

# Notas Sobre Lógica Modal

Flavio S. Yamamoto<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LIDET - *Laboratory of Interactivity and Digital Entertainment Technology*

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Rua do Matão, 1010 – 05508-090 - São Paulo, SP

fsy@ime.usp.br

**Resumo.** *Notas de um rascunho antigo, é mais para divulgar a aplicabilidade da lógica modal em Ciência da Computação.*

*Apresentamos noções básicas sobre a lógica modal proposicional e aspectos elementares que a tornam interessante para o uso em ciência da computação. Em particular, destacamos o uso desta lógica na construção de sistemas que capturam a noção de conhecimento.*

## 1. Introdução

As linguagens das *lógicas não clássicas* são frequentemente representadas por modificações ou extensões da linguagem clássica, pela remoção de alguma propriedade ou adição de novos operadores. A lógica modal enquadra-se nesse último caso, é uma extensão da *lógica proposicional clássica* pela inclusão de *operadores modais*. Esses operadores expressam a *modalidade gramatical* de uma sentença, ([Mints, 1992, pág. iv]), isto é, qualificam como *verdadeira* ou *falsa* uma proposição de acordo com o que distinguem: *necessidade, possibilidade, conhecimento, crença, obrigação, propriedades temporais* e outras modalidades.

A expressividade da linguagem modal, dada a diversidade de leituras dos operadores modais, permite sua utilização sob diferentes enfoques, por exemplo, no tratamento de questões de caráter filosófico<sup>1</sup> ([Girle, 2000]), no estudo da *Lógica da Prova*<sup>2</sup> ([Boolos, 1993]), na análise de questões envolvendo a *gramática de Montague* ([Montague, 1963] e [van Benthem, 1988]), em aplicações em economia ([Milgrom, 1981]), em programação ([Pratt, 1976], [Pratt, 1979] e [Pratt, 1980]), em programação concorrente ([Hennessy, 1984], [Hennessy and Milner, 1985], [Milner, 1981] e [Park, 1981]), no tratamento formal de protocolos em sistemas distribuídos ([Fischer and Immerman, 1986], [Fagin and Vardi, 1986] e [Halpern and Y., 1990]), nos métodos de especificação e verificação formal ([Massacci, 1998]), em bancos de dados ([Emerson, 1990]), em lingüística computacional ([Morril, 1996], [Carpenter, 1997] e [van Benthem, 1988]), no estudo da computação quântica ([Chiara, 1986]) e em construções de sistemas baseados em conhecimento ([Fagin et al., 1995] e [Yamamoto, 2003]).

## 2. A Lógica Proposicional Clássica

Descrevemos de modo breve o *sistema formal* LP para a lógica proposicional clássica. Um dos objetivos da construção de um sistema como LP é obter uma descrição

---

<sup>1</sup>Os *argumentos* podem ser vistos como *modalidades* ([Girle, 2000, cap. 1]).

<sup>2</sup>*The Provability of Logic* em [Boolos, 1993].

sintática de  $\models$  (*consequência semântica*) em que se tenha bem definida a relação  $\vdash$  (*consequência sintática*) e tal que as propriedades operacionais de  $\vdash$  espelham as de  $\models$ . Resumindo, o que desejamos ao elaborar qualquer sistema formal é que ele seja, pelo menos *correto* ( $\vdash \Rightarrow \models$ ) e (se possível) *completo* ( $\models \Rightarrow \vdash$ ).

A construção de **LP** é como segue: seja  $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$  o conjunto das *proposições atômicas* e  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow^3$  e  $\leftrightarrow$  os conectivos lógicos, chamamos de *fórmulas* de **LP** qualquer elemento de  $\Phi$  ou uma expressão da forma:  $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi$  e  $\varphi \leftrightarrow \psi$ , com  $\varphi$  e  $\psi$  elementos de  $\Phi$ .  $\text{LP}(\Phi)$  é o menor conjunto contendo todas as fórmulas obtidas de  $\Phi$ . As fórmulas de  $\text{LP}(\Phi)$  são manuseadas por meio de *esquemas de axiomas* e de uma única *regra de inferência*. Para quaisquer fórmulas  $\varphi, \psi$  e  $\chi$  são *esquemas de axiomas* de **LP** (há diversas axiomáticas possíveis):

- $1_{\text{LP}})$   $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- $2_{\text{LP}})$   $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $3_{\text{LP}})$   $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ .

