Aproximação de Funções e o Método dos Mínimos Quadrados

Antonio Elias Fabris

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatistica
Universidade de São Paulo

O Problema

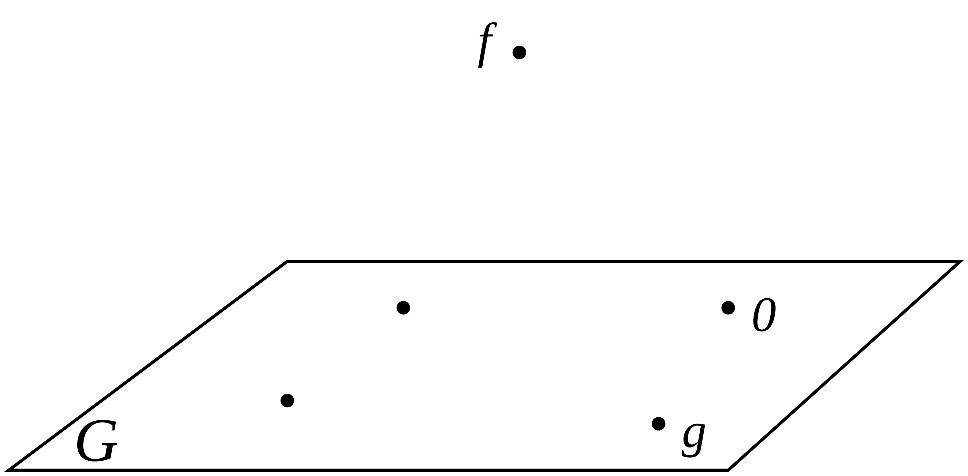
- Seja f uma função contínua definida em $[a, b]$ e G uma família de funções definidas por expressões da forma

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_n g_n(x)$$

  Nosso problema consiste em aproximar f por uma função da família G.

- Exemplo: Aproximar $f(x) = \mathtt{arctan}(x), -1 \leq x \leq 1$, por um elemento da família de polinômios

  $G = \{g(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ : \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\}$



Algumas aplicações

O problema proposto é considerado quando:

- f supõe consultas a tabelas
- f é definida através de processos não-finitos
- f é definida implicitamente como solução de uma equação

Solução

- Basicamente, em duas etapas:
  - Escolha da família G de aproximantes para f
  - Definir critério para determinação de $g \in G$, i.e., para a determinação dos coeficientes

$$c_1, c_2, \cdots, c_n$$

- Exemplo: Aproximar $f(x) = \text{arctan}(x), -1 \leq x \leq 1$.
  - $G = \{g(x) = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 \; : \; x \in [-1, 1], \;\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\}$
  - Determinar $c_1, \; c_2, \; c_3$ de modo a minimizar

$$\begin{aligned} r(x) &= g(x) - f(x) \\ &= c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 - f(x) \end{aligned}$$

Escolha da família G

As funções da família G devem satisfazer as seguintes propriedades:

- Serem calculáveis num número finito de operações aritméticas.
  - Possibilita implementação computacional
  - Exemplo: Polinômios, Splines, etc.

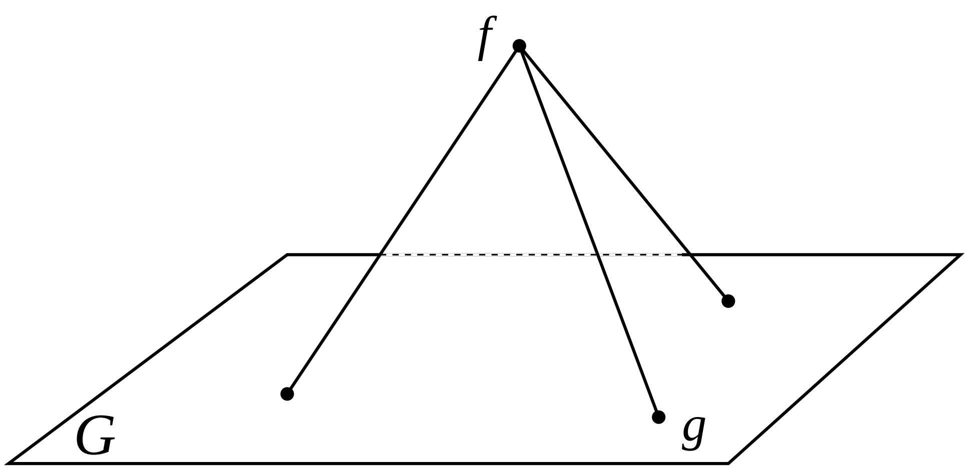
- Possuirem características comuns com a função f. Por exemplo,
  - f periódica $\Rightarrow G$ espaço de funções periódicas,
  - f monotônica crescente $\Rightarrow G$ espaço de funções monotônicas crescentes, etc.

