergência pontual, para um conjunto de funções seccionalmente suaves em  $a \leq x \leq b$ .

No caso de convergência na média temos o seguinte resultado para funções quadrado integráveis num intervalo  $a \leq x \leq b$ .

As autofunções do PSLr formam um conjunto completo em relação a convergência na média para um conjunto de funções que são quadrado integráveis no intervalo  $a \leq x \leq b$ , ou em outras palavras, para qualquer função quadrado integrável  $f$  a série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

cujos coeficientes são dados por

$$c_n = \langle f, \phi_n(x) \rangle / \|\phi_n(x)\|^2$$

converge na média quadrática para  $f(x)$ .

Vamos a seguir ilustrar estes resultados:

**Exemplo** - Considere o PSL regular

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

As autofunções normalizadas deste problema são

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$$

Assim se  $f$  for quadrado integrável em  $0 \leq x \leq 1$ , a série

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$$

onde

$$c_n = \int_0^1 f(x) \phi_n(x) dx = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$$

converge na média.

330

Por outro lado se  $f$  for seccionalmente suave em  $0 \leq x \leq 1$  então esta mesma série com este coeficiente irá convergir pontualmente para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  em cada ponto do intervalo aberto  $0 < x < 1$ .

**Exercício** - Expandir a função

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 1$$

em termos das autofunções do problema

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) &= 0, & y(1) + y'(1) = 0 \end{aligned}$$

**Solução** - As autofunções desse problema foram determinadas no exercício anterior como sendo:

$$\phi_n(x) = \text{sen } \sqrt{\lambda_n} x$$

onde  $\lambda_n$  satisfaz a equação:

$$\text{sen } \sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} = 0$$

Vamos determinar primeiramente  $\|\phi_n\|^2$ .

$$\begin{aligned} \|\phi_n(x)\|^2 &= \int_0^1 \phi_n^2(x) dx = \int_0^1 \text{sen}^2 \sqrt{\lambda_n} x dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\sqrt{\lambda_n} x \right] dx = \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda_n} - \text{sen } 2\sqrt{\lambda_n}}{4\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\sqrt{\lambda_n} - \text{sen } \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}} \equiv \frac{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}}{2} \end{aligned}$$

Vamos calcular os coeficientes  $c_n$ :

$$c_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \langle f, \phi_n \rangle = \frac{2}{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 x \text{sen } \sqrt{\lambda_n} x dx$$

Integrando por partes temos:

$$\int_0^1 x \text{sen } \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{\text{sen } \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} - \frac{\cos \sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{2 \text{sen } \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n}$$

Logo:

$$c_n = \frac{2}{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}} \frac{2 \text{sen } \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} = \frac{4}{\lambda_n} \frac{\text{sen } \sqrt{\lambda_n}}{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}}$$

e portanto:

$$f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n (1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})} \text{sen } \sqrt{\lambda_n} x, \quad 0 < x < 1$$

**Observe** que no mesmo intervalo  $0 < x < 1$  enquanto que a norma do conjunto ortogonal  $\{\text{sen } n\pi x\}$  é  $\sqrt{1/2}$ , a norma do conjunto ortogonal  $\{\text{sen } \sqrt{\lambda_n} x\}$ , que é a raiz quadrada de  $(1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})/2$  onde  $\lambda_n$  satisfaz a equação  $\tan \sqrt{\lambda_n} = -\sqrt{\lambda_n}$ , varia com  $n$ .

**Exercício** - Expandir a função  $f(x) = \pi x - x^2$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , em série das autofunções ortonormais  $\{\phi_n\}$  do PSL regular

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

**Solução** - Resolvendo este problema de contorno encontraremos as seguintes autofunções **ortonormais**

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen } nx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Os coeficientes de Fourier da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

são dados por:

$$c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen } nx dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{n^3}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

Assim temos a série de Fourier

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

onde analisaremos a convergência:

- a) Sendo  $p = 1$ ,  $q = 0$ ,  $r = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = \pi$  temos um PSL regular.
- b) Desde que  $f$  é um polinômio,  $f$  e  $f'$  são contínuas em qualquer intervalo particularmente em  $[0, \pi]$ .
- c) Como  $\phi_n(0) = 0$  e  $f(0) = 0$  e além disso  $\phi_n(\pi) = 0$  e  $f(\pi) = 0$  temos que a série converge pontualmente para  $\pi x - x^2$  no intervalo  $[0, \pi]$ .

$$\pi x - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Como existe continuidade no intervalo fechado esta série converge uniformemente e absolutamente para  $f(x)$  em cada ponto de  $a \leq x \leq b$

Para tirarmos conclusões a respeito da ortogonalidade das autofunções é importante que a EDO de 2ª ordem esteja na forma

$$[p(x)y']' + [-q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

332

Se não tiver como, por exemplo, em

$$a(x)y'' + b(x)y' + \lambda c(x)y = 0,$$

precisamos substituí-la por uma equação equivalente. Para tal após dividirmos pelo coeficiente de  $y''$  multiplicamos por

$$\exp\left[\int b(x)/a(x) dx\right]$$

O exemplo a seguir ilustra este fato.

**Exemplo** - Considere a equação

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad x > 0$$

que pode ser escrita como

$$1 \cdot y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{\lambda}{x^2}y = 0, \quad x > 0$$

Multiplicando esta equação por

$$e^{\int 1/x dx},$$

que a menos de uma constante aditiva é o próprio  $x$ , temos

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y \equiv [xy']' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \quad x > 0$$

que é equivalente a equação dada.

### COMENTÁRIOS

- (1) O PSL permite que numa simples "olhada" possamos reconhecer a ortogonalidade das autofunções, no entanto para expandir uma função em série de autofunções é necessário calcular a sua norma, tarefa esta nem sempre fácil!. Existe, contudo, para determinados casos um método indireto fundamentado na identidade de Lagrange (ver referência [21]).
- (2) O conjunto de todos os autovalores de um problema de autovalores é chamado por alguns autores de espectro do problema e a expansão em autofunções de uma função é chamada de representação espectral da função.
- (3) O teorema II pode ser escrito de uma forma alternativa qual seja: **As autofunções** do PSL regular no intervalo  $a \leq x \leq b$  são **completas** em relação a **convergência pontual** para o conjunto de **funções contínuas** no intervalo  $a < x < b$  tendo derivada seccionalmente contínua neste intervalo.
- (4) No caso de **convergência em média quadrática** as **autofunções do PSL regular** são **completas** para o conjunto de funções que é **quadrado integráveis**.

(5) O teorema II pode estabelecer uma conclusão mais forte. Suponha que além das hipóteses feitas, a função  $f$  seja contínua em  $a \leq x \leq b$  com as seguintes propriedades:

- (a) Se  $a_2 = 0$ , de modo que  $\phi_n(a) = 0$ , então  $f(a) = 0$
- (b) Se  $b_2 = 0$ , de modo que  $\phi_n(b) = 0$ , então  $f(b) = 0$

Nestas condições a série converge para  $f(x)$  em cada ponto do intervalo fechado  $a \leq x \leq b$ .

- (6) No teorema II, para o caso particular de  $f$  contínua em  $[a, b]$ , a série de Fourier generalizada de  $f$  converge uniformemente e absolutamente para  $f$  no intervalo aberto  $(a, b)$ .
- (7) Existem outras condições de contorno que não estão embutidas no PSLr mas que também **anulam** a identidade de Lagrange, e portanto as autofunções do referido problema são ortogonais, por exemplo,
- a)  $p(a) = 0$  (a condição de contorno em  $x = a$  retirada);
  - b)  $p(b) = 0$  (a condição de contorno em  $x = b$  retirada);
  - c)  $p(a) = 0$  e  $p(b) = 0$ , (as condições em  $x = a, x = b$  são retiradas);
- Nestes casos os autovalores e as autofunções também **são** reais.

#### 15.4 Problema de Sturm-Liouville Periódico

Se um autovalor corresponde apenas uma autofunção independente, dizemos que o autovalor tem *multiplicidade 1* - é o que ocorre no **PSL regular** onde as condições são **separadas**. Entretanto em outros problemas de contorno com condições mistas pode haver **duas** autofunções independentes correspondentes a **um** mesmo autovalor. Neste caso dizemos que o autovalor tem *multiplicidade 2*, é o que ocorre com o PSL periódico. Como a ESL é de  $2^a$  ordem a multiplicidade não pode ser maior que 2.

*Um caso que aparece com frequência em aplicações, onde a identidade de Lagrange se **anula***, é quando as condições de contorno forem **mistas**, e por se tratar de um PSL não regular será estudado separadamente. O problema consistindo de uma ESL em  $a < x < b$ , no qual  $p(a) = p(b) \neq 0$ , com as condições de contorno mistas

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}(b), \quad \mathbf{y}'(a) = \mathbf{y}'(b)$$

é chamado de *problema de Sturm-Liouville periódico*, e estas condições são chamadas de *periódicas*. Exceto o fato de que, diferentemente do PSL regular, no PSL periódico o autovalor **não tem necessariamente multiplicidade um**, as demais propriedades são mantidas. O exemplo a seguir ilustra esse tipo de problema.

**Exercício** - Determine os autovalores e as autofunções do PSL periódico.

$$\begin{aligned}y'' + \lambda y &= 0, & -\pi < x < \pi \\y(-\pi) &= y(\pi), & y'(-\pi) &= y'(\pi)\end{aligned}$$

**Solução** - Note que  $p(x) = 1$ , e portanto  $p(-\pi) = p(\pi)$ .

Se  $\lambda < 0$  encontraremos apenas a solução trivial;

Se  $\lambda = 0$  temos a solução  $y(x) = 1$  (ou múltiplos desse valor).

Quando  $\lambda > 0$  a solução geral da equação é

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

e usando as condições de contorno temos:

$$\begin{aligned}2c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) &= 0 \\2\sqrt{\lambda}c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) &= 0\end{aligned}$$

Portanto para obter solução não trivial devemos ter:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \quad c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0$$

e conseqüentemente,

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Note que para cada autovalor corresponde a **duas** famílias de autofunções linearmente independentes

$$\cos nx, \quad \sin nx,$$

ou seja tem **multiplicidade dois**, fato este que **difere** do PSL regular.

Assim os autovalores são 0 e  $n^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e as autofunções formam a sequência

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}$$

ortogonal em  $[-\pi, \pi]$ , com  $r(x) = 1$ , a qual é usada na série de Fourier trigonométrica.

Note que as autofunções deste problema são mais gerais pois para qualquer constante  $c_n$  as funções:

$$\phi_n = \sin nx \quad \text{e} \quad \psi_n = c_n \sin nx + \cos nx$$

são soluções que correspondem ao mesmo *autovalor*  $\lambda = n^2$ . Como são linearmente independentes existe uma combinação destas soluções que são ortogonais, no caso,  $c_n = 0$ .

### 15.5 Problema de Sturm-Liouville Singular

No PSL **regular** estudado anteriormente

$$L[y] \equiv -[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad a < x < b \quad (15.7)$$

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \quad (15.8)$$

$$b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \quad (15.9)$$

as funções  $p'$ ,  $q$  e  $r$  necessariamente devem ser contínuas em  $a \leq x \leq b$  e  $p(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$  neste mesmo intervalo **fechado** (finito).

Entretanto existem equações de interesse da física matemática em que algumas destas condições não são satisfeitas. Por exemplo, na *equação de Bessel*

$$-[xy']' + \frac{n^2}{x}y = \lambda xy, \quad 0 < x < 1,$$

temos:

$$p(x) = x, \quad q(x) = n^2/x \quad \text{e} \quad r(x) = x$$

Logo:  $p(0) = r(0) = 0$  e  $q(x)$  é não limitada, e portanto descontínua quando  $x \rightarrow 0^+$

Da mesma forma a *equação de Legendre*

$$-[(1-x^2)y']' = \lambda y, \quad -1 < x < 1$$

onde

$$p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1$$

a função  $p(x)$  anula nas extremidades do intervalo, ou seja  $p(-1) = p(1) = 0$ .

Outro exemplo é a *equação de Hermite*

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

onde o intervalo **não** é infinito.

Estas equações de Sturm-Liouville são chamadas de singulares mediante a seguinte definição. Uma equação de Sturm-Liouville é *chamada singular* quando ela é dada sobre um intervalo infinito (ou semi infinito), ou quando num intervalo finito as funções  $p$ ,  $q$  e  $r$  satisfazem as condições do caso regular no intervalo aberto  $a < x < b$ , mas que pelo menos uma destas funções não satisfaz as condições em um ou em ambos os pontos do contorno.

Uma ESL singular juntamente com condições de contorno lineares e homogêneas **adequadas** é chamado de *problema de Sturm-Liouville singular*. As condições impostas nesse caso **não** são como as condições separadas do PSL regular e discutiremos a seguir.

Devido a importância da ortogonalidade das autofunções vamos impor que as condições "**adequadas**" são as que fornecem um problema que satisfaça a condição (15.6), qual seja

$$\langle v, Lu \rangle = \langle Lv, u \rangle$$

Assim estas funções gozarão praticamente das mesmas propriedades dos autovalores e autofunções dos problemas regulares.

Para investigar essas condições "adequadas" vamos admitir uma equação em  $0 < x < 1$  onde  $x = 0$  é um ponto singular porém  $x = 1$  continua a ser ponto regular.

Pergunta: Que condição de contorno será admissível no ponto singular da fronteira  $x = 0$ ?

Para determinar esta condição na relação (15.4) a integral  $\int_0^1$ , será tratada como integral imprópria  $\int_\varepsilon^1$  onde faremos  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Se  $y$  e  $z$  forem quaisquer funções de classe  $C^2$  em  $\varepsilon \leq x \leq 1$ , por esta relação temos:

$$\int_{0+\varepsilon}^1 \{zL[y] - yL[z]\} dx = p(1)[y'(1)z(1) - y(1)z'(1)] \quad (15.10)$$

$$-p(0+\varepsilon)[y'(0+\varepsilon)z(0+\varepsilon) - y(0+\varepsilon)z'(0+\varepsilon)]$$

Como o ponto  $x = 1$  é regular, pela condição de contorno neste ponto, segue que

$$p(1)[y'(1)z(1) - y(1)z'(1)] = 0 \quad (15.11)$$

Se for imposta a seguinte condição sobre  $y$  e  $z$  no ponto singular  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] = 0 \quad (15.12)$$

segue que:

$$\int_0^1 \{zL[y] - yL[z]\} dx = 0 \quad (15.13)$$

e assim o problema satisfaz a condição  $\langle z, Lu \rangle = \langle Lz, y \rangle$ . Portanto a condição acima é o critério que determinará quais condições de contorno serão admissíveis em  $x = 0$ .

Por exemplo, quando  $p(0) = 0$  e se as autofunções satisfazem as condições:

a)  $y(x)$  e  $y'(x)$  são finitas quando  $x \rightarrow 0^+$



$$\mathbf{b)} \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0$$

temos um PSL singular. Se  $x = 0$  for ponto regular e  $x = 1$  ponto singular teremos um resultado semelhante onde a integral imprópria será  $\int_0^{1-\varepsilon}$ , sendo  $\varepsilon > 0$ .

Nos exercícios precedentes vimos que as autofunções são ortogonais com respeito a função peso  $r(x)$ . Em geral as autofunções de um PSL singular são ortogonais se elas são quadrado integráveis com respeito a função peso  $r(x)$ .

**Teorema** - As autofunções quadrado integráveis correspondentes a autovalores distintos e discretos de um PSL singular são ortogonais com respeito a função peso  $r(x)$ .

**Prova** - Usando a expressão (15.4) com  $u = \phi_i$ ,  $v = \phi_j$ , sendo

$$L\phi_i = \lambda_i r\phi_i, \quad L\phi_j = \lambda_j r\phi_j$$

temos:

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j) \int_0^1 r\phi_i\phi_j dx &= p(1) [\phi_i(1)\phi_j'(1) - \phi_i'(1)\phi_j(1)] \\ &\quad - p(0) [\phi_i(0)\phi_j'(0) - \phi_i'(0)\phi_j(0)] \end{aligned}$$

Supondo que:

- $p(0) = 0$  e que  $y$  e  $y'$  sejam limitadas quando  $x \rightarrow 0^+$ ;
- em  $x = 1$  seja válida a condição do PSLr

$$b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0,$$

temos que

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^1 r\phi_i(x)\phi_j(x) dx = 0$$

Esta integral existe e portanto para **autovalores distintos** as funções quadrado integráveis  $\phi_i$  e  $\phi_j$  **são ortogonais com respeito a função peso  $r(x)$** .

### COMENTÁRIOS

- (1) No intervalo  $0 < x < 1$  se  $x = 1$  for ponto singular,  $x = 0$  porém ponto ordinário, tomaremos a condição limite em  $x = 1$ , semelhante a (15.12) e a condição do PSL regular

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0$$

o que fará com que o problema satisfaça

$$\langle v, Lu \rangle = \langle Lv, u \rangle$$

- (2) A diferença mais marcante entre PSL regulares e singulares é que nos **singulares** os **autovalores podem não** ser **discretos**. Ou seja o problema pode ter solução não trivial para todo  $\lambda$  em algum intervalo, e dizemos que o problema tem *espectro contínuo*. Pode acontecer mesmo que o problema singular tenha uma mistura de autovalores discretos e também de um espectro contínuo. Em geral pode ser difícil determinar em que caso isso ocorre e analisaremos apenas os casos onde temos um conjunto infinito de autovalores discretos, onde através de (15.13) prova-se que os autovalores são reais e as autofunções ortogonais.
- (3) Se a EDO for de ordem superior a dois e para condições de contorno apropriadas, se a condição **anterior** for observada teremos ainda a ortogonalidade das autofunções. Este tipo de problema **não** será analisado neste texto.

## 15.6 RESUMO

Nos problemas envolvendo EDP após separar as variáveis encontramos um problema de contorno cuja EDO apresenta um parâmetro, digamos  $\lambda$ . Nos problemas de contorno desse tipo, chamados de problemas de autovalores, em geral existe solução **não** trivial apenas para um conjunto particular de valores de  $\lambda$ , chamados de autovalores, sendo que as soluções correspondentes são as autofunções.

Neste capítulo unificaremos esta teoria e mostraremos que os problemas de autovalores discutidos nas lições anteriores são casos particulares do problema de Sturm-Liouville.

Se  $p(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$  são funções reais definidas no intervalo finito  $[a, b]$  tal que

- (1)  $p, p', q$  e  $r$  são contínuas em  $a \leq x \leq b$ , e
- (2)  $p(x) > 0$  e  $r(x) > 0$  em  $a \leq x \leq b$

a equação:

$$Ly = \lambda r(x)y, \quad a < x < b$$

onde

$$L \equiv -\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x)$$

e  $\lambda$  um parâmetro independente de  $x$  e  $y$ , é chamada de equação de Sturm-Liouville (ESL) regular.

Se além desta equação o problema consiste das condições de contorno separadas.

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

ele é chamado de problema de Sturm-Liouville regular (PSLr).

Uma importante propriedade do operador  $L$  é que se  $u$  e  $v$  forem de classe  $C^2$ , usando integração por partes temos a identidade de Lagrange:

$$\int_a^b \{vLu - uLv\}dx = -p(x)[v(x)u'(x) - u(x)v'(x)]|_a^b$$

Se além disso  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de contorno impostas, o segundo membro é nulo e em termos do produto escalar temos a importante identidade.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{Lu} \rangle = \langle \mathbf{Lv}, \mathbf{u} \rangle$$

que é uma relação fundamental para mostrar importantes resultados.

Dentre os principais resultados sobre o PSL regular temos:

- (1) Existe uma infinidade de autovalores **reais**  $\lambda_n$  os quais podem ser ordenados numa sequência estritamente crescente  $\{\lambda_n\}$  tal que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

- (2) As autofunções  $\phi_n(x)$  do PSLr correspondendo a autovalores distintos são ortogonais com respeito a função peso  $r(x)$ .
- (3) Se  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas em  $a \leq x \leq b$ , então a série generalizada de  $f(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

que tem como coeficientes de Fourier;

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2},$$

converge para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  em cada ponto do intervalo aberto  $a < x < b$ .

O problema consistindo de uma ESL em  $a < x < b$  no qual  $p(a) = p(b)$  junto com as condições de contorno periódicas

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned}$$

é chamado de PSL periódico. Os resultados acima também são mantidos para este problema porém para um mesmo autovalor, diferentemente do que ocorre no PSLr, temos duas autofunções LL.

Se quaisquer das condições que definem a ESLr **a)** ou **b)** forem violadas, ou se o intervalo for infinito, a ESL não é mais regular e sim singular.

Um PSL singular no intervalo finito  $(a, b)$  consiste da ESL singular e condições adequadas de tal forma que a relação

$$\langle z, Lu \rangle = \langle Lz, u \rangle$$

seja preservada. As condições de contorno neste caso **não** são como as condições separadas do PSL regular.

Neste caso os autovalores não precisam ser discretos. Se os forem os resultados acima são mantidos para os autovalores e para as autofunções.