Cada instância de um dos esquemas de axioma é um *axioma*, por abuso chamamos os esquemas de axiomas de axiomas. A regra de inferência *modus ponens* (*MP*) é dada por: se  $\varphi$  e  $\varphi \rightarrow \psi$ , então  $\psi$ , para  $\varphi$  e  $\psi$  em  $\text{LP}(\Phi)$ . Esquemáticamente:  $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ .

Há um processo, que chamamos *prova*, pelo qual podemos obter fórmulas de um determinado tipo em **LP**. Uma prova em **LP** é uma seqüência finita  $\varphi_1 \dots, \varphi_m$  de fórmulas tal que para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , ou  $\varphi_j$  é teorema de **LP** ou  $\varphi_j$  é obtido por *modus ponens* a partir de fórmulas anteriores. Qualquer fórmula  $\varphi$  obtida através de uma prova em **LP** é chamada de *teorema* de **LP**, denotamos tal fato por  $\vdash \varphi$ .

Após definirmos o conceito de  $\vdash$ , a noção de *consequência sintática*, necessitamos construir uma *semântica* para os elementos sintáticos de **LP**. Uma semântica se estabelece, em geral, a partir da noção de *interpretação* que correlaciona elementos de  $\Phi$  a  $\{\top, \perp\}$ , com  $\top$  denotando *verdadeiro* e  $\perp$  *falso*. Em **LP**, esta correlação é feita por uma *função de valoração*<sup>4</sup>  $\pi$  de  $\Phi$  para  $\{\top, \perp\}$ . Dizemos que  $\varphi$  é *verdadeiro sob uma valoração*  $\pi$  se  $\pi(\varphi) = \top$ . Uma fórmula  $\varphi$  é dita *satisfatível* se, e somente se, existe  $\pi$  tal que  $\pi(\varphi) = \top$ . Diz-se que  $\varphi$  é *válida* (*tautologia*) se  $\pi(\varphi) = \top$  para qualquer valoração  $\pi$ , denotamos a validade de  $\varphi$  por  $\models \varphi$ . Um resultado imediato é que  $\varphi$  é válida se, e somente se,  $\neg\varphi$  não é satisfatível. Ainda, vale o seguinte teorema:

### Teorema 2.1

Para qualquer fórmula  $\varphi$  de **LP**  $\vdash \varphi$  se, e somente se,  $\models \varphi$ .

O teorema acima diz que as propriedades operacionais de  $\vdash$  espelham as de  $\models$ , ou seja, em **LP**, os conceitos de *verdade* e *validade* podem ser tratados operacionalmente. Esta é uma das principais razões para se buscar a *correção* e a *completude*, poder mecanizar via manipulação sintática o que se deseja retratar semanticamente.

## 3. A Lógica Modal Proposicional

A lógica modal costuma ser caracterizada como a *lógica da necessidade e possibilidade* por serem estas as modalidades mais investigadas, os símbolos usuais para

<sup>3</sup>Note que  $\rightarrow$  é um símbolo de **LP** e que  $\Rightarrow$ , utilizado no parágrafo anterior, não.

<sup>4</sup>Pelo critério da *Composicionalidade*, de Frege, (grosseiramente, a semântica do todo é determinada pela semântica das partes. Por exemplo, saberei o valor de  $\pi$  para  $p \wedge p_2$ , se souber os valores de  $p$  e  $p_2$ .) podemos estender o domínio de  $\pi$  para  $\text{LP}(\Phi)$ , pois a semântica de uma fórmula depende unicamente da semântica atribuídas às suas partes, por exemplo, a semântica para a fórmula  $(\varphi \wedge \psi)$  depende única e exclusivamente da semântica atribuída a  $\varphi$  e  $\psi$ .

