Polinômios Ortogonais e Análise Harmônica

Antonio Elias Fabris

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatistica
Universidade de São Paulo

Escolha da base do espaço G

$$f(x)$$

$$g(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \cdots c_m g_m(x)$$

$\{g_0, g_1, \cdots g_m\}$ é base do espaço de funções G.

- **Exemplo**. A aplicação do MMQ usando a base polinomial canônica conduz a um sistema linear mal condicionado. Verifique:
  - Aproximar $f(x) = 1/(1+x),\ 0 \leq x \leq 1$, por

    $$g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

    e resolver o sistema resultante pelo Método de Gauss com pivotação utilizando 2 algarismos significativos.

Funções ortogonais e o MMQ

- **Definição** Dizemos que $g_0, g_1, \cdots, g_m$ são funções ortogonais se $(g_i|g_j) = 0$ para $i \neq j$.

- **Observação**: Essa definição depende evidentemente da definição adotada para $(g_i|g_j)$.

- Se usarmos no MMQ uma base de funções ortogonais obteremos o sistema normal

$$\begin{bmatrix} (g_0|g_0) & & \\ & \cdots & \\ & & (g_m|g_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \cdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_0|f) \\ \cdots \\ (g_m|f) \end{bmatrix}$$

de solução imediata:

$$c_k = \frac{(g_k|f)}{(g_k|g_k)} \qquad k = 0, 1, \cdots, m \tag{1}$$

Vantagens da base ortogonal

- **(a)** Redução drástica da propagação de erros de arredondamento.

- **(b)** Elevação da dimensão do espaço de aproximantes G pela simples adição de mais um termo.

  De fato, nesse caso o coeficiente c_k só depende de g_k e consequentemente:

  – ao acrescentarmos um termo $c_{m+1}g_{m+1}$, com g_{m+1} ortogonal a $g_0, g_1, \cdots g_m$ não precisaremos recalcular os coeficientes $c_0, c_1, \cdots c_m$, pois estes não dependerão de g_{m+1}.

- Se G é um espaço de polinômios relembramos que aumentar a dimensão de G corresponde a elevar o grau do polinômio aproximante. Evidentemente podemos diminuir a dimensão do espaço ou o grau do polinômio de modo análogo.

Cálculo de polinômios ortogonais

Teorema. Polinômios ortogonais $p_0, p_1, \cdots p_m$ satisfazem a relação de recorrência :

$$p_k = (x - a_k)p_{k-1} - b_k p_{k-2}$$

onde

$$a_k = \frac{(xp_{k-1}|p_{k-1})}{(p_{k-1}|p_{k-1})} \ ,$$

$$b_k = \frac{(xp_{k-1}|p_{k-2})}{(p_{k-2}|p_{k-2})} \ ,$$

$p_0 = 1$ e $p_{-1} = 0$.

Exercícios

1. Construir os tres primeiros polinômios ortogonais com relação ao produto escalar

$$(f|g) = \sum_{i=1}^{5} f(i)g(i)$$

2. Ajuste os pontos da tabela

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	2	4	8	10

por um polinômio do 2o. grau através do MMQ, utilizando os polinômios ortogonais obtidos no exercício anterior.

Análise Harmônica

- **Definição** A aproximação de $f(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ por uma função da família

  $$a_0 + \underbrace{a_1 \cos x + b_1 \sin x} + \cdots + \underbrace{a_m \cos x + b_m \sin x}$$

  usando o MMQ e o produto escalar

  $$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \;, \tag{2}$$

  é chamada de **Análise Harmônica de ordem m**. Se utilizarmos o produto escalar

  $$(f|g) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)g(x_i) \tag{3}$$

  a aproximação é chamada **Análise Harmônica Discreta de ordem m**.

- **Observação**: Quer se adote (2) ou (3) como definição de $(f|g)$, as funções

  $$a_0,\; a_1 \cos x,\; b_1 \sin x,\; \cdots\; a_m \cos x, b_m \sin x$$

  são **ortogonais** entre si.

Cálculo dos coeficientes

- **Observação**: Resolvendo o sistema normal diagonal (veja fórmula (1), pag. 3) temos que:

$$a_k = \frac{(\cos kx|f)}{(\cos kx|\cos kx)} \qquad k = 0, 1, \cdots m$$

$$b_k = \frac{(\sin kx|f)}{(\sin kx|\sin kx)} \qquad k = 1, 2 \cdots m$$

- **Proposição**: No caso contínuo, os coeficientes da Análise Harmônica da função f são:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \qquad k = 1, \cdots m$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \qquad k = 1, \cdots m$$

Prova: Use a observação da pág. 7 com o produto escalar contínuo do MMQ (fórmula (2) pág. 7).