### 15.7 Exercícios Propostos

- (1) Determine os autovalores e as autofunções do problema:

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad 1 < x < e; \quad y(1) = y(e) = 0$$

$$\text{Resp: } \lambda_n = n^2 \pi^2, n \in N^*, \phi_n = \text{sen}(n\pi \ln x)$$

- (2) Diga qual dos seguintes problemas é homogêneo e de condições de contorno separadas:

(a)  $-y'' + x^2 y = \lambda y$  ,  $y'(0) - y(0) = 0$  ,  $y'(1) + y(1) = 0$

(b)  $[(1+x^2)y']' + 4y = 0$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y(0) + 2y'(1) = 0$

(c)  $-y'' = \lambda(1+x^2)y$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(1) + 3y(1) = 0$

- (3) Em cada um dos problemas abaixo ache os autovalores e autofunções:

(a)  $y'' + \lambda y = 0$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(1) = 0$

$$\text{Resp: } \lambda_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2} \right]^2, \phi_n(x) = \text{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

(b)  $y'' + \lambda y = 0$  ,  $y'(0) = 0$  ,  $y'(1) = 0$

$$\text{Resp: } \lambda_0 = 0, \phi_0(x) = 1, \lambda_n = n^2 \pi^2, \phi_n(x) = \cos n\pi x$$

- (4) Determine os autovalores (aproximados) para  $n$  "grande" e as autofunções correspondentes:

(a)  $y'' - \lambda y = 0$  ,  $y(0) + y'(0) = 0$  ,  $y(1) = 0$

$$\text{Resp: } \lambda_0 = 0, \phi_0(x) = 1 - x, \phi_n(x) = \text{sen} \sqrt{\lambda_n} x - \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x, \lambda_n \simeq -(2n-1)^2 \pi^2 / 4$$

(b)  $y'' + \lambda y = 0$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y(\pi) + y'(\pi) = 0$

$$\text{Resp: } \phi_n(x) = \text{sen} \sqrt{\lambda_n} x, \sqrt{\lambda} = -\tan \sqrt{\lambda} \pi, \lambda_n \simeq (2n-1)^2 \pi^2 / 4$$

- (5) Considere o problema de contorno:

$$y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

- (a) Introduza uma nova variável dependente  $u$  pela relação  $y = s(x)u$  e determine  $s(x)$  de modo que a ED em  $u$  não tenha  $u'$ .

- (b) Resolva o problema para  $u$  e a partir daí determine os autovalores e as autofunções do problema original.

- (c) Resolva também o problema diretamente (sem introduzir uma nova variável)

$$\text{Resp: } \sqrt{\lambda_n} = (2/3) \tan 3\sqrt{\lambda_n} L, \phi_n(x) = e^{-2x} \text{sen} 3\sqrt{\lambda_n} x.$$

Se  $\lambda = 1/2, \lambda_0 = 0$  é autovalor,  $\phi_0(x) = xe^{-2x}$  é autofunção;

Se  $\lambda \neq 1/2, \lambda_0 = 0$  não é autovalor;

Se  $\lambda \leq 1/2$ , não existem autovalores negativos;

Se  $\lambda > 1/2$ , existe um autovalor negativo  $\lambda = -\alpha^2$  onde  $\alpha$  é uma raiz de  $\alpha = (2/3) \tanh(3\alpha L)$ , e autofunção correspondente é:  $\phi(x) = e^{-2x} \text{sen } h3\alpha$

(6) Use a identidade de Lagrange e mostre que as autofunções de um PSL periódico em  $a < x < b$  são ortogonais com respeito a função peso  $r$  em  $a < x < b$ .

(7) Use a fórmula de Abel para mostrar que uma autofunção de um PSL regular em  $a < x < b$  é única exceto para um fator constante.

**Sugestão:** Use duas autofunções e mostre que  $W(a; \phi_1, \phi_2) = 0$

(8) Determine as autofunções normalizadas dos seguintes problemas:

(a)  $y'' + \lambda y = 0$  ,  $y(0) = 0$  ,  $y'(1) = 0$

*Resp:*  $\phi_n(x) = \sqrt{2} \text{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x$

(b)  $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0$  ,  $y(0) = y(1) = 0$

*Resp:*  $\phi_n(x) = 2e^x \text{sen}(n\pi x) / \sqrt{e^2 - 1}$

(9) Considere o PSL regular

$$-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y$$

$$a_1y(0) + a_2y'(0) = 0 \quad , \quad b_1y(1) + b_2y'(1) = 0$$

(a) Mostre que se  $\lambda$  é um autovalor e  $\phi$  uma autofunção correspondente; ao multiplicar a ESL por  $\phi$  e integrar por partes, então

$$\lambda \int_0^1 r\phi^2 dx = \int_0^1 (p\phi'^2 + q\phi^2) dx + \frac{b_1}{b_2}p(1)\phi^2(1) - \frac{a_1}{a_2}p(0)\phi^2(0)$$

desde que  $a_2 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$ . Como se modifica este resultado se  $a_2 = 0$  ou  $b_2 = 0$ ?

(b) Mostre que se  $q(x) \geq 0$  e se  $b_1/b_2$  e  $-a_1/a_2$  forem não negativos, então o autovalor  $\lambda$  será não negativo.

(c) Sob as condições da parte b), mostre que o autovalor  $\lambda$  é estritamente positivo, a menos que  $q(x) = 0$  para cada  $x$  em  $0 \leq x \leq 1$  e também  $a_1 = b_1 = 0$ . (Neste caso a ESL é da forma  $(py')' = -\lambda ry$  e a autofunção  $\phi$  é uma constante ou seja  $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$ ).

(10) No PSLr

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(1) = 0$$

verifique que as autofunções  $\phi_n(x)$  tem exatamente  $(n - 1)$  raízes o intervalo aberto  $(0, 1)$ .

(11) Mostre que a separação de variáveis no problema:

$$g(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + h(x) u \quad , \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(L, t) = 0 \quad , \quad u(x, 0) = f(x) \quad , \quad |u(x, t)| < M$$

conduz a um PSL. Dê uma interpretação física do problema dado.

(12) Verifique se o problema

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y'(0) = y'(1) = 0$$

é um PSL regular.

(a) Determine os autovalores e as autofunções.

(b) Mostre que as autofunções são ortogonais no intervalo  $[0, 1]$ .

(13) Quais são os autovalores e as autofunções do PSL

$$X'' + \lambda X = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$X(0) = 0 \quad , \quad X'(1) = 0$$

## Chapter 16

# Série de Fourier de sequências particulares

**Finalidade** - Nos dois últimos capítulos foi visto que a série de Fourier existe para uma sequência ortogonal qualquer e que estas surgem naturalmente ao resolver um problema de Sturm-Liouville que se originam ao resolver problemas envolvendo EDP pelo método de separação de variáveis. Neste capítulo apresentaremos as séries de Fourier Bessel e a Fourier Legendre que geralmente aparecem ao resolver problemas com condições de contorno cilíndricas ou esféricas, respectivamente.

Como as equações de Bessel e Legendre foram estudadas no curso, previamente dado, de equação diferencial ordinária apresentaremos aqui apenas as propriedades necessárias para desenvolver este capítulo.

Os problemas de autovalores onde aparecem estas funções são PSL singulares e o desenvolvimento de uma dada função em termos de uma série de autofunções bem como a análise da convergência é feito de modo semelhante ao PSL regular:

Se  $\{\phi_n\}$  forem autofunções de um PSL singular no intervalo  $[0, 1]$  e se  $f$  e  $f'$  forem seccionalmente contínuas em  $0 \leq x \leq 1$  então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

cujos coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{\langle f(x), \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle},$$

converge para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  em cada ponto de  $x$  no intervalo  $0 < x < 1$ .

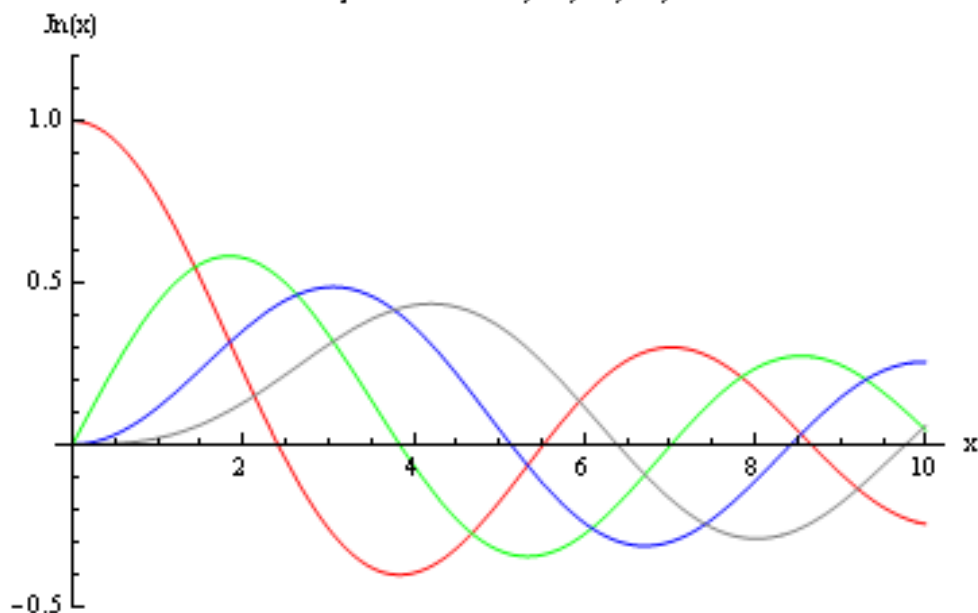
### 16.1 Problemas envolvendo a equação de Bessel

#### 16.1.1 Noções sucintas das funções de Bessel

A EDO linear homogênea

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad x > 0,$$

### Funções de Bessel, J0, J1, J2, J3



onde  $p$  é qualquer número **real** não negativo, ou de modo equivalente

$$x(xy')' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad x > 0$$

é denominada equação de Bessel de **ordem**  $p$ . As duas soluções independentes desta equação são obtidas por meio de séries de potências e, se definidas de formas adequadas, são conhecidas como funções de Bessel de ordem  $p$ .

A solução geral para qualquer  $p \geq 0$  é dada por:

$$y = AJ_p(x) + BY_p(x)$$

onde  $J_p(x)$ , que tem limite finito quando  $x \rightarrow 0^+$ , é chamada de função de Bessel de 1ª espécie de ordem  $p$ , e  $Y_p$ , que não é limitada quando  $x \rightarrow 0^+$ , é chamada de função de Bessel de 2ª espécie, ou função de Neumann, ou de Weber.

Se  $p \neq 0, 1, 2, 3, \dots$  a solução geral pode também ser dada por

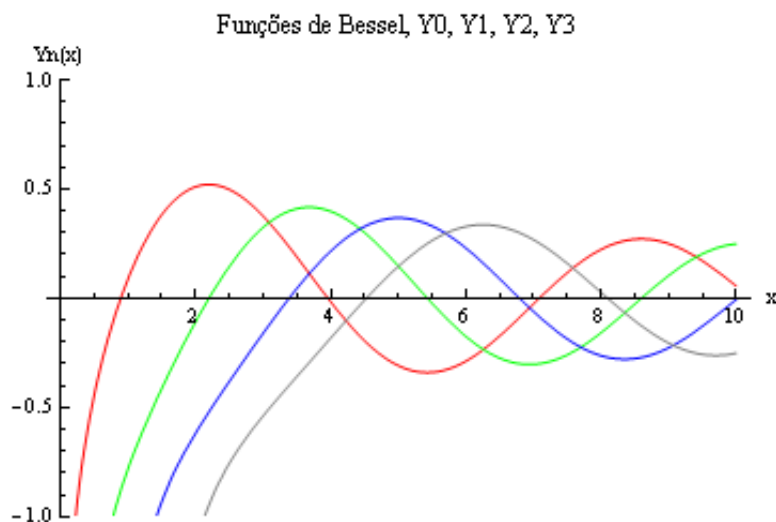
$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

pois neste caso  $J_p(x)$ ,  $J_{-p}(x)$  são independentes.

Se em vez de  $x$  a variável independente for  $\lambda x$ ,  $\lambda = c^{te}$ , a equação resultante torna-se

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0, \quad x > 0,$$





ou equivalentemente

$$-[xy'] + \frac{p^2}{x}y = \lambda^2 xy$$

cuja solução geral é dada por

$$y = AJ_p(\lambda x) + BY_p(\lambda x)$$

As propriedades mais usuais em problemas de contorno que relacionam estas funções são:

**Propriedade 1** - As funções de Bessel têm um número **infinito** de raízes sendo todas **reais**.

**Propriedade 2** - Se  $p = 0$  as duas funções  $J_p(x)$ ,  $J_{-p}(x)$  são idênticas e se  $p = n$  for inteiro elas são **dependentes**,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

e tem limites finitos quando  $x \rightarrow 0^+$ .

**Propriedade 3** - Se  $n$  for um inteiro então a série de potências que define  $J_n(x)$  contém **unicamente** potências pares de  $x$  se  $n$  for par, por outro lado se  $n$  for ímpar então  $J_n(x)$  contém **unicamente** potências ímpares de  $x$ .

**Propriedade 4** - As relações

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(kx)] = kx^n J_{n-1}(kx), \quad \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(kx)] = -kx^{-n} J_{n+1}(x),$$

346

obtidas a partir da definição da função  $J_n(x)$ , e que também são válidas para a função de Bessel de 2ª espécie  $Y_n(x)$ , em conjunção com integração por partes, são geralmente úteis para determinar os coeficientes da série de Fourier- Bessel da função potência.

**Propriedade 5** - Fazendo as derivações na propriedade anterior segue que

$$\frac{dJ_n(kx)}{dx} = kJ_{n-1}(kx) - \frac{n}{x}J_n(kx); \quad \frac{dJ_n(kx)}{dx} = -kJ_{n+1}(kx) + \frac{n}{x}J_n(kx)$$

**Propriedade 6** - A relação

$$\int_0^1 xJ_n^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2}[J_n'^2(\lambda) + (1 - n^2/\lambda^2)J_n^2(\lambda)]$$

é útil para determinar a norma da função  $J_n(\lambda x)$ .

### 16.1.2 Série de Fourier-Bessel

A equação de Bessel

$$- [xy']' + \frac{n^2}{x}y = \lambda^2 xy, \quad 0 < x < 1,$$

que tem como solução,

$$y = c_1 J_n(\lambda x) + c_2 Y_n(\lambda x)$$

é uma equação de Sturm-Liouville, e sendo

$$p(x) = x, \quad q(x) = n^2/x \quad \text{e} \quad r(x) = x$$

temos  $p(0) = r(0) = 0$  e  $q(x)$  é não limitada, e portanto descontínua quando  $x \rightarrow 0^+$ , trata-se de uma equação de Sturm-Liouville singular.

Como  $p(0) = 0$ , se as autofunções satisfazem as condições:

a)  $y(x)$  e  $y'(x)$  são finitas quando  $x \rightarrow 0^+$

b)  $b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0$

teremos um PLS singular e portanto a condição auto-adjunta

$$\langle vLu, uLv \rangle = 0$$

é satisfeita. Logo as autofunções são ortogonais no intervalo  $0 < x < 1$  com respeito a função peso  $r(x) = x$ .

**Caso particular**  $b_2 = 0, b_1 \neq 0$  ou seja  $y(1) = 0$

Para que a solução seja finita na origem deve-se ter  $c_2 = 0$  e portanto a solução torna-se

$$y(x) = c_1 J_n(\lambda x)$$

Logo

$$y(1) = c_1 J_n(\lambda) = 0,$$

e como  $c_1 \neq 0$ , pois caso contrário teríamos apenas a solução trivial, segue que para termos solução não nula os valores de  $\lambda$  são tais que

$$J_n(\lambda_m) = 0 \quad m = 1, 2, 3,$$

Logo os autovalores são as raízes da função  $J_n(x)$ , as quais constituem um conjunto infinito porém discreto, e as autofunções, que são

$$\phi_m(x) = J_n(\lambda_m x)$$

constituem um conjunto ortogonal no intervalo  $0 < x < 1$  com respeito a função peso  $r(x) = x$ .

Desta forma se  $f$  for uma função seccionalmente suave definida em  $0 < x < 1$  e  $\lambda_m$  forem as raízes positivas de  $J_n(x) = 0$  então a série

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n(\lambda_m x), \quad 0 < x < 1$$

cujos coeficientes  $c_m$  são dados por

$$c_m = \frac{\langle f(x), J_n(\lambda_m x) \rangle |x}{\langle J_n(\lambda_m x), J_n(\lambda_m x) \rangle |x} = \frac{1}{\|J_n(\lambda_m x)\|^2} \int_0^1 x J_n(\lambda_m x) f(x) dx,$$

converge para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ .

Para determinar a norma  $\|J_n(\lambda_m x)\|$  usaremos a propriedade 6 apresentada anteriormente:

Por esta propriedade como  $\lambda_m$  é raiz de  $J_n(x)$ , temos que

$$\|J_n(\lambda_m x)\|^2 = \int_0^1 x J_n^2(\lambda_m x) = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\lambda_m)$$

pois

$$J_n'(x) = -J_{n+1}(x), \quad x > 0$$

Logo os coeficientes podem ser escritos como

$$c_m = \frac{\langle f(x), J_n(\lambda_m x) \rangle |x}{\langle J_n(\lambda_m x), J_n(\lambda_m x) \rangle |x} = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_m)} \int_0^1 x J_n(\lambda_m x) f(x) dx$$

**Exemplo:** Desenvolva a função  $f(x)$ ,  $0 < x < 1$  em série das autofunções do PSLs:

$$(xy')' + \lambda^2 xy = 0, \quad 0 < x < 1$$

348

$$y, y' \text{ limitadas quando } x \rightarrow 0^+ \\ y(1) = 0$$

**Solução:** Neste caso temos a equação de Bessel de ordem zero cuja solução geral é dada por

$$y = AJ_0(\lambda x) + BY_0(\lambda x)$$

Para termos solução limitada quando  $x \rightarrow 0^+$  tomamos  $B = 0$  e a solução resultante torna-se:

$$y = AJ_0(\lambda x)$$

Usando a condição em  $x = 1$  segue

$$y(1) = AJ_0(\lambda) = 0$$

e como  $A \neq 0$ , pois caso contrário teríamos apenas a solução trivial, devemos ter  $J_0(\lambda) = 0$ . Assim os autovalores são os valores  $\lambda = \lambda_m$  tais que

$$J_0(\lambda_m) = 0$$

Segue então que as autofunções deste problema,

$$\phi_m(x) = J_0(\lambda_m x),$$

constituem um conjunto ortogonal no intervalo  $[0, 1]$  com respeito a **função peso**  $r(x) = x$ , ou seja satisfazem a relação

$$\int_0^1 x \phi_k(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad m \neq k$$

Desta forma se

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(\lambda_m x),$$

devido a ortogonalidade destas autofunções, os coeficientes  $c_m$  são dados por

$$c_m = \frac{\langle f(x), J_0(\lambda_m x) \rangle}{\langle J_0(\lambda_m x), J_0(\lambda_m x) \rangle} = \frac{2}{J_1^2(\lambda_m)} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_m x) dx$$

pois como vimos anteriormente

$$\|J_n(\lambda x)\|^2 = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\lambda)$$

### Comentários:

- (1) Se num problema a região finita for entre duas circunferências concêntricas de raios  $a$  e  $b$  geralmente usamos as funções de Bessel de 1ª e de 2ª espécie. (Ver referência [4], [9] e [12]).

- (2) Se  $p$  for **metade de um inteiro ímpar** as funções  $J_{\pm p}(x)$  podem ser representadas na forma fechada por uma combinação de funções elementares.
- (3) O comportamento da função de Bessel de  $2^a$  espécie de ordem  $n$ ,  $Y_n(x)$ , quando  $x \rightarrow 0^+$  é semelhante ao da função  $\ln x$ , e portanto quando estivermos interessados em soluções da equação de Bessel limitada na origem devemos descartar esta solução.
- (4) A equação

$$x(xy')' - (x^2 + p^2)y = 0, \quad x > 0,$$

que difere da equação de Bessel apenas no sinal de  $x^2$ , é chamada de equação de Bessel modificada de ordem  $p$ .

- (5) Para casos mais gerais onde o ponto  $x = b$  for ordinário,  $b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$  o procedimento é o mesmo, porém com muito mais trabalho [2].
- (6) Existem importantes equações cujas solução é dada em termos da função de Bessel, por exemplo

$$x^2 y'' + (2k + 1)xy' + (\alpha^2 x^{2r} + \beta^2)y = 0$$

onde  $\alpha \neq 0, k, r$  e  $\beta$  são constantes, tem por solução

$$y = x^{-k} [c_1 J_{w/r}(\alpha x^r/r) + c_2 Y_{w/r}(\alpha x^r/r)]$$

onde  $w \equiv \sqrt{k^2 - \beta^2}$ .

## 16.2 Problemas envolvendo a equação de Legendre

### 16.2.1 Noções sucintas das funções de Legendre

A equação

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + s(s + 1)y = 0, \quad -1 < x < 1$$

onde  $s$  é um número **real** não negativo, é chamada de equação de Legendre de ordem  $s$ . As suas soluções, obtidas por séries de potências, são as funções de Legendre de ordem  $s$  e convergem no intervalo  $|x| < 1$ . Esta equação aparece no estudo de problemas do potencial com contornos esféricos.

O caso que aparece mais frequentemente em aplicações é quando  $s = n$  for inteiro positivo ou zero. Neste caso a solução geral é dada por

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

onde  $P_n(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , chamado polinômio de Legendre, ou função de Legendre de  $1^a$  espécie, enquanto que  $Q_n(x)$  é uma série de potências não limitada em  $\pm 1$ , chamada de função de Legendre de segunda espécie e definida em  $-1 < x < 1$ .

Os polinômios de Legendre satisfazem as seguintes propriedades básicas

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{2n}(-x) = P_{2n}(x), \quad P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x)$$

e podem ser calculados pela fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Por outro lado podemos mostrar que a expressão de  $Q_0(x)$  tem a forma fechada

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \equiv \tanh^{-1}(x)$$

e que a expressão para  $Q_n(x)$  pode ser dada por

$$Q_n(x) = P_n(x) Q_0(x) - p_{n-1}(x), \quad -1 < x < 1$$

onde  $p_{n-1}(x)$  é um polinômio de grau  $n-1$ .