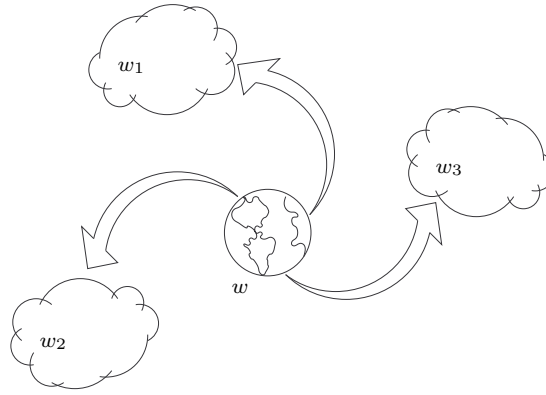
representar tais modalidades são  $\Box$  e  $\Diamond$ , respectivamente. Tais operadores não são como os conectivos de LP, pois, em geral, não se pode determinar a semântica de uma expressão da forma  $\Box\varphi$  ou  $\Diamond\varphi$ , unicamente a partir da semântica atribuída a  $\varphi$ , são exceções: *se  $\varphi$  é verdadeira, então  $\Diamond\varphi$  também é verdadeira, e se  $\varphi$  é falsa, então  $\Box\varphi$  também é*. Logo, os operadores modais não podem ser caracterizados a partir dos conectivos clássicos e sua semântica difere da do cálculo proposicional clássico.

Definimos os elementos sintáticos da lógica modal proposicional (LM) como extensão de LP( $\Phi$ ). Considerando a linguagem de LP e o operador  $\Box$  definimos LM( $\Phi$ ) como sendo o menor conjunto contendo LP( $\Phi$ ) e tal que se  $\varphi \in \text{LM}(\Phi)$ , então  $(\Box\varphi) \in \text{LM}(\Phi)$ . Os esquemas de axiomas de LM são: todas as tautologias de LP e  $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ , para  $\varphi, \psi \in \text{LM}(\Phi)$ . Além da regra MP (adequada a LM), temos a *regra de generalização modal (GM)*:  $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$ . Esta regra pode ser entendida como *tudo que é derivável de verdades necessárias é necessariamente verdadeiro*, isto é, *teoremas são verdades necessárias*. Os conceitos de *prova* e *teorema* em LM são introduzidos *mutatis mutandis*, como feito em LP.

### 3.1. A semântica dos mundos possíveis

Em geral, adota-se a *semântica dos mundos possíveis*<sup>5</sup> (*semântica de Kripke*) para as diversas aplicações da lógica modal proposicional, por ser mais intuitiva e oferecer recursos tais que qualquer mudança na axiomática pode ser capturada pelas diferentes leituras do termo *mundo possível*.

Basicamente, a semântica atribuída aos elementos sintáticos de LM deve preservar as características de LP e ser adequada ao operador  $\Box$ . Entende-se que um fato  $\varphi$  é *necessariamente verdadeiro* se, e somente se, este fato se verifica sob qualquer interpretação.

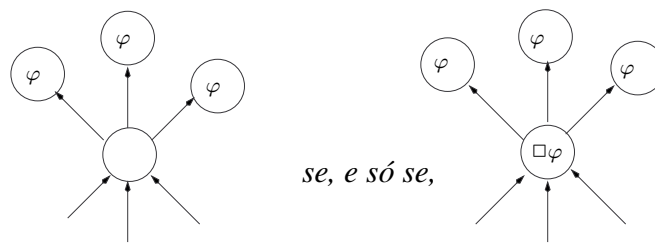


**Figura 1:** O fato  $\varphi$  é verdadeiro em  $w$  se, e só se,  $\varphi$  é verdadeiro em todas as interpretações possíveis, a partir de  $w$ . Ou seja,  $\Box\varphi$  é verdadeiro em  $w$  se, e só se,  $\varphi$  é verdadeiro sob qualquer interpretação, a partir de  $w$ .