Determinação dos coeficientes

Os coeficientes $c_1, \cdots, c_n$ seram determinados com o objetivo de minimizar o resíduo

$$\begin{aligned} r(x) &= g(x) - f(x) \\ &= c_1 g_1(x) + \cdots + c_n g_n(x) - f(x) \end{aligned}$$

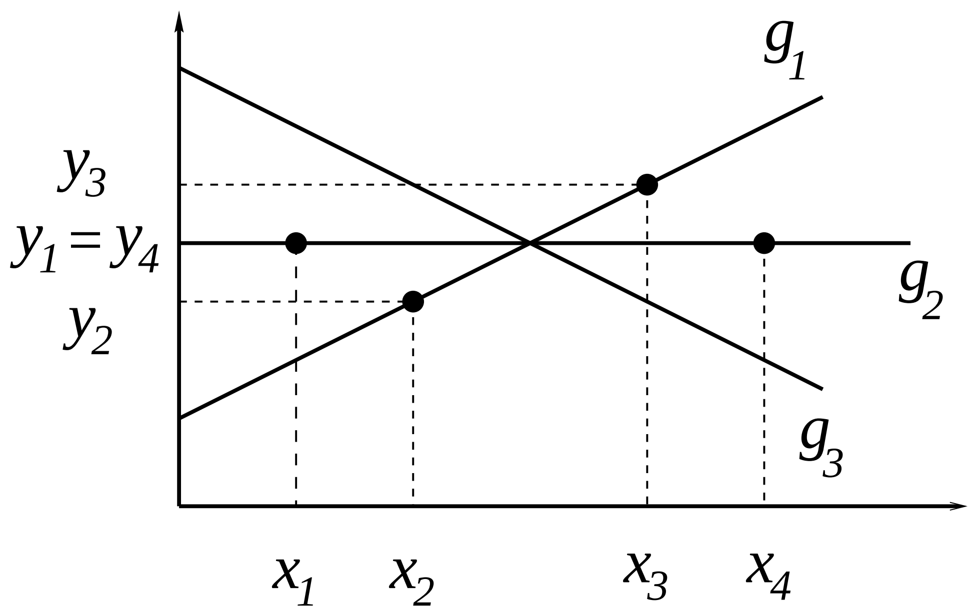
no intervalo $[a, b]$ ou num número finito de pontos.



$$G = \{g(x) = c_1 g_1(x) + \cdots + c_n g_n(x) \;:\; x \in [a, b],\ c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{R}\}$$

Tentativa 1: Critério de Aproximação

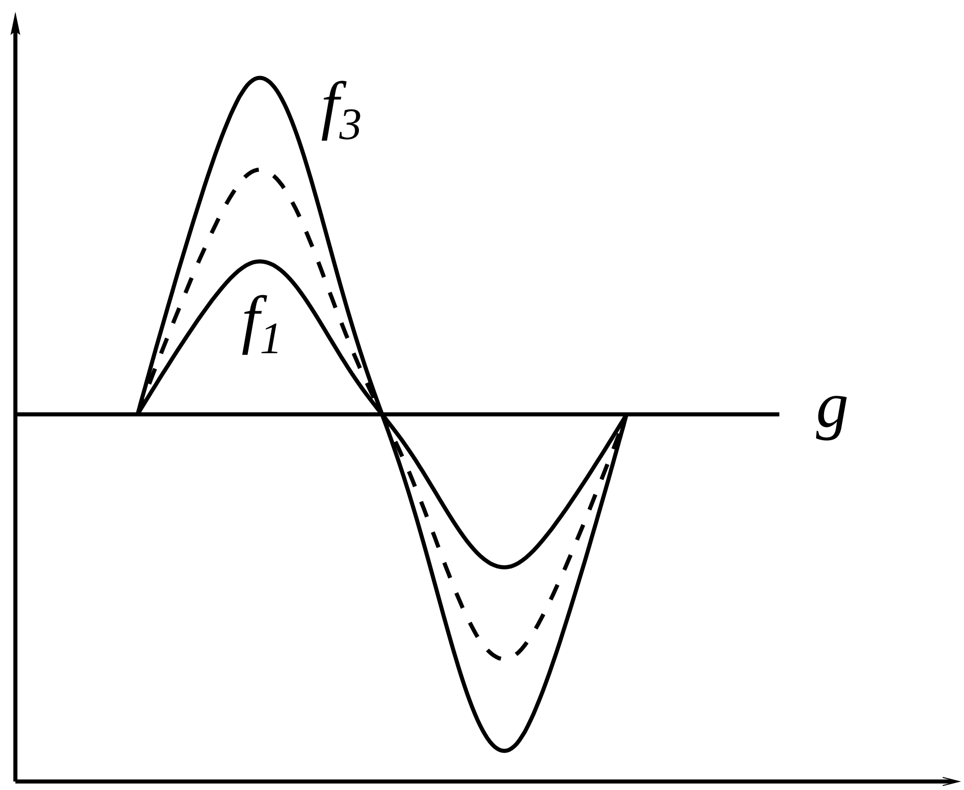
- Tres aproximações para uma função f tabelada em 4 pontos