**Exercício** - Determine os quatro primeiros polinômios de Legendre.

**Solução** - Usando a fórmula de Rodrigues temos:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \quad P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

Note por este exercício que determinar polinômios de Legendre pela fórmula de Rodrigues pode ser um tanto demorada. No entanto existe a fórmula de recorrência

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

que por vezes pode abreviar o caminho.

Em problemas da física matemática geralmente não aparece a equação de Legendre na forma apresentada mas sim numa outra equivalente ao fazer a mudança de variáveis  $x = \cos \theta$ ,  $x < 1$ . Com esta mudança a equação de Legendre torna-se

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + n(n+1)y = 0$$

ou de forma equivalente

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \frac{dy}{d\theta} \cot \theta + n(n+1)y = 0$$

Assim quando  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  a solução geral será

$$y = c_1 P_n(\cos \theta) + c_2 Q_n(\cos \theta)$$

**Exercício** - Considere a equação de Laplace  $\nabla^2 u = 0$ , expressa em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  onde  $u$  independe de  $\phi$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0$$

Admitindo uma solução do tipo  $u(r, \theta) = R(r) \Psi(\theta)$  determine as equações para  $R(r)$  e  $\Psi(\theta)$  e suas respectivas soluções.

**Solução** - Substituindo na equação  $u(r, \theta) = R(r) \Psi(\theta)$  e separando as variáveis temos

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\Psi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right)$$

Como o membro da esquerda depende apenas de  $r$  e o da direita apenas de  $\theta$ , ambos os membros deve ser igual a uma constante, digamos  $-\lambda^2$  e portanto temos:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\lambda^2, \quad \frac{1}{\Psi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) = \lambda^2$$

ou seja as equações tornam-se:

$$r^2 R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) - \lambda^2 (\sin \theta) \Psi = 0$$

A equação em  $R$  é a equação de Euler que pode ser resolvida fazendo  $R(r) = r^d$ . Substituindo na equação esta expressão de  $R$  temos

$$d = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{1/4 - \lambda^2}$$

Para simplificar a solução se fizermos

$$s = \frac{-1}{2} + \sqrt{1/4 - \lambda^2},$$

a outra raiz será

$$-s - 1 = \frac{-1}{2} - \sqrt{1/4 - \lambda^2},$$

e multiplicando ambas entre si segue que:

$$\lambda^2 = -s(s + 1)$$

Assim a solução para  $R$  torna-se

$$R(r) = c_1 r^s + \frac{c_2}{r^{s+1}}$$

Por outro lado substituindo a expressão de  $\lambda^2$  na outra equação temos

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + s(s+1)(\sin \theta) \Psi = 0$$

que é a equação de Legendre de ordem  $s$ . Quando  $s = n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  a solução geral será

$$y = c_3 P_n(\cos \theta) + c_4 Q_n(\cos \theta)$$

onde  $Q_n(\cos \theta)$  **não** é limitada quando  $\cos \theta = \pm 1$ , isto é quando  $\theta = k\pi$ , ao passo que  $P_n(\cos \theta)$  é um polinômio de grau  $n$  em  $\cos \theta$ .

Observe que se o problema exige solução limitada em  $-1 \leq x \leq 1$  o número real  $p$  só pode ser  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ , caso contrário a função  $P_p(x)$  vai ser limitada em  $x = 1$  mas não em  $x = -1$ .

Se no problema anterior admitirmos que  $u$  depende também de  $\phi$ , depois de separar as variáveis e usar o mesmo procedimento vamos obter uma equação um pouco diferente da anterior e que é chamada de *equação diferencial associada de Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$$

Consideraremos o caso quando  $m$  e  $n$  são inteiros não negativos, sendo que quando  $m = 0$  a equação se reduz na equação de Legendre. A solução geral desta equação é dada por

$$y = c_1 P_n^m(x) + c_2 Q_n^m(x)$$

onde  $P_n^m$  e  $Q_n^m(x)$  são as funções associadas de Legendre de grau  $n$  e de ordem  $m$  de primeira e segunda espécie, respectivamente. Quando  $|x| < 1$  estas funções são dadas por

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x)$$

Observe que quando  $m > n$ ,  $P_n^m(x) = 0$ . As funções  $Q_n^m(x)$  não são limitadas para  $x = \pm 1$ .

A substituição  $x = \cos \theta$  na equação associada transforma na equação

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dy}{d\theta} + [n(n+1) - m^2 \csc^2 \theta]y = 0$$

a qual é satisfeita por  $P_n^m(\cos \theta)$ ,  $Q_n^m(\sin \theta)$ .

**Exercício** - Obtenha as funções associadas de Legendre  $P_2^1(x)$  e  $P_3^2(x)$  e dê uma equação onde elas são soluções.



**Solução** - Usando a definição de  $P_n^m(x)$  temos

$$P_2^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} P_2(x),$$

Uma vez que  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ , substituindo nesta expressão e derivando vamos encontrar

$$P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2}$$

Esta função é uma solução da equação associada de Legendre para  $m = 1$ ,  $n = 2$ , ou seja solução de

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + [2 \cdot 3 - \frac{1^2}{1 - x^2}]y = 0$$

Por outro lado sendo

$$P_3^2(x) = (1 - x^2)^{2/2} \frac{d^2}{dx^2} P_3(x)$$

substituindo nesta expressão  $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$ , e derivando teremos

$$P_3^2(x) = 15x - 15x^3$$

função esta que é uma solução da equação

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + [3 \cdot 4 - \frac{2^2}{1 - x^2}]y = 0$$

### 16.2.2 *Série de Fourier-Legendre*

A equação de Legendre, que pode ser escrita como

$$-[(1 - x^2)y']' = \lambda y, \quad -1 < x < 1$$

é um caso especial da equação de Sturm-Liouville, onde.

$$p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1$$

Como nos extremos do intervalo temos  $p(-1) = p(1) = 0$  esta equação é singular e com as condições

$$y \text{ e } y' \text{ limitadas em } x \rightarrow \pm 1$$

temos um um PSL singular.

Como a **única** função de Legendre que é limitada quando  $x \rightarrow \pm 1$  são as de primeira espécie, isto é, os polinômios de Legendre para  $s = n$  inteiro, então temos a condição auto-adjunta vista anteriormente

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{L}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Esta condição é responsável pela ortogonalidade destes polinômios no intervalo  $-1 < x < 1$  com respeito a função peso  $r(x) = 1$ ; em outras palavras, que

$$\int_{-1}^1 1 \cdot P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Como a norma  $\|P_n(x)\|$  é relacionada por

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

a série de polinômios de Legendre de uma função  $f(x)$ ,  $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

é a série onde os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

De forma semelhante ao caso do PSL regular se  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas então a convergência da série acima ocorrerá para a função

$$[f(x^+) + f(x^-)]/2,$$

em todos os pontos do intervalo  $-1 < x < 1$ .

**Exercício** - Desenvolva a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

em série de Fourier-Legendre

**Solução** - Pela expressão de  $c_n$  acima temos

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 1 \cdot P_n(x) dx$$

Usando as expressões dos polinômios  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , ... obtidas anteriormente, segue que

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx = 1/2 \\ c_1 &= \frac{3}{2} \int_0^1 x dx = 3/4 \\ c_2 &= \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{3x^2 - 1}{2} dx = 0 \\ c_3 &= \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{5x^3 - 3x}{2} dx = -\frac{7}{16} \end{aligned}$$

e portanto temos a seguinte representação para a função  $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \dots$$

Podemos provar que a sequência de funções associadas de Legendre  $\{P_n^m(x)\}$  para  $m$  **fixo**, sendo  $m$  e  $n$  inteiros não negativos, são ortogonais no intervalo  $-1 < x < 1$  com respeito a função peso  $r(x) = 1$ , ou seja que

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0, \quad n \neq k$$

Uma vez que a norma é dada por

$$\|P_n^m(x)\|^2 = \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

podemos expandir uma função  $f(x)$  em série destas funções ou seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^m(x)$$

### Comentário -

- (1) Se  $\lambda \neq n(n+1)$  para qualquer inteiro  $n$  não negativo a única solução da equação de Legendre que é limitada nos pontos singulares  $x = \pm 1$  é a função trivial  $y(x) \equiv 0$ .
- (2) A única função de Legendre a qual é finita em  $x = \pm 1$  são os polinômios de Legendre  $P_s(x)$  para  $s$  inteiro.
- (3) Se o problema exigir soluções no domínio  $|x| > 1$  teremos uma solução semelhante (referência [12]).
- (4) Existem outras equações que surgem do método de separação de variáveis e que têm uma sequência de soluções polinomiais ortogonais num determinado intervalo com respeito a uma função peso. Dentre estas temos a equação de Hermite, equação de Laguerre e equação de Tchebyshev. Em caso de necessidade consulte a referência [4].

## 16.3 RESUMO

### 16.4 Exercícios Propostos

- (1) Se  $\phi_n(x)$  for uma sequência de autofunções dos problemas abaixo especifique a ortogonalidade destas autofunções com o intervalo e a função peso:

(a)  $\cos(x)y'' + \sin(x)y' + (\lambda + \cos^3(x))y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/3) = 0$   
 Resp:  $(\sec(x)y')' + (\lambda \sec^2(x) + \cos(x))y = 0,$

$$\int_0^{\pi/3} \phi_m(x) \phi_n(x) \sec^2(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

356

(b)  $xy'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y(1) = y(2) = 0$   
 Resp:  $(x^2 y')' + \lambda xy = 0,$

$$\int_1^2 x \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

(2) Se  $\phi_n(x)$  for uma sequência de soluções independentes do problema

$$(x^2 + 1)y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y'(-1) = y'(1) = 0$$

qual é o valor da integral abaixo?

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi_n(x) \phi_m(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, \quad m \neq n$$

(3) Uma placa circular de raio unitário tem suas faces planas isoladas. Se a temperatura inicial é  $f(\rho)$  e se o contorno for mantido a temperatura zero, determine a temperatura da placa em qualquer ponto e instante.

Sugestão: Como a temperatura é independente do ângulo  $\varphi$  a equação torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

Resp:

$$u(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{2}{J_1^2(\lambda_m)} \int_0^1 \rho f(\rho) J_0(\lambda_m \rho) d\rho \right] e^{-\lambda_m^2 t} J_0(\lambda_m \rho) \right\}$$

(4) Desenvolva a função  $f(x) = x^3$  em série de Fourier Bessel de primeira espécie e de primeira ordem no intervalo  $0 < x < 1$ .

(5) Considere a equação de Laplace em coordenadas esféricas em  $u(r, \theta, \phi)$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

onde a função  $u(r, \theta, \phi + 2\pi) = u(r, \theta, \phi)$ . Separe as variáveis  $u(r, \theta, \phi) = R(r) \Psi(\theta) \Phi(\phi)$  e resolva as três equações ordinárias.

Resp:

$$\begin{aligned} R(r) &= c_1 r^n + c_2 / r^{n+1}, \\ \Phi(\phi) &= c_3 \cos m\phi + c_4 \sin m\phi, \\ \Psi(\theta) &= c_5 P_n^m(\cos \theta) + c_6 Q_n^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

(6) Se  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$  obtenha a identidade de Parseval

$$\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{2n+1}$$

- (7) As vibrações transversais de uma membrana circular elástica delgada de raio unitário e fixada na borda obedecem a equação da onda, que em coordenadas polares é dada por:

$$a^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right) = u_{tt}; \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad t > 0$$

Admitindo que  $u$  satisfaça as condições

$$\begin{aligned} u(1, \theta, t) &= 0; \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(r, \theta, 0) &= f(r), \quad u_t(r, \theta, 0) = 0; \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \end{aligned}$$

onde por coerência impomos que  $f(1) = 0$ , determine a solução limitada em  $0 \leq r \leq 1$ .

Observação: Devido a simetria circular das condições impostas não dependerem da variável angular  $\theta$  é natural admitir que  $u$  seja função apenas de  $r$  e  $t$ .

Resp.  $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n a t)$ , sendo

$$c_n = \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr / \int_0^1 r [J_0(\lambda_n r)]^2 dr, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (8) A equação de Helmholtz

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = 0$$

em coordenadas polares torna-se

$$v_{rr} + (1/r) v_r + (1/r^2) v_{\theta\theta} + k^2 v = 0$$

- a) Se  $v(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$  mostrar que  $R$  e  $\Theta$  satisfazem as seguintes equações:

$$r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - \lambda^2) R = 0, \quad \Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0$$

- b) Achar a solução limitada no disco,  $v(r, \theta) = v(r, \theta + 2\pi)$ ,  $r < \rho$  que satisfaça a condição de contorno

$$v(\rho, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Resp:

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2} c_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) (b_m \sin m\theta + c_m \cos m\theta),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi J_m(k\rho)} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_m = \frac{1}{\pi J_m(k\rho)} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

358

(9) A EDO

$$(1 - x^2) y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \quad -1 < x < 1$$

onde  $\alpha$  é constante é chamada de equação de Tchebyshev (ou Chebyshev). Se  $\alpha$  for um inteiro não negativo há uma solução polinomial de grau  $n$  normalizada,  $T_n(x)$ , que é o polinômio de Tchebyshev.

- (a) Mostrar que esta equação pode ser escrita como  $-[(1 - x^2)^{1/2} y']' = \alpha^2 (1 - x^2)^{-1/2} y$ .
- (b) Com as condições de contorno  $y$  e  $y'$  limitadas quando  $x \rightarrow \pm 1$  mostre que este PSL singular é auto-adjunto.
- (c) Pode-se mostrar que os autovalores deste problema são  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Mostre que para as autofunções  $T_0, T_1, T_2, \dots$  temos

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{(1 - x^2)^{1/2}} dx = 0$$

## Chapter 17

# Integral de Fourier

**Finalidade:** Nos capítulos anteriores foi usado a série de Fourier para representar funções definidas no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , periódicas, ou não periódicas porém definidas num intervalo finito. Nos problemas de EDP resolvidos com domínio da variável espacial limitado o método de Fourier deu origem a um conjunto infinito, porém discreto, de autovalores e estes à autofunções sendo que uma série destas serviu como candidata a solução do problema. No entanto as funções **não** periódicas definidas num intervalo **não** limitado não podem assim serem representadas e o primeiro objetivo será descobrir uma representação adequada para este tipo de função. A Integral de Fourier surge como limite da representação de uma função em série de Fourier e a apresentação será puramente formal.

### 17.1 Como surge uma solução na forma integral?

Vamos abordar o aparecimento desta forma de solução num caso particular. Considere o problema da temperatura  $u(x, t)$  em uma haste isolada, com temperatura inicial  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, & x > 0, & t > 0 \\ u(0, t) &= 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & x \geq 0 \\ |u(x, t)| &< m, & 0 < x < \infty \end{aligned}$$

Supondo-se uma solução do tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

substituindo na equação dada, e separando as variáveis, temos as seguintes EDO

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0, & X(0) &= 0, & \lambda > 0 \\ T' + \lambda^2 T &= 0, & t > 0 \end{aligned}$$

onde o sinal da constante de separação de variáveis  $\lambda^2$ , foi escolhido de modo a fornecer **soluções limitadas** para  $X$  e  $T$ . Observe que o problema em  $X(x)$ , é um

360

PSL **singular** pois o domínio é semi-infinito. As soluções destas equações, sendo  $X(0) = 0$ , são:

$$\begin{aligned} X(x) &= B \operatorname{sen} \lambda x, \\ T(t) &= C e^{-\lambda^2 t}, \end{aligned}$$

e portanto, qualquer função da forma:

$$u(x, t) = B \operatorname{sen}(\lambda x) e^{-\lambda^2 t}$$

para  $B$  e  $\lambda$  constantes, satisfaz a EDP dada.

Diferentemente dos problemas até então apresentados com domínio **espacial finito**, por exemplo, em  $0 < x < L$ , onde a condição de contorno permitia valores admissíveis **discretos** para  $\lambda$  (autovalores), agora não temos tal condição. Consequentemente **todos** os valores reais de  $\lambda$  são admissíveis, e em vez de uma **soma** sobre um conjunto infinito discreto de valores de  $\lambda$ , parece plausível tomar uma **integral sobre**  $\lambda$ . Assim propomos como candidata à solução, a seguinte função

$$u(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x d\lambda$$

sendo  $B(\lambda)$  uma função a ser determinada. Se esta integral converge adequadamente de tal forma que possamos derivar sob o sinal de integração em relação a  $x$  e a  $t$  o suficiente de tal forma que a EDP é satisfeita, certamente teremos uma solução.

Note que formalmente que se derivarmos sob o sinal de integração temos

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -\lambda^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x d\lambda \\ u_{xx}(x, t) &= -\lambda^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x d\lambda \end{aligned}$$

e portanto a função  $u(x, t)$  definida acima por uma integral satisfaz a equação do calor

$$u_{xx} = u_t$$

Para concluir devemos determinar na expressão de  $u(x, t)$  a função  $B(\lambda)$ . Para tal ao usar a condição inicial,  $u(x, 0) = f(x)$ , temos a *equação integral*

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda, \quad x > 0$$

de onde devemos determinar  $B(\lambda)$ .

Assim a solução formal  $u(x, t)$  deste problema será portanto definida por integral imprópria, desde que a função  $B(\lambda)$  satisfaça a equação integral acima para  $f(x)$  conhecida. A solução deste tipo de equação é um dos objetivos deste capítulo.

Em termos comparativos com a série de Fourier (intervalo finito) a integral que define  $u(x, t)$  substitui a série de Fourier seno, e  $B(\lambda)$ , os coeficiente  $b_n \equiv b(n)$ .



Se o problema dado fosse no intervalo espacial **infinito**  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ , não tendo assim a condição de contorno  $u(0, t) = 0$ , e usando o mesmo procedimento do problema anterior, encontraremos

$$u(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda$$

Impondo a condição inicial do problema,  $u(x, 0) = f(x)$ , as funções  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  desta candidata a solução deverá satisfazer a seguinte equação integral:

$$f(x) = \int_{\lambda=0}^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda, \quad -\infty < x < \infty$$

Note a analogia que existe com a série de Fourier para funções periódicas: em vez de uma série infinita agora temos uma integral imprópria e, em vez dos coeficientes  $a_n \equiv a(n)$  e  $b_n \equiv b(n)$ , temos  $A(\lambda)$  e  $B(\lambda)$ .

### Comentários:

- (1) Observe que a separação de variáveis em problemas com domínio espacial infinito conduz a uma representação integral da solução, devido ao fato dos autovalores **não** serem discretos.
- (2) Estamos diante de um outro tipo de solução que estende o conceito de "combinação linear" de soluções: em vez da soma com respeito a um parâmetro inteiro  $n$ , temos uma integral com respeito a um parâmetro contínuo  $\lambda$ .

## 17.2 Representação de uma função em Integral de Fourier

Para representar uma função em integral de Fourier vamos considerar o espaço das funções que são **seccionalmente suaves** sobre cada **intervalo finito** e que seja **absolutamente integrável** em **todo** intervalo.

**Exemplo** - As funções  $e^{-x^2}$  e  $(x^2 + 1)^{-1}$  são absolutamente integráveis no intervalo  $-\infty < x < \infty$ , porém,  $x$ ,  $\sin x$  e  $1/\sqrt{x}$ , não são.

Funções absolutamente integráveis no intervalo  $(-\infty, \infty)$  **necessariamente** tem limite nulo quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . O teorema a seguir apresenta **condições suficientes** para a convergência.

**Teorema:** Se  $f$  é uma função **não** periódica definida em  $-\infty < x < \infty$ , **seccionalmente suave** em cada intervalo finito, e **absolutamente integrável** em  $(-\infty, \infty)$ , isto é existe  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  então:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \operatorname{sen} wx] dw,$$

362

é a **representação integral de Fourier** da função  $f$ , sendo

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx$$

**Exemplo** - Considere a função de *probabilidade Gaussiana*

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha > 0$$

Admitindo-se conhecida a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-b^2/(4\alpha)}$$

mostre que esta função particular satisfaz o teorema acima.

a) Determine  $A(w)$  e  $B(w)$ .

Desde que  $f$  é par temos  $B(w) = 0$ , e

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(wx) dx = \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}} e^{-w^2/(4\alpha)}$$

b) Mostre a convergência da integral.

Substituindo na integral acima as expressões obtidas de  $A(w)$  e  $B(w)$ , temos que

$$\int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw = \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-w^2/(4\alpha)} \cos wx dw = e^{-\alpha x^2}$$

e portanto recuperamos a função original. Como esta função é contínua, o lado direito desta expressão nada mais é do que

$$[f(x^+) + f(x^-)]/2$$

em cada ponto do intervalo, o que confirma o resultado do teorema.

**Exercício** - Determine a representação integral da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

e calcule o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(wa) \cos(wx)}{w} dw$$

**Solução** - Pelas expressões de  $A(w)$ ,  $B(w)$  temos

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx = 0, \text{ pois } f \text{ é par}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \cos wx dx = \frac{1}{\pi w} \sin wx \Big|_{-a}^a$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi w} [\sin wa - \sin(-wa)] = \frac{2}{\pi w} \text{sen } wa$$

Desde que  $f$  satisfaz as condições do teorema de convergência segue que

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi w} \text{sen}(wa) \right] \cos(wx) dw,$$

e portanto

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi w} \text{sen}(wa) \right] \cos(wx) dw = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 1/2, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Como o integrando é uma função par em  $w$ , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(wa) \cos(wx)}{w} dw = \begin{cases} \pi, & |x| < a \\ \pi/2, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

A partir deste resultado podemos obter o valor de outras integrais, por exemplo, se  $x = 0$  e  $a = 1$ , temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } w}{w} dw = \pi \quad \text{ou} \quad \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } w}{w} dw = \pi/2$$

pois o integrando é par.