Em termos de *mundo possível* dizemos que  $\Box\varphi$  é verdadeiro num mundo  $w$  se, e só se,  $\varphi$  é verdadeiro em todos os mundos  $w'$  acessíveis a partir de  $w$  - graficamente exposto na Figura 2.

A formalização dessa semântica, portanto das noções de *satisfatibilidade* e *validade*, se dá por meio das estruturas de Kripke. Note que a semântica de LP era apenas uma *função de verdade*  $\pi$ , isto é, dada qualquer fórmula em LP ou ela é verdadeira ou é falsa. No caso de LM isto não ocorre, a semântica é uma *estrutura relacional* na qual a *função de verdade*  $\pi$  é apenas uma das componentes.

<sup>5</sup>idéia da semântica dos mundos possíveis é devido a Leibniz.



**Figura 2:** Um mundo onde  $\Box\varphi$  é verdadeiro.

Uma *estrutura de Kripke*  $M$  é uma 3-upla  $\langle W, \pi_W, \mathcal{R} \rangle$ , com  $\pi_W$  conjunto de todas as interpretações modais referentes aos mundos em  $W$  e  $\mathcal{R}$  relações sobre  $W$ . A *relação de satisfatibilidade* ( $\models$ ), em LM, associa uma fórmula a uma estrutura e um mundo do seguinte modo:

- 1)  $(M, w) \models \varphi$  com  $\varphi \in \Phi$  se, e só se,  $\pi_w(\varphi) = \top$ ,
- 2)  $(M, w) \models \neg\varphi$  se, e só se,  $(M, w) \not\models \varphi$ ,
- 3)  $(M, w) \models \varphi \rightarrow \psi$  se, e só se,  $(M, w) \not\models \varphi$  ou  $(M, w) \models \psi$ ,
- 4)  $(M, w) \models \Box\varphi$  se, e só se,  $(M, t) \models \varphi$  para todo  $t$  tal que  $(w, t) \in \mathcal{R}$ .

As três primeiras cláusulas da definição são análogas às de LP, a última cláusula formaliza a idéia descrita anteriormente (vide figuras 1 e 2).

Para caracterizar as propriedades do operador modal definimos o conceito de fórmulas *válidas em relação a uma estrutura*  $M$  e fórmulas *válidas em relação a uma classe*  $\mathcal{M}$  de estruturas. Fixado  $\Phi$  denotamos por  $\mathcal{M}$  a *classe de todas as estruturas de Kripke* sobre  $\Phi$  sem nenhuma restrição sobre as relações  $\mathcal{R}$ . Assim, dizemos que uma fórmula  $\varphi$  é *satisfeita em*  $(M, w)$  se, e só se,  $(M, w) \models \varphi$ . Uma fórmula  $\varphi$  é dita ser *satisfatível em relação a*  $M$  se  $(M, w) \models \varphi$ , para algum mundo  $w$  em  $W$  de  $M$ . Uma fórmula  $\varphi$  é *satisfatível em relação a uma classe*  $\mathcal{M}$  se  $\varphi$  é satisfatível em alguma estrutura  $M$  de  $\mathcal{M}$  ( $(\mathcal{M}, M) \models \varphi$ ). Dizemos que  $\varphi$  é *válida em relação a uma estrutura*  $M$  ( $M \models \varphi$ ), se  $(M, w) \models \varphi$ , para todo  $w$  ( $w \in W$ ). A validade de uma fórmula  $\varphi$  em relação a uma classe  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \models \varphi$ ), ocorre se  $\varphi$  for válida em todas as estruturas  $M$  de  $\mathcal{M}$ .