- $\sum_{i=1}^{4} r_j(x_i) = \sum_{i=1}^{4} [f_i - g_j(x_i)] = 0 \qquad j = 1, 2, 3$

Critério no caso contínuo

- Diversas funções f sendo aproximadas pela mesma função constante g



- Em todos os casos:

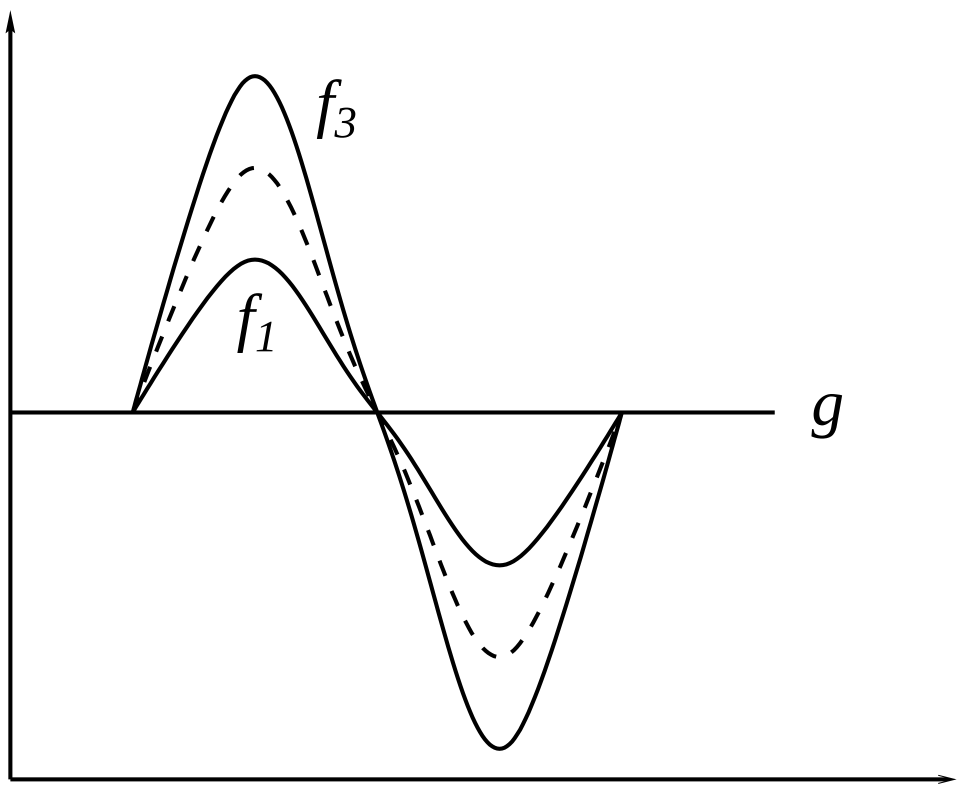
$$r_i = \int (f_i(x) - g(x))dx = 0$$

Tentativa 2: Critério de Aproximação

- Se utilizarmos

$$r_i = \int |f_i(x) - g(x)| dx$$

então $r_i \neq 0$.



- Mas $|\cdot|$ não-diferenciável na origem $\Rightarrow$ dificuldades na determinação do erro mínimo

Critério de Aproximação: escolha

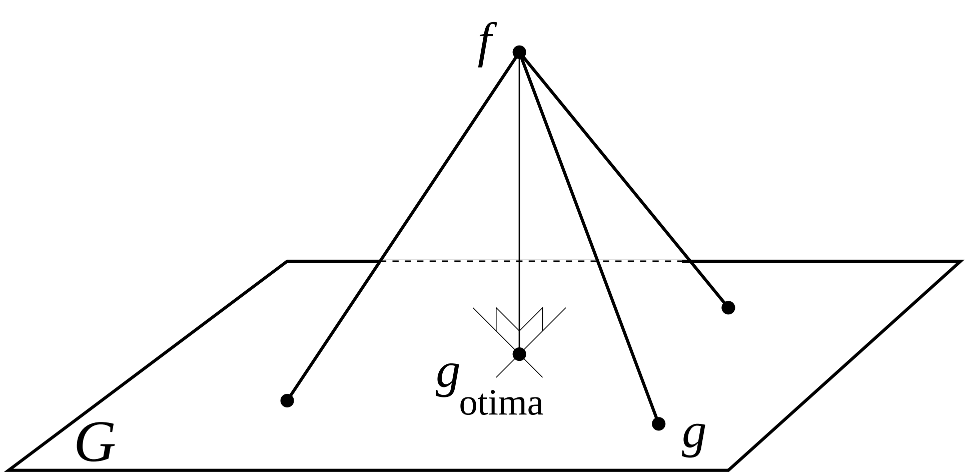
- Se utilizarmos

$$r = \int (f(x) - g(x))^2 dx \qquad \text{ou}$$

$$r = \sum_i (f(x_i) - g(x_i))^2 \ ,$$

as dificuldades anteriores desaparecem e então poderemos calcular o erro mínimo

- Ou seja, podemos calcular a aproximação g que nesse caso é uma aproximação ótima para f.



Distância entre funções

- **Definição 1**. Sejam f e g contínuas em a, b. Indicaremos por $(f|g)$ o número real

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \ ,$$

produto escalar (ou interno) entre f e g.

- **Definição 2**. Sejam $x_0, x_1, \cdots, x_m$ elementos distintos do intervalo $[a, b]$. Indicaremos com a mesma notação da Definição 1, o número real

$$(f|g) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)g(x_i)$$

- Ao produto escalar $(f|g)$ está associada a distância

$$dist(f|g) = (f - g|f - g)^{1/2}$$

- Note, por exemplo, no caso contínuo que

$$dist^2(f|g) = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$

Método dos Mínimos Quadrados

- $g(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \cdots + c_m g_m(x)$

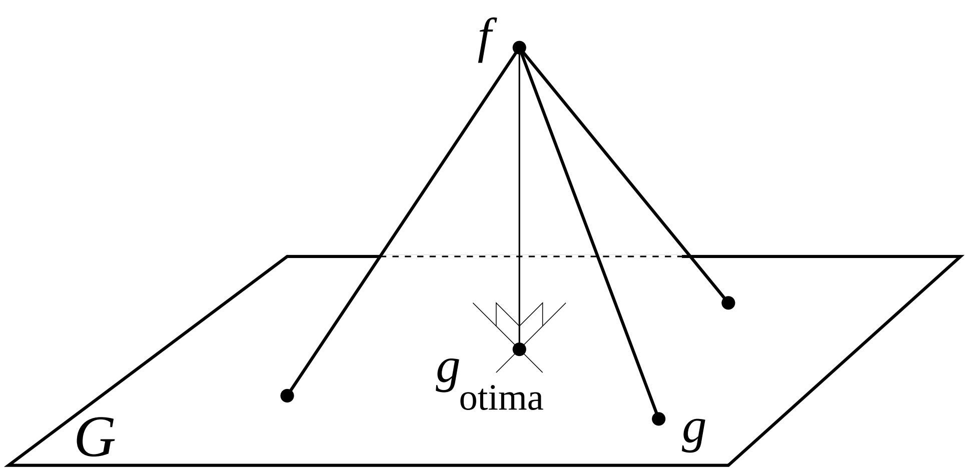
- **Definição**. O Método dos Mínimos Quadrados consiste em determinar $c_0, c_1, \cdots, c_m$ que minimizam

$$(r|r) = \int_a^b r^2(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$

ou

$$(r|r) = \sum_{i=0}^{m} r^2(x_i) = \sum_{i=0}^{m} (f(x_i) - g(x_i))^2$$

conforme o produto escalar adotado.



Cálculo da aproximação pelo MMQ

- $g(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \cdots + c_m g_m(x)$

- **Teorema**. Seja

$$\left[\begin{array}{cccc} (g_0|g_0) & (g_0|g_1) & \cdots & (g_0|g_m) \\ (g_1|g_0) & (g_1|g_1) & \cdots & (g_1|g_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (g_m|g_0) & (g_m|g_1) & \cdots & (g_m|g_m) \end{array} \right]$$

Se det $A \neq 0$ então :

(1). Existe um único conjunto de parâmetros

$$(c_0, c_1, \cdots, c_m)$$

que minimiza $(r|r)$.

(2). $(c_0, c_1, \cdots, c_m)$ é solução do sistema linear

$$Ac = \left[\begin{array}{c} (g_0|f) \\ (g_1|f) \\ \cdots \\ (g_m|f) \end{array} \right]$$