Esta última integral é o limite da função *seno integral* definida por

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin w}{w} dw$$

quando  $w \rightarrow \infty$ .

Por este exercício note que se a função  $f(t)$ , definida no intervalo  $-\infty < x < \infty$ , satisfaz as condições do teorema e for **par** ou **ímpar**, tal como na série de Fourier temos as seguintes simplificações:

a) Se a função  $f$  for **par**,  $B(w) = 0$ , e temos a fórmula integral de Fourier **coseno**;

b) Se a função  $f$  for **ímpar**,  $A(w) = 0$ , e temos a fórmula integral de Fourier **seno**

364

**Exercício** - Encontre a representação integral na forma trigonométrica da função

$$f(x) = \begin{cases} k(L - |x|)/L, & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases}$$

**Solução** - Como  $f$  é uma função par a representação integral será em cossenos e portanto

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(wx) dx = 2 \int_0^L \frac{k}{L}(L - x) \cos(wx) dx$$

Integrando por partes obtemos

$$A(w) = \frac{2k}{Lw^2}(1 - \cos wL)$$

Como  $f$  é contínua em todo intervalo pelo teorema de convergência segue que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2k}{Lw^2} [1 - \cos(wL)] \cos(wx) dw = \frac{2k}{\pi L} \int_0^{\infty} \frac{[1 - \cos(wL)]}{w^2} \cos(wx) dw$$

**Exercício** - Encontre a representação integral da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$$

**Solução** - Como  $f$  é função **ímpar** temos apenas o coeficiente  $B(w)$ , onde

$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(wx) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(wx) dx$$

Integrando-se duas vezes por partes, obtemos

$$B(w) = \frac{2w}{\pi(1+w^2)}$$

Logo a função dada pode ser representada por

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx dw = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w}{1+w^2} \sin wx dw$$

A identidade existe em todos os pontos, exceto em  $x = 0$ , neste ponto ocorre a identidade apenas se a função for definida no ponto  $x = 0$  por  $f(0) = 0$ .

Tal como nas série de Fourier se a função for definida apenas para  $0 < x < \infty$  podemos fazer a extensão **par** ou **ímpar**. Neste caso quando a função for absolutamente integrável no intervalo  $0 < x < \infty$  e seccionalmente suave em cada intervalo finito, a integral que representa a função convergirá para

$$[f(x^+) + f(x^-)]/2$$

em todo ponto no intervalo  $0 < x < \infty$ . Para  $x < 0$  ela convergirá para a extensão da função. Em  $x = 0$ , a integral de Fourier **coseno** convergirá para  $f(0^+)$  e integral de Fourier seno, para **zero**.

**Exemplo** - Ache as representações integrais coseno e seno da função

$$f(x) = e^{-kx}, \quad k > 0, \quad x > 0$$

**Solução** - Fazendo as extensões par e ímpar desta função temos:

a) Extensão **par**

Segue que  $B(w) = 0$ , e portanto

$$e^{-kx} = \int_0^{\infty} A(w) \cos(wx) dw$$

onde a função  $A(w)$  é dada por

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kz} \cos(wz) dz$$

Calculando por partes esta integral temos

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{k^2 + w^2}$$

que após substituir na representação integral, segue

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k}{k^2 + w^2} \cos(wx) dw, \quad k > 0,$$

que é **válida** para  $x > 0$ .

Como em  $x = 0$  a função é contínua, então a integral de Fourier em cossenos representa a função também nesse ponto. Portanto a representação acima é válida para  $x \geq 0$  e isso pode ser verificado facilmente, pois em  $x = 0$ , temos:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k}{k^2 + w^2} dw = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{w}{k} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

e sendo  $e^0 = 1$ , a representação é mantida inclusive em  $x = 0$ .

b) Extensão **ímpar**

De modo semelhante ao caso anterior encontramos

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w}{k^2 + w^2} \operatorname{sen}(wx) dw, \quad x > 0, \quad w > 0$$

Diferentemente da representação em cossenos, esta última representação não é válida em  $x = 0$ . Substituindo nesta última expressão  $x$  por  $x = 0$ , o lado esquerdo é a unidade ao passo que o 2º membro torna-se zero. A razão disso é que em

366

$x = 0$  há uma descontinuidade e conseqüentemente a integral não convergirá para  $f(x) = e^{-kx}$  em  $x = 0$ , mas sim para a média

$$[f(0^+) + f(0^-)]/2 = [1 + (-1)]/2 = 0,$$

que é o valor do 2º membro na representação anterior.

### 17.3 Solução de problemas usando integral de Fourier

Em determinados problemas para se desprezar os efeitos do contorno usa-se considerar uma ou mais variáveis **espaciais** como sendo **não** limitadas. Em tais problemas o método de separação de variáveis geralmente conduz a um conjunto contínuo de autovalores. Uma integral sobre o correspondente conjunto de autofunções servirá então como solução formal do problema, sendo que os coeficientes  $A(w)$  e  $B(w)$  serão determinados usando a integral de Fourier.

Nos problemas em intervalos semi-infinitos,  $0 < x < \infty$ , com condições homogêneas em  $x = 0$ , e do tipo de Dirichlet ou Neumann usamos a integral de Fourier **seno** ou **coseno**.

Este método é basicamente igual ao de separação de variáveis onde no lugar de representar uma solução por uma série, desde que os autovalores são contínuos, vamos representar por uma integral. Para assimilar a técnica vamos resolver alguns problemas básicos.

#### 17.3.1 Problema de Condução de calor numa haste infinita

**Exercício** - Encontre a distribuição finita de temperatura  $u(x, t)$  numa barra ideal e infinita  $-\infty < x < \infty$  sendo que a distribuição inicial é dada por  $f(x)$ , ou seja, ache a solução do problema:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty \\ |u(x, t)| &< M \end{aligned}$$

**Solução** - Admitindo-se uma solução do tipo:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

separando as variáveis vamos encontrar as seguintes equações

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

onde a constante de separação de variáveis foi admitida como  $+\lambda^2$ ,  $\lambda > 0$ , pois estamos interessados apenas nas soluções limitadas. Resolvendo essas equações, vamos encontrar a solução:

$$u(x, t; \lambda) = X(x)T(t) = [D \cos(\lambda x) + E \operatorname{sen}(\lambda x)]e^{-\lambda^2 t}$$

onde  $0 < \lambda < \infty$ . Usando o princípio de superposição generalizado admitiremos a seguinte solução formal:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u(x, t; \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} [D(\lambda) \cos(\lambda x) + E(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x)] e^{-\lambda^2 t} d\lambda$$

Pela condição inicial temos:

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^{\infty} [D(\lambda) \cos(\lambda x) + E(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x)] d\lambda$$

e portanto os "coeficientes"  $D(\lambda)$ ,  $E(\lambda)$ , devem satisfazer

$$D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi$$

$$E(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi$$

Substituindo esses valores na expressão de  $u(x, t)$ , segue a solução

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi) e^{-\lambda^2 t} d\xi \right] d\lambda$$

Essa solução pode ser simplificada da seguinte forma. Admitindo-se que podemos trocar a ordem de integração, temos:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[ \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda (x - \xi) d\lambda \right] d\xi$$

Para avaliar a integral interna usamos o seguinte resultado

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \beta \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\beta^2/(4t)}, \quad t > 0$$

o qual fornece:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda (x - \xi) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-(x-\xi)^2/(4t)}$$

Substituindo este resultado na última expressão de  $u$  segue

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4t)} d\xi, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

que constitui a solução formal do problema. No próximo capítulo veremos que esta solução pode ser colocada em termos da propriedade de convolução.

Deve-se ressaltar que achamos simplesmente uma candidata a solução. Para provar que efetivamente é solução devemos verificar certas condições - o que será feito no final deste capítulo.

**Problema** - Determine a solução do problema de calor numa haste semi-infinita

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, & x > 0, & t > 0 \\ u(0, t) &= 0, & |u(x, t)| &< M \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

**Solução** - Admitindo-se uma solução do tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

temos que

$$\begin{aligned} X(x) &= \text{sen } wx \\ T(t) &= e^{-w^2 kt} \end{aligned}$$

onde  $w > 0$  são autovalores reais (positivos).

Desde que  $w$  não depende de  $x$  e  $t$ , o produto

$$C(w) \text{sen}(wx) e^{-w^2 kt}$$

também é solução onde  $C(w)$  é uma função que depende do parâmetro  $w$ . A "combinação linear generalizada" das funções XT para todo  $w$  positivo

$$u(x, t) = \int_0^\infty C(w) e^{-w^2 kt} \text{sen } wx \, dw, \quad x > 0$$

é uma solução formal se  $C(w)$ , satisfazendo a condição

$$u(x, 0) \equiv f(x) = \int_0^\infty C(w) \text{sen } wx \, dw,$$

quando pode ser determinada.

Das relações anteriores, desde que

$$C(w) = \int_0^\infty f(x) \text{sen } wx \, dx,$$

a solução formal torna-se

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-w^2 kt} \text{sen } wx \int_0^\infty f(\xi) \text{sen } w\xi \, d\xi \, dw$$

Invertendo a ordem de integração, usando a identidade

$$2 \text{sen } wx \text{sen } w\xi \equiv \cos w(x - \xi) - \cos w(x + \xi),$$

e a integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha \lambda^2} \cos \beta \lambda \, d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/(4\alpha)},$$



a solução acima para  $t > 0$  pode ser escrita como:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^\infty f(\xi) \left[ e^{-(x-\xi)^2/(4kt)} - e^{-(x+\xi)^2/(4kt)} \right] d\xi$$

Para  $f$  particular geralmente colocamos esta resposta em termos da função erro definida por:

$$\operatorname{erf}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-\eta^2} d\eta$$

### 17.3.2 Problema na Corda numa região infinita

**Exercício** - Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= 0, & -\infty < x < \infty \\ |u(x, t)| &< M \end{aligned}$$

**Solução** - Fazendo na equação  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , uma solução que satisfaz a condição  $u_t(x, 0) = 0$  é dada por:

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x)] \cos(\lambda at), \quad \lambda > 0$$

Usando o princípio de superposição generalizado vamos admitir como solução formal

$$u(x, t) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x)] \cos(\lambda at) d\lambda \quad (17.1)$$

Uma vez que  $u(x, 0) = f(x)$ , esta expressão fornece

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda \quad (17.2a)$$

onde os "coeficientes"  $A(\lambda)$  e  $B(\lambda)$  são dados por:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos \lambda v dv \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \operatorname{sen} \lambda v dv \end{aligned}$$

Inserindo estes resultados de  $A(\lambda)$  e  $B(\lambda)$ , a expressão da solução  $u(x, t)$  torna-se:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v) [\cos \lambda x \cos \lambda v + \operatorname{sen} \lambda x \operatorname{sen} \lambda v] \cos(\lambda at) dv d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos \lambda(x-v) \cos(\lambda at) dv d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v) [\cos \lambda(x+at-v) + \cos \lambda(x-at-v)] dv d\lambda \end{aligned}$$

Neste problema envolvendo equação hiperbólica podemos obter uma representação fechada para esta solução. Para tal usando as identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos A \cos B &\equiv \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ \sin A \cos B &\equiv \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)]\end{aligned}$$

a expressão 17.1, pode ser reescrita como

$$u(x, t) = \int_0^\infty \left\{ \frac{A(\lambda)}{2} [\cos \lambda(x+at) + \cos \lambda(x-at)] + \frac{B(\lambda)}{2} [\sin \lambda(x+at) + \sin \lambda(x-at)] \right\} d\lambda$$

Decompondo esta última integral e usando a identidade 17.2a a solução pode ser escrita simplesmente como:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)].$$

que é a solução de D'Alembert!

### Comentários

- (1) Invertemos a ordem de integração formalmente no entanto para garantir essa operação devemos ter convergência uniforme, o que nesse caso ocorre.
- (2) Como o método consiste na separação de variáveis e no princípio de superposição é indispensável que a o problema seja linear e a EDP **homogênea**.

### 17.3.3 Problema de Dirichlet num domínio infinito

**Exercício** - Encontre a solução do problema de Dirichlet no semi plano  $y > 0$

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad -\infty < x < \infty \\ u &\text{ é limitada quando } y \rightarrow \infty \\ u \text{ e } u_x &\text{ limitadas quando } |x| \rightarrow \infty\end{aligned}$$

**Solução:** Admitindo-se uma solução do tipo

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

separando as variáveis, temos:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$

Tomando-se a constante de separação de variáveis como sendo  $-\lambda^2$ , pois queremos solução finita, segue:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0; \quad \lambda > 0$$

cujas soluções para  $X(x)$  e  $Y(y)$ , são dadas por

$$\begin{aligned} X(x) &= a_1 \cos(\lambda x) + b_1 \operatorname{sen}(\lambda x) \\ Y(y) &= a_2 e^{\lambda y} + b_2 e^{-\lambda y}, \end{aligned}$$

Desta forma uma solução da EDP é dada por:

$$u(x, y) = [a_1 \cos(\lambda x) + b_1 \operatorname{sen}(\lambda x)] (a_2 e^{\lambda y} + b_2 e^{-\lambda y})$$

Como  $\lambda > 0$  o termo  $e^{\lambda y}$  é não limitado quando  $y \rightarrow \infty$ , e assim para manter  $u(x, y)$  limitada devemos tomar  $a_2 = 0$ , fornecendo:

$$u(x, y) = e^{-\lambda y} [A \cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x)]$$

Como não há restrição para  $\lambda > 0$ , podemos substituir  $A$  por  $A(\lambda)$ ,  $B$  por  $B(\lambda)$  e usar o princípio de superposição generalizado, tomando como candidata a solução a função

$$u(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda$$

A condição de contorno imposta  $u(x, 0) = f(x)$ , fornece

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda$$

onde, pela representação integral, temos que  $A(\lambda)$  e  $B(\lambda)$ , são dadas por:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(r) \cos \lambda r dr, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(r) \operatorname{sen} \lambda r dr$$

Substituindo na solução  $u(x, t)$  temos:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda=0}^\infty \int_{r=-\infty}^\infty e^{-\lambda y} f(r) \cos \lambda (r - x) dr d\lambda$$

Invertendo a ordem de integração este resultado pode ser escrito como:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{r=-\infty}^\infty f(r) \left[ \int_{\lambda=0}^\infty e^{-\lambda y} \cos \lambda (r - x) d\lambda \right] dr$$

Por meio de integração por partes, temos:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} \cos \lambda (r - x) d\lambda = \frac{y}{y^2 + (r - x)^2}$$

resultado este que permite escrever a solução formal como sendo

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{y}{y^2 + (r - x)^2} f(r) dr$$

**Pergunta:** O que acontece se a constante de separação de variáveis for  $\lambda^2$ , em vez de  $-\lambda^2$ ?

### 17.3.4 Problema de Dirichlet numa faixa infinita

**Exercício** - Encontre a solução do seguinte problema de Dirichlet na faixa  $0 < x < L$ ,  $y > 0$

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < L, \quad y > 0 \\ u(0, y) &= f_1(y), & y > 0 \\ u(L, y) &= f_2(y), & y > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < L \end{aligned}$$

**Solução** - Admitindo uma solução do tipo,  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , temos as EDOs

$$\begin{aligned} X'' - \lambda^2 X &= 0, & 0 < x < L, \quad \lambda > 0 \\ Y'' + \lambda^2 Y &= 0, & Y(0) = 0, \quad y > 0 \end{aligned}$$

cujas soluções para estas equações são dadas por:

$$X(x) = A \cosh(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad Y(y) = D \sin(\lambda y)$$

Usando o princípio de superposição generalizado, uma candidata à solução será a função

$$u(x, y) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cosh(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x)] \sin(\lambda y) d\lambda$$

As condições de contorno impostas,  $u(0, y) = f_1(y)$  e  $u(L, y) = f_2(y)$ , exigem que  $A(\lambda)$  e  $B(\lambda)$  satisfaçam as seguintes equações integrais

$$f_1(y) = \int_0^\infty A(\lambda) \sin(\lambda y) d\lambda$$

$$f_2(y) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cosh(\lambda L) + B(\lambda) \sin(\lambda L)] \sin(\lambda y) d\lambda$$

Estas são representações integrais de Fourier de  $f_1(y)$  e  $f_2(y)$ , respectivamente, e portanto

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_1(y) \sin(\lambda y) dy$$

$$A(\lambda) \cosh(\lambda L) + B(\lambda) \sin(\lambda L) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_2(y) \sin(\lambda y) dy$$

Desde que os segundos membros destas expressões são conhecidos, resolvendo este sistema para  $A(\lambda)$  e  $B(\lambda)$ , usando nestas duas integrais a variável de integração  $z$ , em vez de  $y$ , e substituindo na expressão de  $u(x, y)$ , obtemos:

$$u(x, y) = \int_0^\infty \left[ \frac{2 \cosh(\lambda x)}{\pi} \int_0^\infty f_1(z) \sin(\lambda z) dz + \frac{2 \sinh(\lambda x)}{\pi \sinh(\lambda L)} \int_0^\infty f_2(z) \sin(\lambda z) dz - \frac{2 \sinh(\lambda x) \cosh(\lambda L)}{\pi \sinh(\lambda L)} \int_0^\infty f_1(z) \sin(\lambda z) dz \right] \sin(\lambda y) dy$$

Agrupando os termos e usando identidades das funções hiperbólicas podemos escrever esta expressão como

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda y)}{\sin(\lambda L)} \left\{ \int_0^\infty [f_1(z) \sinh \lambda(L-x) + f_2(z) \sinh(\lambda x)] \sin(\lambda z) dz \right\} d\lambda$$

#### Comentários:

1- Neste problema se alterássemos as condições auxiliares a solução poderia ser dada apenas em termos da **Série de Fourier** e não da integral. Por exemplo, se elas fossem

$$u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 0, \quad y > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

ao separar as variáveis teremos autovalores **discretos**.

Este exemplo ilustra o fato que nem sempre a solução de problemas envolvendo EDP com variáveis **espaciais** num domínio **não limitado** é obtida usando a integral de Fourier.

2- Observe que o método de separação de variáveis e o princípio de superposição de soluções aplicado foi devido ao problema ser linear e homogêneo. Na próxima lição vamos tratar este problema de uma forma diferente usando a transformada de Fourier, o qual é válido inclusive quando a EDP for não homogênea.

### 17.4 Existência da solução na forma integral

Para verificar se uma solução formal, isto é, uma candidata a solução é efetivamente solução do problema, além de satisfazer as condições auxiliares deve satisfazer também a própria EDP. Como **derivaremos sob o sinal de integração** deve-se tomar certos cuidados pois isto nem sempre é possível. Por exemplo, a integral

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\lambda x)}{\lambda} d\lambda, \quad x > 0,$$

que aparece com muita frequência em aplicações, é convergente para  $x > 0$  (mas não converge uniformemente), no entanto se derivarmos formalmente sob o sinal de integração temos:

$$\int_0^\infty \cos(\lambda x) dx$$

que é divergente e conseqüentemente não representa a função  $F'(x)$ .

**I - Condições suficientes para a derivar sob o sinal de integração**

Seja  $f(x, y)$  uma função **contínua**, e admitimos que a integral

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

seja convergente (finita):

a) Se a integral **converge uniformemente** no intervalo  $\alpha \leq x \leq \beta$ , então  $\psi(x)$  é **contínua**;

b) Se  $f$  tem **derivada parcial  $f_x$  contínua** e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, y) dy$$

**converge uniformemente**, então a função  $\psi(x)$  é derivável e

$$\psi'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, y) dy,$$

ou seja podemos derivar **sob o sinal de integração** [14].

**II - Condição suficiente para ocorrer a convergência uniforme - Teste de Weierstrass.**

Se para  $\alpha \leq x \leq \beta$ , existe uma função  $M(y)$ , tal que  $|f(x, y)| \leq M(y)$ , e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(y) dy$$

existe, então a integral

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

**converge uniformemente e absolutamente.**

**Exercício** - Mostre que a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt$$

converge uniformemente em  $x \geq 1$ . e que podemos derivar em relação a  $x$  sob o sinal de integração.

**Solução** - De fato, sendo,  $0 \leq e^{-xt^2} \leq e^{-t^2} = M(t)$ , a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

pelo teste de comparação com a integral  $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ , existe e portanto a convergência é uniforme. Logo a integral definida por  $\psi(x)$ ,

$$\psi(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2} dt$$

define uma função contínua.

Por outro lado, a integral,

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt^2}) dt = - \int_0^\infty t^2 e^{-xt^2} dt$$

também converge uniformemente, desde que,  $0 \leq t^2 e^{-xt^2} \leq t^2 e^{-t^2} < e^{-t}$ , para  $x \geq 1$ , e  $t$  suficientemente grande.

**Exercício** - Considere a integral

$$\psi(y) \equiv \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(xy) dx$$

Usando o seguinte resultado:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2,$$

ou seja  $\psi(0) = \sqrt{\pi}/2$  :

- a) verifique a convergência;
- b) derive desta integral e obtenha uma EDO de 1ª ordem;
- c) resolva esta EDO e encontre o valor da integral acima.