Coeficientes no caso discreto

Proposição: No caso discreto, os coeficientes da Análise Harmônica da função f são:

$$a_0 = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{2m} f(x_j)$$

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{2m} f(x_j) \cos(kx_j) \qquad k = 1, \cdots m$$

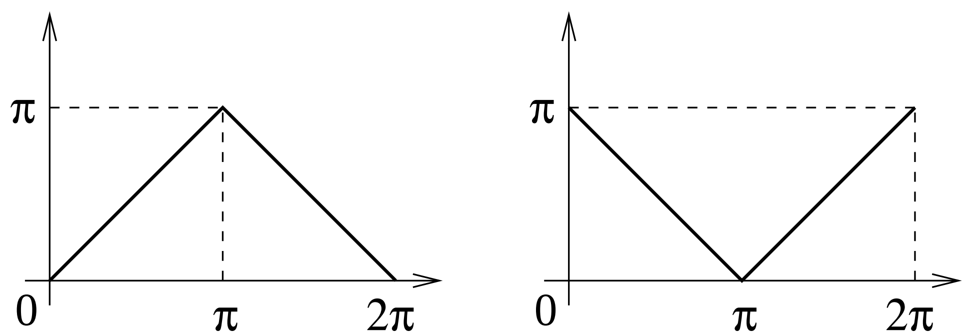
$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{2m} f(x_j) \sin(kx_j) \qquad k = 1, \cdots m$$

Prova: Use a Observação 3 com o produto escalar discreto do MMQ (fórmula (3) pág. 5)

Exercícios

3. Aproximar a função dada através dos gráficos abaixo por uma função da família

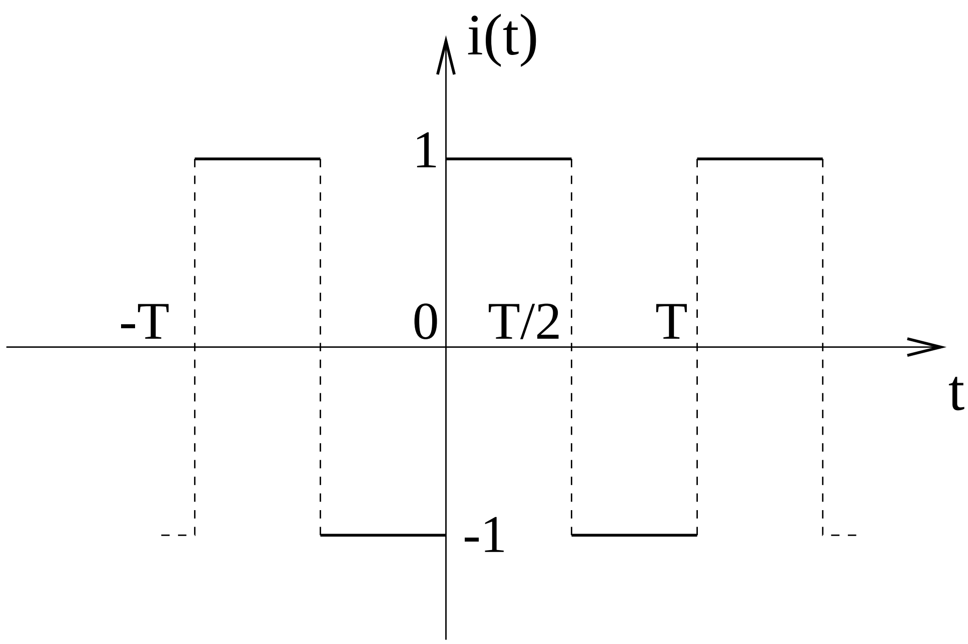
$$G = \{g(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x\}$$



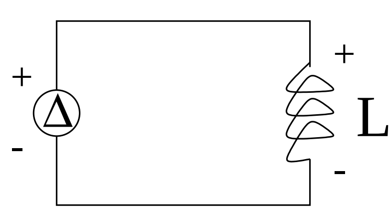
(A) (B)

Exercícios

4. Consideremos um circuito elétrico com indutância $L = 1$ e corrente fornecida pelo gerador na forma indicada no gráfico:



Deseja-se saber qual é a tensão $v(t)$ no indutor.



Solução do exercício 4

- O modelo matemático deste problema é descrito por

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{di(t)}{dt}$$

- Como $i(t)$ é descontínua para múltiplos de $t = \frac{T}{2}$, uma solução aproximada de $v(t)$ pode ser obtida através da substituição de $i(t)$ por uma função contínua e diferenciável em $[0, T]$.

- Sendo $i(t)$ periódica iremos substituí-la, após uma conveniente mudança de variável, por um polinômio trigonométrico que é uma função periódica, contínua e diferenciável.

  – Faça análise harmônica de ordem 3