Veja que a semântica para LM, caracterizada pela noção de *mundo possível*, é uma *estrutura relacional* e engloba a semântica de LP. Some a essa semântica a variedade de leituras atribuídas ao operador modal  $\Box$ , o resultado é a diversidade de aplicações da lógica modal. Por exemplo, em PDL (*Program Dinamic Logic* - [Pratt, 1980]) um mundo possível pode ser interpretado como sendo o *estado de um programa*, já na *lógica modal temporal* um mundo possível pode ser considerado um *ponto no tempo* ([Fagin and Vardi, 1985, pág. 2] e [Rijke, 1992, pág. 2]). Para capturar a noção de *conhecimento de uma sentença* devemos entender o significado do termo "conhecer" por *afirmar as condições sob as quais a sentença é verdadeira*, ou seja, é saber *como seria o mundo se a sentença fosse verdadeira*. Essa correlação, em termos de mundos possíveis, fornece a seguinte idéia: *o conhecimento corresponde a uma relação da qual se pode determinar em qual mundo nos encontramos* ([Halpern and Y., 1992, pág. 323]). A seção seguinte trata da lógica modal e a noção de conhecimento, num próximo artigo publicaremos sobre o uso da lógica modal aplicada à programação e a banco de dados temporais.

#### 4. Conhecimento e representação de conhecimento

A utilização da semântica dos mundos possíveis para representar conhecimento foi primeiro<sup>6</sup> formalizada por Hintikka ([Hintikka, 1982, pág. 93]) e pode ser resumida

<sup>6</sup>Kanger em 1957 explicitou uma semântica (standard) para a lógica modal ([Hintikka, 1982, pág. 93]).

do seguinte modo (veja a Figura 1): *considere um agente  $i$ , localizado em um mundo  $w$  (este é o mundo real de  $i$ ). Seja  $W$  o conjunto de todas as interpretações (mundos<sup>7</sup>) possíveis de  $w$ . Se  $W'$  ( $W' \subseteq W$ ) é o conjunto das interpretações possíveis de  $w$  segundo a percepção de  $i$ , então  $i$  conhece  $\varphi$ , em  $w$ , se, e somente se,  $\varphi$  se verifica em todas as interpretações  $w'$  de  $W'$ .*

A noção de conhecimento, como descrito anteriormente, pode ser formalmente caracterizada pela noção de *interpretação modal* ( $\pi_w$ ), que estende o conceito de *interpretação* ( $\pi$ ) em LP, pois uma função de *bivaloração* pode ser entendida (intuitivamente) como sendo uma certa descrição da realidade (um mundo possível). Assim, uma *interpretação modal* é uma função de  $\Phi$  em  $\{\perp, \top\}$  referente a um mundo  $w$ . Note que ao nos referirmos a um mundo possível  $w$  estamos nos referindo a uma possível interpretação modal que identificamos por  $\pi_w$ , isto é, dizer que *existe um mundo possível  $w$*  significa dizer que *existe uma possível interpretação  $\pi_w$  das proposições primitivas que compõe  $w$  que pode ser qualquer uma entre as  $2^{|\Phi|}$  existentes*. Evidentemente, se  $W$  é um subconjunto do conjunto de todos os mundos possíveis referentes ao domínio de  $\Phi$ , então  $W$  possui  $|W|$  referências e cada uma delas com  $2^{|\Phi|}$  possibilidades de escolha. Finalmente, a noção intuitiva de conhecimento se efetiva através do conceito de validade, para isso são cruciais as relações  $\mathcal{K}_i$  ( $\mathcal{K}_i \subseteq W \times W$ ,  $i \in \Delta$ ) entre o "mundo real"  $w_0$  e suas possíveis descrições alternativas, de acordo com a visão de  $i$  sobre  $w_0$ .

A formalização dos sistemas de conhecimento é obtido através da releitura de LM e pela inclusão de outros axiomas obtemos diferentes sistemas de conhecimento. Mas isso fica para outra ocasião.