**Solução** - Esta integral converge, e converge uniformemente pois para todo  $y$  temos que

$$|e^{-x^2} \cos(xy)| \leq e^{-x^2} \equiv M(x)$$

e pelo teste de Weierstrass, desde que,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

existe, a integral dada converge uniformemente. Como consequência e devido ao fato do integrando ser uma função contínua, segue que a função  $\psi(y)$ ,

$$\psi(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(xy) dx$$

também é contínua.

Também podemos derivar em relação a  $y$  sob o sinal de integração, pois sendo,

$$|xe^{-x^2} \sin(xy)| \leq xe^{-x^2} = M_1(x)$$

376

e

$$\int_0^{\infty} M_1(x) dx \equiv \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = 1/2$$

e usando novamente o teste de Weierstrass, a série obtida pela derivação em relação a  $y$  converge uniformemente e assim podemos derivar sob o sinal de integração obtendo

$$\psi'(y) = - \int_0^{\infty} x e^{-x^2} \sin(xy) dx$$

Integrando por partes esta última integral a função  $\psi$ , satisfaz a seguinte EDO:

$$\psi'(y) + \frac{y}{2} \psi(y) = 0$$

Resolvendo esta equação, encontramos que

$$\psi(y) = C e^{-y^2/4},$$

e portanto  $\psi(0) = C$ . Mas pela definição da função  $\psi(y)$ , temos  $\psi(0) = \sqrt{\pi}/2$  e portanto

$$\psi(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-y^2/4}$$

Segue deste resultado que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xy) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2/4}$$

Tal como na série de Fourier quando resolvemos a **equação do calor** vamos encontrar na integral de Fourier um integrando que contém uma função exponencial decrescente como na expressão

$$U(x, t; \lambda) \equiv [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t}$$

Para analisar a existência da solução precisamos verificar a convergência uniforme tanto da integral

$$\int_0^{\infty} U(x, t; \lambda) d\lambda,$$

como nas integrais cujos integrando são  $U_{xx}(x, t; \lambda)$  e  $U_t(x, t; \lambda)$ .

Se existe  $C$  tal que  $|A(\lambda)| < C$  e  $|B(\lambda)| < C$ , a integral poderá ser diferenciada sob o sinal de integração qualquer número de vezes em relação a  $x$  e  $t$ , pois nestes casos temos convergência uniforme devido a presença do fator  $e^{-\lambda^2 t}$  no integrando. A integral e suas derivadas com respeito a  $x$  ou a  $t$  convergem uniformemente em  $t \geq t_0 > 0$ .



Para outros tipos de equação este resultado pode ser adequado respeitando a convergência uniforme, como no exemplo a seguir.

**Exercício** - Considere a EDP:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Admitindo-se que  $c(\lambda)$  é contínua, limitada e absolutamente integrável mostre que:

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} c(\lambda) e^{-\lambda y} \operatorname{sen}(\lambda x) d\lambda$$

é solução desta EDP.

**Solução - a)** As funções:

$$U(x, y; \lambda) = e^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x$$

satisfazem a equação e são contínuas em  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**b)** Pelas condições sobre  $c(\lambda)$ , temos que:

$$\int c(\lambda) U(x, y; \lambda) d\lambda$$

é convergente pois esta integral é absolutamente integrável devido ao fato que:

$$\left| \int_0^{\infty} c(\lambda) e^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x dx \right| \leq \int_0^{\infty} |c(\lambda)| d\lambda < \infty$$

Devido a continuidade do integrando e da convergência uniforme da integral,  $u(x, t)$  é contínua em  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**c)** Como

$$|c(\lambda)| \leq c_0$$

para  $y \geq y_0 > 0$ , temos que:

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [c(\lambda) e^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda \right| \leq \int_0^{\infty} |c(\lambda) \lambda e^{-\lambda y} \cos \lambda x| d\lambda$$

Assim o valor absoluto do último integrando não excede a constante

$$c_0 \lambda e^{-\alpha y_0}$$

que independe de  $x$  e  $y$ . Logo a integral converge uniformemente e assim ela é diferenciável com respeito a  $x$ .

De modo similar a integral é diferenciável duas vezes em relação a  $x$  e duas vezes em relação a  $y$  e portanto:

$$Lu = \nabla^2 u = \int_0^{\infty} c(\lambda) \nabla^2 [e^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x] d\lambda = 0 \quad ; \quad x > 0, y > 0$$

**Comentário** - Dizemos que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

converge *absolutamente* se  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$  converge. Se  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  converge, porém,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

diverge, então  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  é dita *convergir condicionalmente*.

Podemos mostrar que se  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$  converge, então,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  também converge

## 17.5 RESUMO

As SF são usadas para representar ou uma função periódica definida em  $R$ , ou uma função não periódica porém definida num intervalo **finito**. Em ambos os casos o espectro, isto é, os autovalores são discretos. Se a função for definida num intervalo infinito e não periódica a representação será na forma integral segundo o seguinte resultado:

Se  $f$  é uma função real **não** periódica definida em  $-\infty < x < \infty$ , **seccionalmente suave** em cada intervalo finito, e **absolutamente integrável** em  $(-\infty, \infty)$ , isto é existe  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ , então:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx]dw,$$

é a **representação integral de Fourier** da função  $f$ , sendo que

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx$$

Se a função  $f$  for **par**,  $B(w) = 0$  e temos a integral de Fourier coseno, e se for **ímpar**,  $A(w) = 0$ , a representação será integral de Fourier seno.

Tal como nas série de Fourier se a função for definida apenas no intervalo  $0 < x < \infty$  podemos fazer a extensão **par** ou a **ímpar**. Neste caso quando a função for absolutamente integrável no intervalo  $0 < x < \infty$  e seccionalmente suave em cada intervalo finito, a integral que representa a função convergirá para

$$[f(x^+) + f(x^-)]/2$$

em todo ponto no intervalo  $0 < x < \infty$ . Para  $x < 0$  ela convergirá para a extensão da função. Em  $x = 0$ , a integral de Fourier **coseno** convergirá para  $f(0^+)$  e integral de Fourier seno, para **zero**.

Tal como na representação em série, nestes casos para verificar se uma solução formal  $u(x, y)$  de um problema envolvendo EDP é efetivamente solução, além de satisfazer as condições auxiliares deve satisfazer também a própria EDP. Para tal precisamos analisar a convergência da integral e se possamos derivar **sob o sinal de integração**.

### I - Condições suficientes para a derivar sob o sinal de integração

Seja  $f(x, y)$  uma função **contínua**, e admitimos que a integral

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

seja convergente:

a) Se a integral **converge uniformemente** no intervalo  $\alpha \leq x \leq \beta$ , então  $\psi(x)$  é **contínua**;

b) Se  $f$  tem **derivada parcial  $f_x$  contínua** e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, y) dy$$

**converge uniformemente**, então a função  $\psi(x)$  é derivável e

$$\psi'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, y) dy,$$

ou seja podemos derivar **sob o sinal de integração** [14].

### II - Condição suficiente para ocorrer a convergência uniforme - Teste de Weierstrass.

Se para  $\alpha \leq x \leq \beta$ , existe uma função  $M(y)$ , tal que  $|f(x, y)| \leq M(y)$ , e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(y) dy$$

existe, então a integral

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

**converge uniformemente e absolutamente.**

## 17.6 Exercícios propostos

- (1) Dada a função  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$

e usando a integral de Fourier em cosenos, mostre que:

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda$$

- (2) Mostre que a representação integral de Fourier coseno da função  $f(x)$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases},$$

nos pontos de continuidade, é:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \cos \lambda - \cos 2\lambda - 1}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda$$

- (3) Considere a função  $f(x) = e^{-kx^2}$ ,  $k > 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Determine a representação integral trigonométrica desta função seguindo as seguintes etapas.
- Derive a expressão de  $A(\lambda)$  sob o sinal de integração;
  - Integre por partes a expressão obtida nesta derivação obtendo uma EDO para  $A(\lambda)$ ;
  - Usando o resultado  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\pi/k}$  resolva a EDO anterior;
  - Com os resultados anteriores comprove que

$$e^{-kx^2} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2/(4k)}}{\sqrt{k\pi}} \cos \lambda x d\lambda$$

- (4) Resolva o seguinte problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < L, \quad y > 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 0, \quad y > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

e verifique que a solução é dada em termos da série de Fourier e não da integral.

- (5) Considere o problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & x > 0, \quad 0 < y < 1 \\ u_x(0, y) &= 0, \quad u_y(x, 0) = 0 & 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x < \infty \\ u(x, 1) &= f(x) & 0 \leq x < \infty \\ |u(x, y)| &< M \end{aligned}$$

- Separe as variáveis
- Mostre que  $u(x, y) = A(\lambda) \cos \lambda x \cosh \lambda y$ ,  $0 \leq \lambda$  é uma solução finita satisfazendo  $u_x(0, y) = u_y(x, 0) = 0$

- (c) Use o princípio de superposição generalizado e mostre que a solução do problema é:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x \cosh \lambda y}{\cosh \lambda} \left[ \int_0^\infty f(\xi) \cos \xi \lambda d\xi \right] d\lambda$$

- (d) Se  $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$  mostre que:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x \cosh \lambda y \operatorname{sen} \lambda}{\lambda \cosh \lambda} d\lambda$$



## Chapter 18

# Transformada de Fourier

**Finalidade** - No capítulo anterior resolvemos alguns problemas envolvendo EDPs com domínio espacial **não** limitado usando o método de separação de variáveis. No entanto existe um procedimento mais direto onde não se usa separar as variáveis, trata-se do método da Transformada de Fourier (TF). A finalidade aqui será definir e apresentar as principais propriedades desta transformada para que, no próximo capítulo, possamos resolver alguns problemas usando esta técnica.

Como este capítulo é uma continuação natural do anterior vamos admitir em todo ele, exceto dito ao contrário, que a função real  $f$  está definida no intervalo  $-\infty < x < \infty$  com as seguintes condições:

- $f$  é seccionalmente suave em cada intervalo finito;
- $f$  é absolutamente integrável em  $-\infty < x < \infty$

Com estas condições (suficientes) a convergência da representação integral se dará para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ , que denotaremos simplesmente por  $f(x)$ .

### 18.1 Formas Equivalentes da Representação Integral

Foi visto que uma função **real**  $f(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , pode ser decomposta como

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)] dw, \quad -\infty < t < \infty \quad (18.1)$$

que é a **representação de Fourier** da função  $f(t)$ , sendo

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(wx) dx \quad (18.2)$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(wx) dx \quad (18.3)$$

Substituindo estas expressões de  $A(w)$ ,  $B(w)$  na representação de  $f(t)$  temos

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos wt \cos wx + \sin wt \sin wx) dx \right] dw$$

384

que simplificando fornece a identidade

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos w(x-t) dx \right] dw,$$

chamada de identidade de Fourier.

A partir deste resultado podemos obter uma outra identidade equivalente da seguinte forma:

Como  $\cos w(x-t)$  é função **par** e  $\sin w(x-t)$  é **ímpar** na variável  $w$ , temos que:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos w(x-t) dx \right] dw$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin w(x-t) dx \right] dw$$

Multiplicando-se esta última expressão por  $-i$  e somando membro a membro estas duas expressões temos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \right] e^{iwt} dw \quad (18.4)$$

que é a *identidade da integral de Fourier* da função real  $f$  na representação complexa.

Se definirmos

$$F(w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx, \quad -\infty < w < \infty \quad (18.5)$$

então a representação de Fourier da função  $f$ , será

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw, \quad -\infty < t < \infty \quad (18.6)$$

Por analogia com a série de Fourier esta expressão é chamada de *expansão integral de Fourier* de  $f(t)$ .

Reciprocamente partindo desta representação complexa vamos obter a identidade de Fourier anterior e portanto estas duas formas são equivalentes .

A função  $F(w)$  assim definida é chamada de *transformada de Fourier* da função  $f(x)$ , ou *integral de Fourier* e é simbolizada por  $\mathcal{F}[f(t)]$  :

$$F(w) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \quad (18.7)$$



De modo semelhante conhecendo  $F(w)$  usa-se o símbolo  $\mathcal{F}^{-1}$  para denotar a operação inversa. Assim a função  $f(t)$ , indicada por

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw, \quad (18.8)$$

é a *transformada de Fourier inversa* de  $F(w)$ .

A função  $f(t)$  é real mas a sua transformada  $F(w)$ , em geral é complexa e pode ser escrita como:

$$F(w) = R(w) + iX(w) = |F(w)|e^{i\phi(w)}$$

Quando a variável  $t$  for o tempo esta função recebe, o nome de *função espectral* ou *densidade espectral* da função  $f$ . O gráfico de  $|F(w)|$  é chamado de *espectro de amplitude* de  $f$ , e  $\phi(w)$  o seu *espectro de fase*.

**Exercício** - Encontre a TF da função  $f(t) = e^{-|t|}$

**Solução** - Desde que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt$$

temos:

$$F(w) = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-iw)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(1+iw)} dt$$

Logo

$$F(w) = \frac{1}{1-iw} e^{t(1-iw)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{1+iw} e^{-t(1+iw)} \Big|_0^{\infty}$$

ou seja:

$$F(w) = \frac{2}{1+w^2} \quad \blacktriangleleft$$

**Observação:** Sob outro ponto se conhecemos apenas o resultado

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt = \frac{2}{1+w^2},$$

qual a função  $f(t)$  que satisfaz esta equação integral?

Pelo que foi visto esta função pode ser obtida resolvendo a seguinte integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+w^2} e^{iwt} dw$$

**Exercício** - Encontre a TF da função pulso retangular  $p_d(t)$  definida por

$$p_d(t) = \begin{cases} 1, & |t| < d/2 \\ 0, & |t| > d/2 \end{cases}$$

**Solução** - Por meio da definição tem-se:

$$\begin{aligned} F(w) &= \mathcal{F}\{p_d(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_d(t)e^{-iwt} dt \\ F(w) &= \int_{-d/2}^{d/2} e^{-iwt} dt = \frac{-1}{iw} e^{-iwt} \Big|_{-d/2}^{d/2} \\ F(w) &= \frac{1}{iw} [e^{iwd/2} - e^{-iwd/2}] = \frac{2}{w} \operatorname{sen}\left(\frac{wd}{2}\right) \end{aligned}$$

que pode ser escrita como:

$$F(w) = d \frac{\operatorname{sen}(wd/2)}{(wd)/2}$$

A representação integral torna-se:

$$p_d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \operatorname{sen}(wd/2)}{wd/2} e^{iwt} dw = \frac{d}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(wd/2)}{wd/2} \cos(wt) dw$$

Se fixarmos,  $d = 2$ , temos:

$$p_d(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} w}{w} \cos(wt) dw \quad \blacktriangleleft$$

**Exercício** - Encontre a TF da função

$$f(t) = h(t) e^{-t}$$

onde  $h(t)$  é a função degrau unitária definida por

$$h(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

**Solução** - Pela definição de transformada de Fourier temos:

$$\mathcal{F}\{e^{-t}h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t}h(t)]e^{-iwt} dt$$

Pela definição da função degrau segue que

$$\mathcal{F}\{e^{-t}h(t)\} = F(w) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-iwt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1+iw)} dt$$

Resolvendo esta última integral temos:

$$F(w) = \frac{1}{1+iw} \quad \blacktriangleleft$$

### Comentários

- (1) A decomposição da representação integral de  $f$  pode ser de outras formas, por exemplo, em vez do fator  $1/(2\pi)$  podemos colocar  $1/\sqrt{2\pi}$  tanto como fator da integral que define  $f(t)$  como na que define  $F(w)$ .
- (2) Alguns autores, [1] e [6] usam  $e^{iwt}$  na transformada direta e  $e^{-iwt}$  na transformada inversa.
- (3) Uma função do tempo pode ser visualizada em um osciloscópio, enquanto que seu espectro (função da frequência) pode ser analisado num espectroscópio
- (4) Funções tais como  $f(x) = C$ ,  $\sin x$ ,  $e^x$ ,  $x^2$  não são absolutamente integrável (necessariamente uma função absolutamente integrável deve ter o limite  $x \rightarrow \pm\infty$  igual a **zero**, o que não é o caso) e portanto não se garante a representação integral destas funções.
- (5) Podemos dar a seguinte interpretação para o par (18.5) e (18.6) quando  $t$  for o tempo: Dada qualquer função temos dois modos diferentes de representação, um no domínio do tempo  $f(t)$ , e outro domínio da frequência  $F(w)$ . A equação (18.5) transforma uma função  $f(t)$  no domínio de tempo em sua equivalente  $F(w)$  no domínio da frequência e (18.6) reverte o processo. Se  $f$  for contínua podemos dizer que  $F(w)$  representa  $f(t)$  pois  $f(t)$  pode ser recuperada de uma única maneira a partir de  $F(w)$ , por meio da expressão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw$$

Com este espírito não consideraremos  $F(w)$  como função diferente de  $f(t)$ , mas dizemos preferencialmente que  $F(w)$  é  $f(t)$  na representação por meio da transformada de Fourier.

- (6) Para determinar a integral que define  $F(w)$  usa-se por vezes o cálculo de resíduos [6].
- (7) A identidade 18.4 pode ser usada inclusive quando a função  $f(t)$  for complexa.
- (8) Pode-se provar, ref.[14], que se  $f(t)$  é absolutamente integrável no eixo todo, então  $F(w)$  é contínua para todo  $w$  e converge para zero quando  $|w| \rightarrow \infty$
- (9) Se o espaço fosse das "funções generalizadas", as quais contém a função delta como caso particular, a condição de integrabilidade absoluta poderia ser enfraquecida [17]. Contudo manteremos esta restrição, a não ser se especificado em caso contrario .

### 18.2 Transformada de Fourier Seno e Coseno

Se  $f(t)$  é real e definida **apenas** no intervalo  $0 < t < \infty$  para usar representação conhecida, que é válida no intervalo  $-\infty < x < \infty$ , precisamos estender  $f$  para  $t$  negativo. Temos dois importantes casos:

**1<sup>o</sup> Caso - Extensão par**

Se admitirmos  $f(-t) = f(t)$  e se esta extensão satisfizer o teorema da integral de Fourier, nos pontos de continuidade de  $f$ , temos

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f(x) \cos(wx) dx \right] \cos(wt) dw \quad (18.9)$$

Se definirmos:

$$F_c(w) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(wt) dt, \quad w > 0 \quad (18.10)$$

temos a seguinte representação para  $f$  :

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(w) \cos(wt) dw, \quad t > 0 \quad (18.11)$$

A expressão de  $F_c(w)$  é chamada de *TF coseno* e denotada por

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(w), \quad (18.12)$$

enquanto que  $f(t)$ , que é a *TF coseno inversa*, por:

$$\mathcal{F}_c^{-1}[F_c(w)] = f(t) \quad (18.13)$$

Deve-se ter cuidado na convergência quando  $t = 0$  pois a integral que representa a função converge para  $f(0^+)$ .

**2<sup>o</sup> Caso - Extensão ímpar**

Se admitirmos  $f(-t) = -f(t)$ , e se esta extensão satisfizer o teorema da integral de Fourier, nos pontos de continuidade de  $f$  temos:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(wx) dx \right] \operatorname{sen}(wt) dw \quad (18.14)$$

Se definirmos:

$$F_s(w) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt) dt, \quad w > 0 \quad (18.15)$$

temos a seguinte representação para  $f$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(w) \operatorname{sen}(wt) dw, \quad t > 0 \quad (18.16)$$

A expressão (18.34) é chamada de *TF seno* de  $f(t)$ , e indicada por

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(w),$$

enquanto que (18.16) é a de *TF seno inversa* de  $F_s(w)$  e denotada por

$$\mathcal{F}_s^{-1}[F_s(w)] = f(t)$$

Devido a extensão ser ímpar, quando  $t = 0^+$  a integral que representa a função deve convergir para zero.

**Exercício** - Encontre as transformadas de Fourier seno e coseno da função:

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad t \geq 0$$

**Solução** - Pela definição temos

$$F_s(w) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} wt \, dt$$

Integrando por partes, segue:

$$F_s(w) = \left[ -e^{-\alpha t} \frac{\cos wt}{w} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{w} e^{-\alpha t} \cos wt \, dt,$$

que integrando por partes novamente, temos

$$F_s(w) = \frac{1}{w} - \frac{\alpha}{w} \left[ e^{-\alpha t} \frac{\operatorname{sen} wt}{w} \right]_0^{\infty} - \frac{\alpha^2}{w^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} wt \, dt$$

Desde que a última integral é a própria TF seno de  $f(t)$ , segue

$$F_s \left( 1 + \frac{\alpha^2}{w^2} \right) = \frac{1}{w}$$

e portanto

$$F_s(w) = \frac{w}{\alpha^2 + w^2}$$

De modo similar encontramos que

$$F_c(w) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + w^2} \quad \blacktriangleleft$$

Estas integrais também podem ser obtidas escrevendo as funções seno e coseno na forma exponencial, ou seja:

$$F_c(w) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos wt \, dt = \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-iwt} \, dt \right],$$

$$F_s(w) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} wt \, dt = \operatorname{Im} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-iwt} \, dt \right]$$

A maioria das propriedades da TF são justificadas a partir da definição. São úteis pois permitem determinar a TF de uma ampla classe de funções de uma forma indireta.

### 18.3 Propriedades da transformada de Fourier

Nesta seção admitiremos por hipótese que as TFs das funções **reais** envolvidas existam.

**Propriedade 1** - A transformada  $F(w)$  pode ser decomposta como

$$F(w) = R(w) + iX(w)$$

onde:

$$\text{a) } R(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos wt \, dt, \quad X(w) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen } wt \, dt$$

$$\text{b) } R(w) \text{ é par, } X(w) \text{ é ímpar}$$

**Consequência** - Se  $f$  é par então  $F(w)$  é par e se  $f$  é ímpar então  $F(w)$  será ímpar.

**Propriedade 2** -  $F(-w) = \overline{F(w)}$  se e só se  $f(t)$  for real.

**Propriedade 3** - O espectro de amplitude  $|F(w)|$  é **par** e o espectro de fase  $\phi(w)$  é **ímpar**.

**Sugestão:** Use  $F(-w) = \overline{F(w)}$  e  $F(w) \equiv |F(w)|e^{i\phi(w)}$

**Propriedade 4** - Se a TF  $F(w)$  de uma **função real**  $f(t)$  é **real**, então  $f(t)$  é uma **função par**, e se  $F(w)$  é **imaginário puro**, então  $f(t)$  é **ímpar**.

**Propriedade 5** - Se  $a$  e  $b$  são constantes reais

$$\mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathcal{F}[f_1(t)] + b\mathcal{F}[f_2(t)],$$

ou seja a transformada de Fourier é linear.

**Propriedade 6** - Se  $a$  é uma constante real não nula e  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$  então

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(w/a)$$

**Consequência:**  $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-w)$

**Sugestão:** Analise separadamente os casos  $a > 0$  e  $a < 0$

**Propriedade 7** - Se  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$  então

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(w)e^{-iw_0t}$$

**Propriedade 8** - Se  $w_0$  é uma constante real e  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$  então:

$$\mathcal{F}[f(t)e^{iw_0t}] = F(w - w_0)$$

**Exercício** - Se  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$  encontre a TF da função  $f(t) \cos w_0t$ .

**Solução** - Usando a identidade.

$$\cos w_0 t \equiv \frac{1}{2} (e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t}),$$

aplicando esta propriedade e a propriedade linear, temos :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cos w_0 t] &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t)e^{iw_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t)e^{-iw_0 t}] \\ \mathcal{F}[f(t) \cos w_0 t] &= \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

**Propriedade 9** - Se  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$  então

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-w)$$

Este resultado é conhecido como *propriedade da simetria*.

**Exercício** - Encontre a TF da função

$$f(t) = (\text{sen } at) / (\pi t)$$

**Solução** - Anteriormente determinamos

$$\mathcal{F}\{p_d(t)\} = \frac{2}{w} \text{sen} \left( \frac{wd}{2} \right)$$

onde:

$$p_d(t) = \begin{cases} 1, & |t| < d/2 \\ 0, & |t| > d/2 \end{cases}$$

Por meio desta última propriedade segue que

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{2}{t} \text{sen} \frac{dt}{2} \right\} = 2\pi p_d(-w)$$

ou

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\text{sen } dt/2}{\pi t} \right\} = p_d(-w) = p_d(w)$$

pois  $p_d$  é uma função par. Se fizermos  $d/2 = a$  segue:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\text{sen } at}{\pi t} \right\} = p_{2a}(w) \quad \blacktriangleleft$$

**Propriedade 10** - Seja  $f(t)$  uma função é contínua e  $f'$  seccionalmente contínua em cada intervalo finito  $(-\infty, \infty)$ . Se  $f$  e  $f'$  são absolutamente integráveis em  $(-\infty, \infty)$  ( $f \rightarrow 0$ , quando  $|t| \rightarrow \infty$ ) então

$$\mathcal{F}[f'(t)] = iwF(w) = iw\mathcal{F}[f(t)]$$

Com condições adequadas esta propriedade pode ser generalizada para derivadas de ordens superiores, por exemplo:

Sejam  $f(t)$  e  $f'(t)$  contínuas em  $(-\infty, \infty)$  e  $f''(t)$  seccionalmente contínua em cada intervalo finito. Se estas três funções são absolutamente integráveis em  $(-\infty, \infty)$  então:

$$\mathcal{F}[f''(t)] = (iw)^2 F(w) = -w^2 \mathcal{F}[f(t)]$$

**Observações:**

- (1) Não precisamos das condições  $f$  e  $f' \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , pois elas estão implícitas devido ao fato destas funções serem absolutamente convergentes.
- (2) Se  $f$  não é contínua a TF é dada em termos da função delta de Dirac [10].

**Propriedade 11 - Transformada de Fourier coseno**

Seja  $f(t)$  real e  $f$  e  $f'$  contínuas no intervalo  $t \geq 0$  e  $f''$  seccionalmente contínua sobre cada intervalo finito. Se estas três funções são absolutamente integráveis neste intervalo então:

$$\mathcal{F}_c[f''(t)] = -w^2 F_c(w) - f'(0^+)$$

**Prova** - Pela definição da TF coseno, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c[f''(t)] &= \int_0^{\infty} f''(t) \cos wt \, dt \\ &= f'(t) \cos wt \Big|_0^{\infty} + w \int_0^{\infty} f'(t) \operatorname{sen} wt \, dt \end{aligned}$$

Integrando-se por partes novamente:

$$\mathcal{F}_c[f''(t)] = -f'(0^+) + w f(t) \operatorname{sen} wt \Big|_0^{\infty} - w^2 \int_0^{\infty} f(t) \cos wt \, dt$$

que fornece:

$$\mathcal{F}_c[f''(t)] = -f'(0^+) - w^2 F_c(w)$$

**Propriedade 12 - Transformada de Fourier seno**

Sob as mesmas condições e admitindo que exista a TF seno temos uma propriedade semelhante para a transformada de Fourier seno

$$\mathcal{F}_s[f''(t)] = w f(0^+) - w^2 F_s(w)$$

onde a prova é deixada como exercício.



As transformadas de Fourier seno e coseno são úteis ao tratar de problemas envolvendo EDP com variável espacial  $x > 0$ , com condições de contorno **unicamente** no ponto  $x = 0$ .

**Propriedade 13** - Se  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$  então

$$\mathcal{F}[-itf(t)] = \frac{dF(w)}{dw}$$

**Nota** - Este resultado pode ser generalizado para

$$F^{(k)}(w) = (-i)^k \mathcal{F}[t^k f(t)] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde devemos impor que a função  $t^k f(t)$  seja absolutamente integrável para todo  $t$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Propriedade 14** - Se  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$ ,  $w \neq 0$ , e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0$$

então:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{iw} F(w)$$

**Prova** - Se  $\phi(t)$  for dada por

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

temos:

$$\phi'(t) = f(t)$$

Assim se

$$\mathcal{F}[\phi(t)] = \Phi(w)$$

pela propriedade da transformada da derivada

$$\mathcal{F}[\phi'(t)] = \mathcal{F}[f(t)] = iw\Phi(w)$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0$$

Portanto:

$$\Phi(w) = \frac{1}{iw} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{iw} F(w)$$

394

ou seja:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{iw}F(w) = \frac{1}{iw}\mathcal{F}[f(t)]$$

Nesta propriedade se  $F(0) \neq 0$  a resposta é dada em termos da função impulso  $\delta(w)$  [10].

#### 18.4 Função impulso unitário - Delta de Dirac\*

Em física encontramos frequentemente o conceito de pulso de duração infinitamente curto, por exemplo:

a) Um corpo é colocado em movimento a partir do repouso por meio de um golpe instantâneo que adquire momento igual à impulsão do choque, ou seja

$$mv = \int_{t_0}^{t_0+\tau} f(t) dt$$

em que  $f$  é a força e  $\tau$  é a duração da ação da força. Como tal momento é finito e  $\tau$  é "muito pequeno", segue que  $f(t)$  deveria ter sido infinita durante o golpe e nula nos demais instantes.

b) Uma força concentrada atuando sobre uma viga é, em verdade, uma distribuição de carga fortemente concentrada;

c) Nos circuitos elétricos correntes fortemente concentradas de duração extremamente curta ocorrem frequentemente.

Em problemas físicos em geral não se conhece a forma exata da função fortemente concentrada, porém, esta não faz falta, o que é significativo, todavia, é a intensidade da impulsão.

A fim de facilitar várias operações da física matemática, e particularmente em mecânica quântica, Dirac em 1925, propôs a introdução da chamada função delta  $\delta(x)$  que representa uma função infinitamente concentrada e dada simbolicamente por:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

É evidente que  $\delta$  não constitui uma função no sentido clássico.

Podemos visualizar a função delta como o limite da seguinte função:

$$f_\epsilon(t-a) = \begin{cases} 1/\epsilon, & a \leq t \leq a + \epsilon, \quad \epsilon > 0 \\ 0, & \text{fora deste intervalo} \end{cases}$$

sendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(t-a) dt = \int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} dt = 1$$

representa a área do retângulo de largura  $\epsilon$  e altura  $1/\epsilon$ .

Esta função  $f_\epsilon(t-a)$  está relacionada com a função degrau unitário,  $h(t-a)$ , definida por

$$h(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases},$$

da seguinte forma

$$f_\epsilon(t-a) = \frac{1}{\epsilon} [h(t-a) - h(t-a-\epsilon)]$$

Vamos descobrir formalmente uma relação básica envolvendo esta função onde admitiremos  $f(x)$  uma função **contínua** qualquer.

Como  $\delta$  é nula para  $x \neq 0$ , os limites de integração podem ser substituídos por  $-\epsilon$  e  $\epsilon$ . Para  $\epsilon$  "pequeno", sendo  $f$  contínua em  $x = 0$ , seus valores neste intervalo não serão muito diferentes de  $f(0)$  e portanto podemos escrever:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) f(x) dx \simeq f(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx$$

sendo que a aproximação melhora quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Tomando este limite e usando a integral acima, temos a importante relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Num caso mais geral se  $b < a < c$ , temos:

$$\int_b^c f(t) \delta(t-a) dt = f(a),$$

que aceitaremos como "definição" da função  $\delta$ , embora, pode ser provado, não existe nenhuma função no sentido clássico que satisfaz esta condição, ou seja não tem sentido como integral ordinária!

Em vez disso a integral e a função  $\delta$ , são meramente definidas pelo número  $f(a)$  associado a uma função  $f(t)$ . Tendo isto em mente, vamos manejar a função delta como se fosse uma função ordinária, exceto que não tomaremos o valor de  $\delta(t)$ .

Em verdade esta função faz parte do conceito de função generalizada a qual é definida rigorosamente a partir da teoria das distribuições, o que foge do escopo deste texto.

Usando esta última expressão pode ser mostrado que:

$$a) f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$$

$$b) x\delta(x) = 0$$

$$c) \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), a \neq 0$$

Neste texto vamos apenas usar estas relações. Para um conhecimento mais detalhado consulte a referência [6].

**Exemplo** - Determine a transformada de Fourier da função delta.

**Solução** - Usando a definição da transformada de Fourier temos

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t}|_{t=0} = 1$$

ou seja,  $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ .

A partir deste resultado, usando a TF inversa, temos a interessante representação da função  $\delta(x)$

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad \blacktriangleleft$$

**Exemplo** - A transformada de Laplace da função  $f(t)$ ,  $t > 0$ , é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Calcule a transformada de Laplace da função  $\delta(t-a)$

**Solução** - Usando a definição da função delta temos

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \int_0^{\infty} \delta(t-a)e^{-st} dt = e^{-st}|_{t=a} = e^{-as}$$

Particularmente se  $a = 0$ , temos  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$   $\blacktriangleleft$

**Exemplo** - Usando a propriedade  $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$ , represente

$$f(t) = t^2[\delta(t-2) - \delta(t-1) + \delta(t)] + \sin t\delta(t-\pi)$$

apenas em função de  $\delta$ .

**Solução** - Sendo

$$t^2\delta(t-2) = 2^2\delta(t-2), \quad t^2\delta(t-1) = 1^2\delta(t-1)$$

$$t^2\delta(t) = t^2\delta(t-0) = 0^2\delta(t) = 0, \quad (\sin t)\delta(t-\pi) = (\sin \pi)\delta(t-\pi) = 0$$

temos

$$f(t) = 4\delta(t-2) - \delta(t-1) \quad \blacktriangleleft$$

### Comentários:

- (1) Quando uma força de "grande" intensidade atua por um tempo muito "pequeno", como por exemplo em um teste de choque, ou quando uma voltagem de descarga passa através de um sistema elétrico, podemos idealizar a situação supondo que todo o efeito ocorra num instante. A função delta de Dirac, usada para simular tais fenômenos, **não** é uma função no sentido usual, e sim uma função simbólica vista como o limite de uma distribuição.
- (2) Tratamos aqui apenas o impulso unitário, se não for, adequamos ao problema, por exemplo, se uma voltagem de impulso de potência  $E$  for aplicada a um circuito elétrico em  $t = a$  então representamos por  $E\delta(t - a)$ .

## 18.5 Propriedade de Convolução

Na resolução de problemas de valor inicial/contorno em intervalos infinitos ao usar a transformada de Fourier frequentemente devemos achar a TF inversa de um produto de duas funções conhecidas  $F(w)$  e  $G(w)$ . No entanto a TF do produto de duas funções,  $f(x)g(x)$ , não é o produto das transformadas individuais, isto é,

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] \neq \mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)]$$

No entanto existe uma operação, chamada convolução, onde este resultado acontece, e que será vista a seguir:

Sejam  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  funções conhecidas definidas no intervalo  $-\infty < t < \infty$ . A *convolução* de  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , ou produto de convolução, é uma função denotada por  $(f_1 * f_2)(t)$  e definida por

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x) dx \quad (18.17)$$

**Exemplo** - Calcule a convolução das funções.

$$f_1(t) = e^{-t^2} \quad f_2(t) = t$$

**Solução** - Usando a definição temos que

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(t-x) dx$$

398

Integrando e usando o resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

temos

$$(f_1 * f_2)(t) = \sqrt{\pi}t \quad \blacktriangleleft$$

Um caso particular importante na propriedade de convolução é quando

$$f_1(t) = 0 \quad e \quad f_2(t) = 0, \quad \text{para } t < 0,$$

e que fornece:

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(x)f_2(t-x) dx \quad (18.18)$$

Podemos verificar que a convolução satisfaz as propriedades comutativa, associativa e distributiva, ou seja, que

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= f_2(t) * f_1(t) \\ [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) &= f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \\ [f_1(t) + f_2(t)] * f_3(t) &= f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t) \end{aligned}$$

A unidade na convolução é a função impulso unitário  $\delta(t)$ , pois

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\delta(x)dx = f(t)$$

De modo semelhante mostra-se que:  $f(t) * \delta(t-T) = f(t-T)$

### 18.5.1 Propriedade da função de convolução no tempo

Supomos que  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  sejam seccionalmente suaves em qualquer intervalo finito e que  $f_1$  e  $f_2$  sejam absolutamente integráveis no intervalo  $-\infty < t < \infty$ . Por definição a TF de  $f_1(t) * f_2(t)$  é dada por:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx \right] e^{-iwt} dt$$

Invertendo a ordem de integração segue

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-iwt} dt \right] dx$$

Devido a propriedade de translação da TF

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-iwt} dt = F_2(w)e^{-iwx}$$

segue que

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)F_2(w)e^{-iwx} dx$$

e portanto

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-iwx} dx \right] F_2(w) = F_1(w)F_2(w)$$

Assim concluímos que se

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(w) \quad e \quad \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(w)$$

então

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(w)F_2(w) \quad (18.19)$$

resultado este conhecido como *propriedade de convolução no tempo*.

Esta propriedade além de ser útil na resolução de determinados problemas envolvendo EDP, ela permite resolver uma classe de equações integrais como nos dois exercícios a seguir.

**Exercício** - Admitindo existir as TF das funções  $y$ ,  $g$  e  $r$ , definidas no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , resolva a equação integral

$$y(t) = g(t) + \int_{-\infty}^{\infty} y(x)r(t-x)dx$$

onde  $g$  e  $r$  são conhecidas.

**Solução** - Usando a definição de convolução esta equação pode ser escrita como

$$y(t) = g(t) + y(t) * r(t)$$

Admindo que  $G(w)$  e  $R(w)$  são respectivamente as TF das funções  $g$  e  $r$ , tomando-se a transformada membro a membro e usando a propriedade de convolução temos que:

$$Y(w) = G(w) + Y(w)G(w)$$

Resolvendo para  $Y(w)$

$$Y(w) = \frac{G(w)}{1 - R(w)}$$

400

e tomando a TF inversa temos que a solução da equação é dada por

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)}{1 - R(w)} e^{iwt} dw \quad \blacktriangleleft$$

**Exercício** - Sabendo-se que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos pv}{t^2 + \beta^2} dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta}, \quad p > 0 \quad \beta > 0$$

resolva a seguinte equação integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x)}{(t-x)^2 + a^2} dx = \frac{1}{t^2 + b^2}, \quad 0 < a < b$$

**Solução** - Em termos da convolução esta equação pode ser escrita como:

$$y(t) * g(t) = \int_0^{\infty} y(x)g(t-x) dx = \frac{1}{t^2 + b^2}$$

onde

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

Usando a propriedade de convolução segue:

$$\mathcal{F}\{y * g\} = \mathcal{F}\{y\}\mathcal{F}\{g\} \equiv \mathcal{F}\{y\}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + a^2}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + b^2}\right\}$$

Vamos então calcular a TF de  $1/(t^2 + b^2)$ .

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + b^2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iwt}}{t^2 + b^2} dt$$

Devido ao fato da função ser real e par a TF é dada por

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + b^2}\right\} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos wt}{t^2 + b^2} dt$$

Utilizando o resultado da integral acima segue que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + b^2}\right\} = \frac{\pi}{b} e^{-bw}$$

Logo se  $Y(w) = \mathcal{F}\{y\}$ , temos

$$Y(w) \frac{\pi}{a} e^{-aw} = \frac{\pi}{b} e^{-bw},$$

e portanto

$$Y(w) = \frac{a}{b} e^{-(b-a)w},$$



Usando a TF inversa temos

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(w) e^{iwt} dw = \frac{a}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b-a)w} e^{iwt} dw$$

que integrando por partes fornece

$$y(t) = \frac{(b-a)a}{b\pi[t^2 + (b-a)^2]} \quad \blacktriangleleft$$

### 18.5.2 Propriedade de convolução na frequência

Uma outra propriedade muito utilizada que envolve a transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\},$$

será vista a seguir. Para tal supomos que:

- a)  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são seccionalmente suaves sob qualquer intervalo finito;
- b)  $f_1$  e  $f_2$  são absolutamente integráveis sobre  $-\infty < t < \infty$ ; e
- c)  $F_1(w)$  e  $F_2(w)$  são absolutamente integráveis em  $-\infty < w < \infty$ .

Pelas definições de convolução e de transformada inversa temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(w-y) dy \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(w-y) dy \right] e^{iwt} dw \end{aligned}$$

Fazendo  $w - y = x$  e trocando a ordem de integração, o que é possível pois  $F_1$  e  $F_2$  são absolutamente integráveis, segue que

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x) e^{i(x+y)t} dx \right] dy$$

ou seja

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) e^{iyt} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x) e^{ixt} dx \right] dy$$

Trocando de variáveis, esta expressão pode ser escrita como

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} = 2\pi \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w) e^{iwt} dw \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w) e^{iwt} dw \right]$$

e portanto

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} = 2\pi f_1(t) f_2(t) \quad (18.20)$$

402

ou de outra forma

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(w) * F_2(w) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(w-y) dy \quad (18.21)$$

Este resultado é conhecido como *propriedade de convolução na frequência*.

A partir deste resultado podemos encontrar a identidade de Parseval para a representação integral de uma função não periódica. Admitindo as hipóteses anteriores e que

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(w) \quad \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(w),$$

a expressão acima fornece

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-iwt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(w-y) dy,$$

que ao fazer  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , torna-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(-y) dy$$

Se as funções  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são **reais** então

$$F_1(-y) = \overline{F_1(y)} \quad e \quad F_2(-y) = \overline{F_2(y)}$$

e a expressão anterior pode ser escrita como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)\overline{F_2(y)} dy \quad (18.22)$$

Se tomarmos,  $f = f_1 = f_2$ , segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2 dy \quad (18.23)$$

onde  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(y)$

Este resultado é conhecido como *identidade de Parseval*. Pode ser verificado que este resultado é válido inclusive para funções complexas onde  $[f(t)]^2$  é substituído por  $|f(t)|^2$ .

Para as TF seno e coseno também existe a correspondente propriedade de convolução e a identidade de Parseval [4]. Assim podemos mostrar que.

$$\int_0^{\infty} f(t)g(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(w)G_s(w) dw$$

onde:

$$F_s(w) = \mathcal{F}_s[f(t)] \quad e \quad G_s(w) = \mathcal{F}_s[g(t)]$$

No caso particular de  $f = g$ , segue:

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s^2(w) dw$$

Para a TF coseno temos um resultado semelhante, bastando trocar, respectivamente,  $F_s$  e  $G_s$ , por  $F_c$  e  $G_c$ .

**Exercício** - Usando o fato que

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{1+iw} \right\} = e^{-t}h(t),$$

onde  $h(t)$  é a função degrau, determine  $f(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ 1/(1+iw)^2 \right\}$

**Solução** - Das propriedades de convolução a que melhor convém para o caso é

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(w) F_2(w)$$

ou seja:

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(w) F_2(w)] = f_1(t) * f_2(t)$$

Fazendo

$$F_1(w) = F_2(w) \equiv F(w) = \frac{1}{1+iw}$$

segue que

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w) \cdot F(w)] = f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(t-x) dx$$

Portanto, como  $f(t) = e^{-t}h(t)$ , segue

$$\mathcal{F}^{-1}[1/(1+iw)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-x}h(x)][e^{-(t-x)}h(t-x)]dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[1/(1+iw)^2] = \int_0^t e^{-x} \cdot e^{-(t-x)} dx = te^{-t}h(t) \quad \blacktriangleleft$$

### Comentários

- (1) Uma condição suficiente para a inversão da ordem de integração é a convergência absoluta das integrais envolvidas.
- (2) Existe também a propriedade de convolução para as transformadas de Fourier seno e coseno, referência [17].

- (3) A transformada de Fourier está relacionada com a transformada de Laplace por

$$\mathcal{F}[h(t)e^{-\gamma t}f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]$$

onde  $\mathcal{L}$  é a transformada de Laplace e  $s = \gamma + iw$  [10].

Fazendo uma comparação entre a TF e a T de Laplace temos:

- a) A TF sendo definida de no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , tem a vantagem de ser aplicável a funções que envolvem valores negativos da variável, ao passo que a TL, **não**, pois ela está definida de 0 a  $\infty$  (é feita uma suposição implícita que  $f(t) = 0$ , para  $t < 0$ ).
- b) A TL é aplicável a uma maior variedade de funções (todas as funções de ordem exponencial), pois contém um fator de convergência  $e^{-st}$ . Por exemplo, a função  $f(t) = e^{at}$ ,  $a > 0$ , não tem TF, pois  $f(t) \rightarrow \infty$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , porém tem transformada de Laplace. Assim a TL tem melhores propriedades de convergência e aplica-se a uma classe maior de funções.
- c) A TF inversa tem a vantagem de envolver uma integração com uma variável real  $w$ , enquanto que a TL inversa necessita de uma integral de linha no plano complexo  $s$ . Assim pode ser mais fácil encontrar a transformada inversa de Fourier que a transformada inversa de Laplace.
- (4) De modo semelhante ao que foi dito anteriormente

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt,$$

é a *energia da função* não periódica  $f(t)$ . Pela identidade de Parseval, a energia de  $f(t)$  é  $1/(2\pi)$  vezes a área sob a curva da função  $|F(w)|^2$ . Por esta razão a quantidade  $|F(w)|^2$  é chamada de *espectro de energia*.

## 18.6 RESUMO

Se  $f$  é seccionalmente suave em cada intervalo finito e absolutamente integrável no intervalo  $(-\infty, \infty)$  então:

$$\frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwt} dx \right] e^{iwt} dw,$$

que nos pontos de continuidade pode ser decomposta como sendo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw, \quad -\infty < t < \infty \quad (18.24)$$

$$F(w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx, \quad -\infty < w < \infty \quad (18.25)$$

A função  $F(w)$  é chamada de *transformada de Fourier* da função  $f(t)$  ou *integral de Fourier* e é simbolizada por  $\mathcal{F}[f(t)]$

$$F(w) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad (18.26)$$

De modo semelhante conhecendo-se  $F(w)$  e usando o símbolo  $\mathcal{F}^{-1}$  para denotar a operação inversa a função  $f(t)$  é indicada por

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw \quad (18.27)$$

Se  $f(t)$  é real **não** e definida **apenas** no intervalo  $0 < t < \infty$ , podemos estender  $f$  para  $t$  negativo. Dentre as opções temos dois importantes casos:

**1<sup>o</sup> Caso- Extensão par**  $f(-t) = f(t)$

Se esta extensão satisfizer o teorema da integral de Fourier, nos pontos de continuidade de  $f$  temos

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(x) \cos(wx) dx \right) \cos(wt) dw \quad (18.28)$$

que pode ser decomposta como

$$F_c(w) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(wt) dt, \quad w > 0 \quad (18.29)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(w) \cos(wt) dw, \quad t > 0 \quad (18.30)$$

A expressão de  $F_c(w)$  é chamada de *TF coseno* e denotada por

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(w), \quad (18.31)$$

enquanto que  $f(t)$ , que é a *TF coseno inversa*, é indicada como

$$\mathcal{F}_c^{-1}[F_c(w)] = f(t) \quad (18.32)$$

Deve-se ter cuidado na convergência quando  $t = 0$  pois a integral que representa a função converge para  $f(0^+)$ .

**2<sup>o</sup> Caso- Extensão ímpar**  $f(-t) = -f(t)$

Se esta extensão satisfizer o teorema da integral de Fourier, nos pontos de continuidade de  $f$  temos:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(wx) dx \right) \operatorname{sen}(wt) dw \quad (18.33)$$

que pode ser decomposta como

$$F_s(w) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt) dt, \quad w > 0 \quad (18.34)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(w) \operatorname{sen}(wt) dw, \quad t > 0 \quad (18.35)$$

onde  $F_s(w)$  é a *TF seno* de  $f(t)$ , e indicada por

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(w),$$

enquanto que  $f(t)$  é a de *TF seno inversa* de  $F_s(w)$  e denotada por

$$\mathcal{F}_s^{-1}[F_s(w)] = f(t)$$

Devido a extensão ser ímpar, quando  $t = 0^+$  a integral que representa a função converge para zero.

Admitindo-se que a TF das funções envolvidas existem e que  $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$ , temos:

- (1) Se  $f(t)$  é **real** e  $F(w) = R(w) + iX(w) \equiv |F(w)|e^{i\phi(w)}$  então
  - (a)  $R$  é função par e  $X$  função ímpar
  - (b) Se  $F$  é real então  $f$  é par e se  $F$  é imaginário puro então  $f$  é ímpar.
  - (c) Se  $f$  é par então  $F$  é par e se  $f$  é ímpar então  $F$  é ímpar
  - (d)  $|F(w)|$  é par e  $\phi(w)$  é ímpar
- (2) Se  $f(t)$  é real então  $F(-w) = \overline{F(w)}$  e reciprocamente
- (3)  $\mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathcal{F}[f_1(t)] + b\mathcal{F}[f_2(t)]$ ,  $a, b$  são reais
- (4)  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(w/a)$ ,  $a \neq 0$  real
- (5)  $\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(w)e^{-iwt_0}$
- (6)  $\mathcal{F}[f(t)e^{iw_0t}] = F(w - w_0)$ ,  $w_0$  real
- (7)  $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-w)$
- (8) Se  $f$  é contínua e  $f(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = (iw)F(w)$$

- (9) Se  $f'$  é contínua,  $f$  e  $f' \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$

$$\mathcal{F}[f''(t)] = (iw)^2F(w)$$

$$\mathcal{F}[-itf(t)] = F'(w)$$

(10)

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{1}{iw}F(w), \quad \text{se } w \neq 0 \quad \text{e}$$

$$\int_{-\infty}^t f(t)dt = F(0) = 0$$

(11) Se  $f(t)$  é real definida em  $t \geq 0$  tal que  $f$  e  $f' \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  então

$$\mathcal{F}_c[f''(t)] = -w^2 F_c(w) - f'(0)$$

$$\mathcal{F}_s[f''(t)] = w f(0) - w^2 F_s(w)$$

(12)  $\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(w)F_2(w)$  onde

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x) dx$$

(13)  $\mathcal{F}^{-1}[F_1(w) * F_2(w)] = 2\pi f_1(t)f_2(t)$ (14)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$ 

### 18.7 Exercícios propostos

(1) Resolva a equação integral

$$\int_0^{\infty} f(t) \text{sen}(wt) dt = \begin{cases} 1-w, & 0 \leq w \leq 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases}$$

Resp.:  $2(t - \text{sen } t) / (\pi t^2)$ .

(2) Resolva as seguintes equações integrais

(a)  $\int_0^{\infty} f(t) \cos wt dt = e^{-w}$

(b)  $\int_0^{\infty} f(t) \text{sen } wt dt = we^{-w}$

(c)  $\int_0^{\infty} f(t) \text{sen } wt dt = g(w)$

onde  $g(w) = \begin{cases} 1, & 0 \leq w \leq \pi \\ 0, & w > \pi \end{cases}$

(3) Se  $f(t) = g(t) = 0$  para  $t < 0$ , encontre  $f * g$  nos seguintes casos:

(a)  $f(t) = e^{-t}, \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

(b)  $f(t) = g(t) = e^{-t}$

(c)  $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

(4) Resolva a seguinte equação integral:

$$\int_0^t f(t-y)e^{-y} dy = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2 e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

408

$$\text{Resp.: } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2te^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

(5) Calcule o produto de convolução:

$$P_{2a} * P_{2a}$$

onde

$$P_{2a}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

Calcule  $\mathcal{F}[P_{2a}(t) * P_{2a}(t)]$  diretamente através do teorema de convolução.

Mostre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 dt = \pi$$

(6) Usando a convolução mostre que:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{(1+iw)(2+iw)} \right] = (e^{-t} - e^{-2t})h(t)$$

onde  $h(t)$  é a função degrau unitário

(7) Mostre que:

$$f * 0 = 0 \quad f * 1 \neq f$$

(8) Verifique o teorema de convolução para

$$f(t) = g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(9) Resolva a equação integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(x)y(t-x) dx = e^{-t^2}$$

(10) Utilize a identidade de Parseval e mostre que as integrais

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt, \quad \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt$$

valem  $\pi/4$ .**Sugestão:** Use a TF seno e TF coseno de  $f(t) = e^{-t}$ ,  $t > 0$ 

(11) Use a propriedade de simetria para calcular a TF das funções:

$$\frac{\text{sen } at}{t}, \quad \frac{1 - \cos at}{t^2}, \quad \frac{1}{a^2 + t^2}$$



(12) Calcule as seguintes integrais:

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } at}{t} \cos(bt) dt \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} \cos(bt) dt$$

(13) Encontre a TF da função  $f(t) = p_d(t) \cos wt$

(14) Mostre que

$$\mathcal{F}[f(at)e^{iw_0t}] = \frac{1}{|a|} F \left[ \frac{w - w_0}{a} \right]$$

(15) A partir de  $f(t) = e^{-at}h(t)$ , e usando a identidade de Parseval, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}$$

(16) Usando a identidade de Parseval e a função  $f(t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|}$  mostre que para  $a > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

(17) Considere a função  $f(x) = e^{-ax}$   $a > 0$ ,  $x \geq 0$ .

(a) Ache as TF seno e coseno dessa função

(b) Por meio da transformada inversa mostre que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wx)}{a^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{w \text{sen}(wx)}{a^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0$$



## Chapter 19

# Solução pelo método das transformadas

**Finalidade** - Em problemas da física matemática por vezes para desprezar os efeitos das condições de contorno usa-se considerar uma ou mais variáveis espaciais como sendo não limitadas. Ao separar as variáveis na EDP de tais problemas geralmente temos um PSL que fornece um conjunto contínuo de autovalores. Foi visto que uma integral sobre o correspondente conjunto de autofunções serviu como solução formal do problema.

A finalidade deste capítulo será apresentar um caminho mais direto para resolver tais problemas usando a transformada integral. Este método permite reduzir uma dada EDP e suas condições de contorno a um sistema mais simples onde se reduz uma variável (independente) na EDP e portanto no caso de duas variáveis teremos uma EDO.

Como o domínio de integração é **não** limitado apenas as variáveis independentes neste domínio são convenientes como variáveis de transformação. Para que a abordagem da transformada seja útil é preciso que o processo seja biunívoco: isto é para cada  $f$  existe uma única transformada  $F$  e vice-versa.

Além das transformadas de Fourier (exponencial, seno e cosseno) existem outras tais como a transformada de Laplace, transformada de Hankel, transformada de Mellin, etc. Decidir sobre qual é a transformada mais indicada nem sempre é tarefa fácil. Depende da EDP e principalmente das condições de contorno. Neste aspecto é de fundamental importância conhecermos as relações entre a transformada direta e a inversa e as transformadas envolvendo derivadas. Para o caso da TF, resumidamente, as apresentaremos a seguir.

### 19.1 Principais propriedades da TF envolvendo derivadas

Para identificar qual é a transformada mais indicada para resolver um problema precisamos antes de mais nada conhecer as propriedades da transformada de Fourier que relacionam as derivadas. Este é o objetivo desta seção:

- (1) Se  $v(x, t)$  é real,  $-\infty < x < \infty$ , contínua e satisfaz o teorema da integral de

Fourier em  $x$ , então

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(w, t) e^{iwx} dw, \quad (19.1)$$

onde

$$\mathcal{F}[v(x, t)] \equiv V(w, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) e^{-iwx} dx$$

- (2) Nas condições acima, porém se  $v(x, t)$  está definida apenas em  $x \geq 0$ , as expressões anteriores fornecem:

- (a) Extensão par (contínua) em  $-\infty < x < \infty$

$$v(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_c(w, t) \cos(wx) dw \quad (19.2)$$

onde

$$\mathcal{F}_c[v(x, t)] = V_c(w, t) = \int_0^{\infty} v(x, t) \cos(wx) dx \quad (19.3)$$

- (b) Extensão ímpar (contínua) em  $-\infty < x < \infty$

$$v(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_s(w, t) \operatorname{sen}(wx) dw \quad (19.4)$$

$$\mathcal{F}_s[v(x, t)] = V_s(w, t) = \int_0^{\infty} v(x, t) \operatorname{sen}(wx) dx$$

- (3) Se em  $v(x, t)$  a variável  $x$  está no intervalo  $-\infty < x < \infty$ , usando integração por partes, temos:

- (a) Transformada da derivada em relação a  $x$ :

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right] = v e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + iw \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-iwx} dx$$

admitindo-se que  $v \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , segue

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \right] = iw \mathcal{F}[v] \equiv iwV(w, t) \quad (19.5)$$

- (b) Transformada da derivada segunda em relação a  $x$  :

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = ivv e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\partial v}{\partial x} e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + (iw)^2 \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-iwx} dx$$

admitindo-se que  $v$  e  $v_x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , temos:

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = (iw)^2 \mathcal{F}[v] \equiv (iw)^2 V(w, t) \quad (19.6)$$

(4) Se  $v(x, t)$  está definida em  $-\infty < x < \infty$

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} e^{-iwx} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-iwx} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(w, t)$$

(5) Se  $v(x, t)$  está definida em  $0 < x < \infty$  e se  $v$  e  $v_x(x, t) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , então:

(a) TF coseno da derivada segunda

$$\mathcal{F}_c [v_{xx}(x, t)] = -w^2 V_c(w, t) - v_x(0, t) \quad (19.7)$$

(b) TF seno da derivada segunda

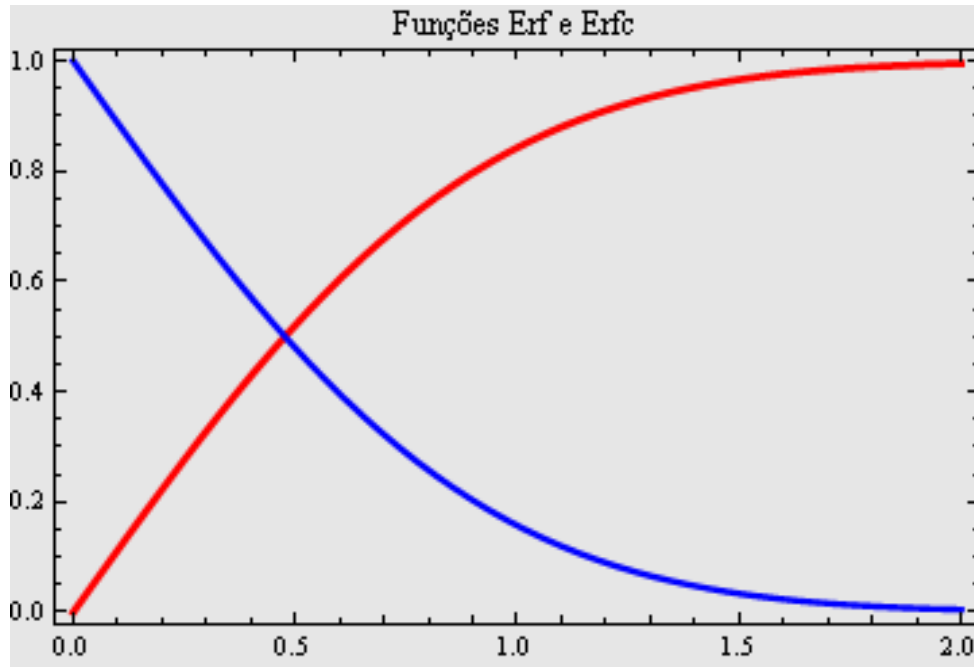
$$\mathcal{F}_s [v_{xx}(x, t)] = -w^2 V_s(w, t) + wv(0, t) \quad (19.8)$$

Com esse quadro já temos condições de tomarmos algumas decisões sobre a escolha da transformada:

- O intervalo da transformada deve ser compatível com o intervalo da variável.
- No intervalo  $-\infty < x < \infty$  para se usar a transformada é preciso que  $v$  e  $v_x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .
- No intervalo semi infinito  $0 < x < \infty$  para usar a transformada seno exige-se o conhecimento de  $v(0, t)$  enquanto que na transformada coseno exige-se o conhecimento de  $v_x(0, t)$ .
- A EDP deve ser de coeficiente constantes e não pode ter derivadas de ordem ímpar.

Para ilustrar a efetividade do que foi apresentado a seguir resolveremos de um modo formal alguns problemas básicos, onde frequentemente usaremos a *função erro* e a *função erro complementar*, definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \\ \operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned} \quad (19.9)$$



## 19.2 Solução com emprego da transformada de Fourier

### 19.2.1 Problema de Dirichlet num domínio infinito

**Problema** - Encontre a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & -\infty < x < \infty, & \quad y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

$u$  é limitada quando  $y \rightarrow \infty$

$u$  e  $u_x \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$

**Solução** - Seja  $U(w, y)$  a transformada de Fourier de  $u(x, y)$  na variável  $x$ .  
Então:

$$U(w, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-iwx} dx$$

e portanto pela condição imposta pelo problema em  $y = 0$  temos

$$U(w, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

Desde que  $u$  e  $u_x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , temos

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = -w^2 U(w, y)$$

Por outro lado desde que a transformada é em relação a  $x$ , segue que

$$\mathcal{F}[u_{yy}] = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(w, y)$$

Tomando-se a transformada da equação do problema e usando os resultados anteriores obtemos a seguinte EDO

$$U_{yy} - w^2 U = 0,$$

cuja solução  $U(w, y)$  é dada por

$$U(w, y) = A(w) e^{wy} + B(w) e^{-wy}$$

**a)**  $w > 0$

Desde que  $u(x, y)$  é limitada quando  $y \rightarrow \infty$  devemos ter  $A(w) = 0$ , e portanto:

$$U(w, y) = B(w) e^{-wy}$$

Como

$$U(w, 0) = B(w)$$

podemos escrever  $U(w, y)$  como sendo

$$U(w, y) = U(w, 0) e^{-wy}, \quad w > 0$$

**b)**  $w < 0$

Da mesma forma devemos ter  $B(w) = 0$  e portanto

$$U(w, y) = A(w) e^{wy}$$

ou seja:

$$U(w, y) = U(w, 0) e^{wy}, \quad w < 0$$

Estes dois resultados podem ser escritos simplesmente como:

$$U(w, y) = U(w, 0) e^{-|w|y}$$

ou ainda por

$$U(w, y) = e^{-|w|y} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i wz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-|w|y} e^{-i wz} dz$$

onde substituímos  $U(w, 0)$  pela expressão já obtida.

Assim a solução desejada  $u(x, t)$  é a transformada inversa dessa expressão, ou seja,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[U(w, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(w, y) e^{iw x} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw x} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-iw z} dz \right] e^{-|w|y} dw, \end{aligned}$$

que após a inversão na ordem de integração torna-se

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(x-z)-|w|y} dw \right] dz$$

Desde que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(x-z)-|w|y} dw = \int_{-\infty}^0 e^{iw(x-z)+wy} dw + \int_0^{\infty} e^{iw(x-z)-wy} dw$$

integrando e simplificando, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(x-z)-|w|y} dw = \frac{2y}{(x-z)^2 + y^2}$$

Substituindo na expressão de  $u(x, y)$  temos a solução formal

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z) dz}{(x-z)^2 + y^2}, \quad y > 0$$

### 19.2.2 Problema de Neumann em região infinita

**Problema** - Usando o resultado do problema anterior encontre a solução do problema de Neumann

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u_y(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$u$  é limitada quando  $y \rightarrow \infty$

$u$  e  $u_x \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$

**Solução:** Este problema é parecido com o anterior e a estratégia será usar um artifício para transformar esse problema num problema de Dirichlet na variável  $v$ . Se  $v(x, y) \equiv u_y(x, y)$  então:

$$u(x, y) = \int_a^y v(x, \eta) d\eta + C$$

onde  $a$  e  $c$  são constantes arbitrárias. Assim:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$



e

$$v(x, 0) = u_y(x, 0) = g(x),$$

e portanto temos um problema de Dirichlet para  $v(x, y)$ .

Pelo problema anterior, a solução em  $v$  é dada por:

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{(x-z)^2 + y^2} dz, \quad y > 0$$

e portanto:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^y \left[ \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{(x-z)^2 + \eta^2} dz \right] d\eta$$

Invertendo a ordem de integração, desde que

$$\int_a^y \frac{\eta}{(x-z)^2 + \eta^2} d\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{(x-z)^2 + y^2}{(x-z)^2 + a^2}$$

temos:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \ln \left[ \frac{(x-z)^2 + y^2}{(x-z)^2 + a^2} \right] dz + C$$

### 19.2.3 Problema de condução do calor num haste infinita

**Problema** - Obtenha a solução limitada do problema de condução do calor na haste infinita

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$u \text{ e } u_x \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty$$

**Solução** - Seja  $U(w, t)$  a TFF de  $u(x, t)$  na variável  $x$ , isto é,

$$U(w, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-iw x} dx$$

Desde que:

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = -w^2 \mathcal{F}[u] = -w^2 U(w, t)$$

e

$$\mathcal{F}[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iw x} dx = U_t(w, t)$$

a equação do calor é transformada na seguinte EDO

$$U_t + w^2 U = 0$$

418

a qual é satisfeita pela função  $U$  dada por

$$U(w, t) = U(w, 0) e^{-w^2 t}$$

Por outro lado desde que  $u(x, 0) = f(x)$  segue que

$$\mathcal{F}[u(x, 0)] \equiv U(w, 0) = \mathcal{F}[f(x)] = F(w)$$

e portanto a expressão para  $U(w, t)$  torna-se

$$U(w, t) = F(w) e^{-w^2 t}$$

Como a solução  $u(x, t)$  é a TF inversa de  $U(w, t)$ , temos então que

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w) e^{-w^2 t}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(w) e^{-w^2 t}] e^{iwx} dw$$

que devemos simplificar.

Observe que queremos achar a TF **inversa** do produto das funções  $F(w)$  e  $G(w) = e^{-w^2 t}$  e para tal vamos usar a propriedade de convolução

$$\mathcal{F}[f * g] = F(w) G(w)$$

que fornece

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w) e^{-w^2 t}] = f * g$$

Como a função  $f$  é conhecida se determinarmos  $g$ , teremos a resposta. É o que faremos a seguir.

Sendo

$$G(w, t) = e^{-w^2 t}$$

$$g(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2 t} e^{iwx} dw$$

segue que

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2 t + iwx} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} + iw\sqrt{t} \right)^2 - \frac{x^2}{4t} \right] dw \\ &= \frac{e^{-x^2/4t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{x}{2\sqrt{t}} + iw\sqrt{t} \right]^2 dw \end{aligned}$$

Introduzindo a uma nova variável  $r$

$$\frac{x}{2\sqrt{t}} + iw\sqrt{t} = ir$$

temos:

$$g(x, t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr$$

Desde que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$$

a função  $g(x)$  é dada por

$$g(x, t) = \frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}$$

Como a solução é  $u(x, t) = f * g$ , temos

$$u(x, t) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(x - z, t) dz$$

e portanto a solução formal do problema torna-se

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-(x-z)^2/(4t)} dz$$

**Pergunta** - Neste problema se a função "entrada"  $f$  fosse o impulso unitário  $\delta(t)$  qual seria a "saída", isto é, qual a solução deste novo problema?

Admitindo ser possível substituir  $f$  por  $\delta$  na solução obtida, e devido a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$

segue que

$$u_{\delta}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) e^{-(x-z)^2/(4t)} dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-z)^2/(4t)} \Big|_{z=0}$$

ou seja, temos a solução

$$u_{\delta}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$$

a qual é a própria  $g(x, t)$ . Esta função  $g(x, t)$  é chamada *função de Green* do problema. Em outras palavras se soubermos a função de Green do problema, que é a solução  $g(x, t)$  provocada pela entrada do impulso unitário, então saberemos a solução  $u(x, t)$  para **toda** função  $f$ , e esta é dada por:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(x - z, t) dz \equiv f * g$$

Este procedimento é usado principalmente para resolver problemas lineares **não homogêneos**, porém, como envolve funções generalizadas uma abordagem mais detalhada foge ao objetivo deste texto.

**Exercício** - Obtenha a solução do problema anterior quando

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ a & , \quad x > 0 \end{cases}$$

**Solução** - Para esse caso particular a solução torna-se

$$u(x, t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-z)^2/(4t)} dz$$

Se introduzirmos a nova variável:

$$s = \frac{z-x}{2\sqrt{t}}$$

então:

$$u(x, t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^0 e^{-s^2} ds + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

Desde que

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}/2$$

temos:

$$u(x, t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-r^2} dr$$

ou seja

$$u(x, t) = \frac{a}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right]$$

**Exercício** - Encontre a distribuição de temperatura na haste semi infinita  $0 < x < \infty$ , satisfazendo:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & x > 0 & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0 & , \quad u_x(0, t) &= g(t) \\ u(x, t) \text{ e } u_x(x, t) &\rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

**Solução** - Como o intervalo é semi infinito e temos a **derivada** da solução estas condições impõe a transformada de Fourier **coseno**. Se designarmos a TF coseno de  $u(x, t)$  em relação a  $x$ ,  $U_c(w, t)$ , simplesmente por  $U(w, t)$ , ou seja se

$$U(w, t) = \int_0^{\infty} u(x, t) \cos wx dx$$

desde que

$$\mathcal{F}_c [u_{xx}] = -w^2 U(w, t) - u_x(0, t)$$

aplicando a transformada em ambos os membros da equação temos

$$U_t + w^2 U = -g(t)$$

pois  $u_x(0, t) = g(t)$ . A função  $U$  que satisfaz esta equação é dada por

$$U(w, t) = e^{-w^2 t} \left[ - \int_0^t g(\tau) e^{w^2 \tau} d\tau + c \right]$$

onde determinaremos a constante  $c$ .

Aplicando a transformada na condição inicial obtemos

$$U(x, 0) = \int_0^\infty u(x, 0) \cos(wx) dx = \mathbf{0}$$

pois  $u(x, 0) = 0$  é um dado do problema. Segue da expressão de  $U(w, t)$  que:

$$U(x, 0) = \mathbf{0} = \mathbf{c}$$

e portanto

$$U(x, t) = - \int_0^t g(\tau) e^{-w^2(t-\tau)} d\tau$$

Logo a transformada inversa, que é dada por,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} [U(w, t)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(w, t) \cos(wx) dw$$

fornece:

$$u(x, t) = \frac{-2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^t g(\tau) e^{-w^2(t-\tau)} d\tau \right] \cos(wx) dw$$

Invertendo a ordem de integração

$$u(x, t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^t g(\tau) \left[ \int_0^\infty e^{-w^2(t-\tau)} \cos(wx) dw \right] d\tau$$

e desde que a integral interna é dada por

$$\int_0^\infty e^{-w^2(t-\tau)} \cos wx dw = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t-\tau}} e^{-x^2/4(t-\tau)}$$

a solução do problema torna-se:

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-x^2/4(t-\tau)} d\tau$$

### 19.3 Aplicação da transformada de Laplace

Por se tratar de assunto de EDO vamos apresentar apenas as propriedades mais usadas nas aplicações. Usando a TL vamos resolver alguns problemas básicos que servirão como modelo para outros de complexidade maior .

A *transformada de Laplace* é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

onde  $s$  é real ,  $0 < s < \infty$ .

Se  $f$  , definida em  $t > 0$  , é **seccionalmente contínua** em  $[0, T]$  para cada  $T > 0$  e de **ordem exponencial**, isto é, se  $e^{-at} |f(t)|$  for limitada para algum  $\mathbf{a}$ , então a TL existe para  $s > \mathbf{a}$ .

Geralmente achamos a TL inversa por meio de tabelas. Contudo na definição de TL é possível estender a definição para valores complexos de  $s$ ,  $s = u + iw$ , e neste caso, prova-se a seguinte *fórmula de inversão* [6]:

$$f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Observe pela definição que algumas diferenças básicas existem em relação a TF:

**a)** A TF, como é dada em  $(-\infty, \infty)$ , pode ser aplicada a funções cuja variável é negativa, ao passo que a TL pode ser aplicada apenas às funções de variável positiva.

**b)** Desde que a TL inclui no integrando um fator de amortecimento  $e^{-st}$ , podemos obter a transformada de uma classe de funções mais ampla (o fator  $e^{-iwt}$  na TF não amortece desde que seu módulo é unitário). Por exemplo a TF de  $f(t) = e^{at}$  ,  $a > 0$ , não existe, porém a TL existe.

**c)** Quanto às inversas, a TF tem a vantagem de envolver uma integração com variável real  $w$ , enquanto que a TL inversa necessita, de uma integral de contorno no plano complexo  $s$ . Sob este aspecto podemos encontrar mais facilmente a TF inversa do que na TL.

Para usar a TL na resolução de problemas devemos conhecer a transformada das derivadas. Admitindo-se que  $u(x, t)$  é contínua e de ordem exponencial e  $u_t(x, t)$  seccionalmente contínua, então a TL de  $u_t$  existe e é dada por:

$$\mathcal{L}[u_t(x, t)] = \int_0^{\infty} u_t(x, t) e^{-st} dt = sU(x, s) - u(x, 0)$$

Se  $u_t$  e  $u_{tt}$  satisfazem as mesmas condições impostas sobre  $u$  e  $u_t$  respectivamente então a TL existe e:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u_{tt}(x, t)] &= s^2 \mathbf{U}(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) \\ \mathcal{L}[u_x(x, t)] &= \int_0^\infty u_x(x, t) e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U}(x, s) \\ \mathcal{L}[u_{xx}(x, t)] &= \int_0^\infty u_{xx}(x, t) e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{U}(x, s)\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{U}(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)]$ . Os dois últimos resultados é devido a propriedade:

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

enquanto que os dois primeiros são obtidos através de integração por partes.

Com estas propriedades podemos notar que a TL se ajusta aos problemas onde são dadas as condições em  $t = 0$  (condições de Cauchy) as quais aparecem naturalmente nas equações da onda e do calor. No entanto a TL **não** é adequada na resolução de problemas de contorno envolvendo a equação de Laplace num domínio **não** limitado, pois as condições quando  $x \rightarrow \infty$  não são incorporadas nas fórmulas da TL.

A definição de *convolução* (finita) de duas funções  $f$  e  $g$ , que é análoga a já vista na TF, é dada por:

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = (g * f)(t)\end{aligned}$$

Por exemplo, se,  $f(t) = g(t) = t$ , então

$$(f * g)(t) = \int_0^t \tau(t - \tau) d\tau = t^3/6$$

Tal como no caso da convolução (infinita) da TF, temos a propriedade:

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

ou de forma equivalente

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f * g$$

Esta propriedade permite encontrar a TL inversa do produto de duas funções, encontrando a inversa de cada fator e em seguida a sua convolução.

**Exemplo** - Usando a propriedade de convolução determine

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \right],$$

**Solução** - Desde que

$$F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow g(t) = \text{sen } t$$

pela propriedade de convolução temos

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \right] = f * g = \int_0^t \text{sen } \tau d\tau = 1 - \cos t$$

**Problema** – Determine a solução limitada da equação de condução de calor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

satisfazendo as condições

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u_0$$

**Solução** - Tomando-se a TL em relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{U}(x, s) = s\mathbf{U}(x, s) - u(x, 0)$$

que tem por solução

$$\mathbf{U}(x, s) = Ae^{x\sqrt{s}} + Be^{-x\sqrt{s}}$$

Como o problema exige solução limitada  $u(x, t)$ , a função  $\mathbf{U}(x, s)$ ,  $s > 0$ , também deve ser limitada, e portanto  $A = 0$ .

Por outro lado pela definição de TL

$$\mathbf{U}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt$$

e pela hipótese do problema  $u(0, t) = u_0$  temos que

$$\mathbf{U}(0, s) = \int_0^\infty u_0 e^{-st} dt = \frac{u_0}{s}$$

Logo a expressão para  $\mathbf{U}(x, s)$  torna-se

$$\mathbf{U}(x, s) = \frac{u_0}{s} e^{-x\sqrt{s}}$$



Por meio da tabela de transformada de Laplace, sendo

$$\mathcal{L} \left\{ \operatorname{erf} c \left[ a/2\sqrt{t} \right] \right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

segue que

$$u(x, t) = u_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} \right\} = u_0 \operatorname{erf} c \left[ \frac{x}{2\sqrt{t}} \right] \quad \text{ou}$$

$$u(x, t) = u_0 \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-w^2} dw \right]$$

### Comentários

- (1) Muito embora recorremos a tabelas e propriedades para achar a TL inversa das funções, em geral, mesmo em problemas de contorno relativamente simples, temos funções que são difíceis de se inverter. Para tais funções a inversão pode ser feita através da integração de contorno.
- (2) A TL, tal como a TF, pode ser aplicada a problemas onde a EDP (coeficientes constantes) e/ou as condições de contorno forem não homogêneas, enquanto que no método de separação de variáveis tanto a EDP quanto as condições de contorno devem ser homogêneas.
- (3) Para EDP de coeficientes variáveis a equação transformada pode continuar sendo uma EDP de ordem igual ou maior que a equação original e neste caso é claro, não há vantagem alguma em tomar a TL.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} &= x, & x > 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ u(0, t) &= 0, & t > 0 \end{aligned}$$

Se aplicarmos a TL em relação a  $t$  obteremos uma EDO, porém se aplicarmos TL em relação a  $x$  teremos uma EDP mais complicada que a original.

- (4) Existe um método chamado de "Princípio de Duhamel" onde se usa a TL para resolver problemas com condições de contorno variáveis, uma vez conhecida a solução de um problema associado mais simples, ver [1].

## 19.4 RESUMO

Quando num problema a variável espacial for **não** limitada, ao separar as variáveis obtemos um PSL singular (domínio infinito) onde os autovalores são contínuos, em vez de discretos. No entanto em vez de separar as variáveis podemos obter a solução por meio da TF que permite resolver problemas lineares não homogêneos.

As principais propriedades da TF que são usadas na resolução de problemas envolvendo EDPs são as seguintes:

$$1 - v(x, t), \quad -\infty < \mathbf{x} < \infty$$

$$(1) \text{ (a) } \mathcal{F}[v_x] = iwV(w, t), \quad v \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty \\ \mathcal{F}[v_{xx}] = (iw)^2V(w, t), \quad v \text{ e } v_x \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty$$

$$2 - v(x, t), \quad \mathbf{0} < \mathbf{x} < \infty$$

$$(1) \text{ (a) } \mathcal{F}_c[v_{xx}] = -w^2V_c(w, t) - v_x(0, t), \quad v \text{ e } v_x \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty \\ \mathcal{F}_s[v_{xx}] = w^2V_s(w, t) + wv(0, t), \quad v \text{ e } v_x \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty$$

A estratégia para resolver tais problemas é a seguinte:

- (1) Toma-se a transformada da equação, obtendo-se uma equação diferencial em  $V(w, t)$ , onde  $w$  é um parâmetro.
- (2) Resolve-se esta equação por meio das condições iniciais elimina-se as constantes arbitrárias, obtendo uma expressão para  $V(w, t)$ .
- (3) Para obter  $v(x, t)$  calculamos a transformada inversa recorrendo-se geralmente as propriedades, principalmente a de convolução, ou a tabelas.

Tal como a TF, a transformada de Laplace (TL), que é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

é usada para resolver uma classe de problemas envolvendo geralmente EDP hiperbólica ou parabólica .

Diferentemente da TF aplica-se apenas em funções definidas em  $(0, \infty)$ , porém tem a vantagem de incluir no integrando o fator de amortecimento  $e^{-st}$  o que permite obter a transformada de uma classe mais ampla de funções.

Com as propriedades

$$\mathcal{L}[u_{tt}(x, t)] = s^2\mathbf{U}(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) \\ \mathcal{L}[u_x(x, t)] = \int_0^{\infty} u_x(x, t) e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{U}(x, s) \\ \mathcal{L}[u_{xx}(x, t)] = \int_0^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{U}(x, s)$$

podemos transformar um problema envolvendo uma EDP em  $u(x, t)$  num outro mais simples envolvendo uma EDO em  $U$ .

Uma vez conhecida a solução  $U$  do problema transformado, para obter a inversa  $u$  geralmente usamos tabelas e/ou a propriedade de convolução

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

onde por definição

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &\equiv \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = (g * f)(t) \end{aligned}$$

Neste caso uma transformada muito útil em problemas envolvendo a equação do calor é

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{erf} c \left[ \frac{a}{2\sqrt{t}} \right]\right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

### 19.5 Exercícios Propostos

- (1) Considere a integral  $I = I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2} \cos \beta\lambda d\lambda$ 
  - (a) Mostre que  $I$  satisfaz a ED  $\frac{\partial I}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} I$
  - (b) Integre em relação a  $\beta$  e obtenha a solução  $I(\alpha, \beta) = C e^{-\beta^2/4\alpha}$
  - (c) Usando o resultado  $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$ , mostre que  $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/(4\alpha)}$
- (2) Uma barra delgada infinita  $-\infty < x < \infty$  cuja superfície é isolada, tem temperatura inicial dada por

$$f(x) = \begin{cases} u_0 & , \quad |x| < a \\ 0 & , \quad |x| \geq a \end{cases}$$

Mostre que a temperatura é dada por:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+a}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-a}{2\sqrt{t}} \right) \right]$$

- (3) Usando a TF, mostre que a solução do problema

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_t &= f(x, t) & -\infty < x < \infty & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0 & & t > 0 \end{aligned}$$

é dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-\xi)^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} h(t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

onde  $h$  é a função degrau ou função de Heaviside.

428

(4) Mostre que a solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + tu & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ |u(x, t)| &< M \end{aligned}$$

é dada por:

$$u(x, t) = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4t} f(\xi) d\xi$$

(5) Usando a integral de Fourier mostre que a solução limitada da eq. de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  na região  $0 < y < a$ ,  $-\infty < x < \infty$ , satisfazendo as condições:

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(x, a) = 0$$

é:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \lambda(a-y)}{\sinh \lambda a} f(\xi) \cos \lambda(\xi-x) d\xi \right] d\lambda$$

(6) Usando a integral de Fourier mostre que a solução limitada da eq. de Laplace  $\nabla^2 u = 0$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  que satisfaz:

$$u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y < \infty; \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \infty$$

é:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} f(\xi) \operatorname{sen} \lambda x \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi d\lambda$$

Integrando em relação a  $\lambda$ , transforme essa solução na forma:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[ \frac{1}{y^2 + (\xi-x)^2} - \frac{1}{y^2 + (\xi+x)^2} \right] d\xi$$

(7) Considere o problema de contorno:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & x \geq 0 \\ u(0, t) &= 0 & t \geq 0 \\ |u(x, t)| &< M \end{aligned}$$

Por meio da integral de Fourier verifique que:

(a) Uma solução da equação satisfazendo a condição de contorno é:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} B(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x d\lambda$$

(b) A solução do problema apresentado é dada por:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(v) e^{-\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda v \operatorname{sen} \lambda x \, d\lambda dv$$

(c) Usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} \lambda v \operatorname{sen} \lambda x \equiv \frac{1}{2} [\cos \lambda (v - x) - \cos \lambda (v + x)]$$

e a integral do exercício (1), mostre que:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{-x/2\sqrt{t}}^\infty e^{-u^2} f_+(x, t) \, dw - \int_{x/2\sqrt{t}}^\infty e^{-u^2} f_-(x, t) \, dw \right]$$

sendo  $f_+$  e  $f_-$  dados respectivamente por

$$f_+(x, t) \equiv f(2w\sqrt{t} + x), \quad f_-(x, t) \equiv f(2w\sqrt{t} - x)$$

(d) Se  $f(x) = u_0$  é constante, mostre que

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{t}\right)$$

(8) Resolva o seguinte PVI

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} x & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

(9) Resolva o seguinte PVIC

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ u(0, t) &= \operatorname{sen} t & 0 < t < \infty, \quad u(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

(10) Determine  $u(x, t)$  sendo que  $\mathbf{U}(x, w) \equiv \mathbf{U}$  satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dx^2} - s\mathbf{U} &= A, & 0 < x < 1 \\ \mathbf{U}_x(0, w) &= 0, \quad \mathbf{U}(1, w) = 0 \end{aligned}$$

(11) Considere o problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \operatorname{sen} t &= 0 & t > 0 \\ u(x, 0) &= x, \quad u(0, t) = 0 \end{aligned}$$

(a) Por meio da TL em relação a  $t$  mostre que a solução é dada por:  $u(x, t) = x \cos t$

(b) Use o método de separação de variáveis para resolver esse problema.

430

(12) Usando a TL, mostre que a solução do PVIC

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} - k \operatorname{sen}(\pi x), & 0 < x < 1, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0 \end{aligned}$$

é dada por:

$$u(x, t) = \frac{k}{\pi^2} (1 - \cos \pi t) \operatorname{sen} \pi x$$

(13) Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + f(x) & 0 < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(x, t) \rightarrow 0 & \text{quando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(a) Se  $U(x, s)$  é a TL de  $u(x, t)$  em relação a  $t$  mostre que o valor de  $U$  é dado por:

$$U(x, s) = \frac{F(s)}{s^2} (1 - e^{-sx})$$

onde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ (b) Usando o fato que  $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$  mostre que se  $f(t) = f_0$  (constante) então:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{f_0}{2} [t^2 - (t-x)^2] & \text{quando } t \geq x/c \\ &= \frac{f_0}{2} t^2 & \text{quando } t \leq x/c \end{aligned}$$

(14) Obtenha a solução do problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & 0 < x < \infty, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & u_t(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) &= 0 & u(x, t) \rightarrow 0 & \text{quando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(x+ct) - f(ct-x)] & , \quad t > x/c \\ \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] & , \quad t < x/c \end{cases}$$

(15) Mostre que a solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} - h u & , & \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad h = \text{constante} \\ u(x, 0) &= f_0 & & \quad x > 0 \\ u(0, t) &= 0 \\ u_x(0, t) &\rightarrow 0 & , & \quad \text{quando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{Resp: } u(x, t) = f_0 e^{-ht} [1 - \operatorname{erf} c(x/\sqrt{4\pi t})]$$

(16) A equação de 3ª. ordem

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{xxt}$$

é chamada de *equação de Stokes*. Use a TL em relação a  $x$ ,  $x > 0$ , e reduza-a a uma equação de 2ª ordem.