## Referências

- Boolos, G. (1993). *The Logic of Provability*. Cambridge University Press.
- Carpenter, B. (1997). *Type-Logical Semantics*. MIT Press.
- Chiara, M. L. D. (1986). Quantum logic. In Gabbay, D. and Guenther, F., editors, *Handbook of Philosophical Logic. Vol. III: Alternatives to Classical Logic*, pages 427–469. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht. Cap.: III.7.
- Emerson, E. A. (1990). Temporal and modal logics. In van Leewen, J., editor, *Handbook of Theoretical Computer Science. Vol. B: Formal Models and Semantics*, pages 995–1072. Elsevier.
- Fagin, R., Halpern, J. Y., Y., M., and Vardi, M. Y. (1995). *Reasoning About Knowledge*. The MIT Press.
- Fagin, R. and Vardi, M. Y. (1985). An internal semantics for modal logic: Preliminary report. Technical report, University of Cambridge.
- Fagin, R. and Vardi, M. Y. (1986). Knowledge and implicit knowledge in a distributed environment: Preliminary report. In *Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of the 1986 Conference - Edited by Joseph Y. Halpern*.
- Fischer, M. J. and Immerman, N. (1986). Foundations of knowledge for distributed systems. In *Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Proceedings of the 1986 Conference - Edited by Joseph Y. Halpern*.
- Girle, R. (2000). *Modal Logics and Philosophy*. Acumen Publishing.

---

<sup>7</sup>Um mundo possível não deve ser entendido como uma alternativa para o mundo real, mas como uma alternativa de alguma descrição do mundo real.

- Halpern, J. Y. and Y., M. (1990). Knowledge and common knowledge in a distributed environment. *Journal of ACM*, 37(3):549–587.
- Halpern, J. Y. and Y., M. (1992). A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. *Artificial Intelligence*, 54:319–379.
- Hennessy, M. (1984). Axiomatizing finite delay operators. *Acta Informatica.*, 21:61–168.
- Hennessy, M. and Milner, R. (1985). Algebraic laws for non-determinism and concurrency. *Journal of Association for Computing Machinery.*, 32:137–161.
- Hintikka, J. (1982). Is alethic modal logic possible? *Acta Philosophica Fennica*, 35.
- Massacci, F. (1998). Tableaux methods for formal verification of multi-agent distributed systems. *Journal of Logic Computat.*, 8(3):373–400.
- Milgrom, P. (1981). An axiomatic characterization of common knowledge. *Econometrica*, 49(1).
- Milner, R. (1981). A modal characterization of observable machine-behaviour. *Lecture Notes in Computer Science.*, 112:25–34.
- Mints, G. (1992). *Short Introduction to Modal Logic*. CSLI Publications.
- Montague, R. (1963). Syntactical treatments of modality with corollaries on reflection principle and finite axiomatizability. *Acta Fennica.*, 16(2):153–167.
- Morril, G. (1996). Grammar and logic. *Theoria*, 62(Parte-3):260–293.
- Park, D. (1981). Concurrency and automata on infinite sequences. *Lecture Notes in Computer Science*, 104.
- Pratt, V. R. (1976). Semantical considerations on floyd-hoare logic. In *Proc. 17th IEEE Symp. Foundations of Computer Science.*, pages 109–121.
- Pratt, V. R. (1979). Model of program logics. In *Proc. 20th IEEE Symp. Foundations of Computer Science.*, pages 115–122.
- Pratt, V. R. (1980). Application of modal logic to programming. *Studia Logica.*, 34:357–374.
- Rijke, M. d. (1992). A system of dynamic modal logic. Technical report, University of Cambridge.
- van Benthem, J. (1983). *Modal Logic and Classical Logic*. Monographs in Philosophical Logic and Formal Linguistics. Bibliopolis.
- van Benthem, J. (1988). *A Manual of Intensional Logic*. Lecture Notes. Center of the Study of Language and Information.
- Yamamoto, F. S. (2003). *Sistemas Modais de Conhecimento*. Tese de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo.