

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
MAP214 – Cálculo Numérico e Aplicações

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Antonio Elias Fabris

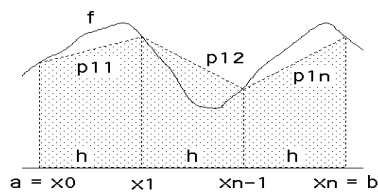
2º Semestre de 2009

Slide 1

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

“Estimar $I = \int_a^b f(x)dx$ onde f é contínua e suficientemente derivável em $[a, b]$ ”

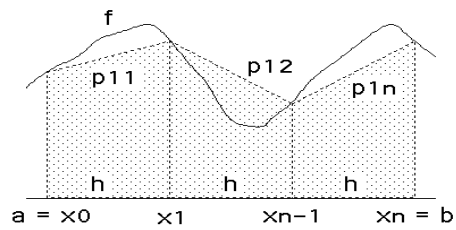
Método dos Trapézios em $[x_0, x_1]$



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_{11}(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Slide 2

Erro do Método dos Trapézios em $[x_0, x_1]$



$$E_{\mathbb{T}}^1 = \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - p_{11}(x))dx \stackrel{*}{=} -\frac{1}{12}h^3 f''(\epsilon_1)$$

$$x_0 \leq \epsilon_1 \leq x_1$$

Veja demonstração de (*) na pág. 6, Proposição 1

Slide 3

Fórmula dos Trapézios em $[a, b]$

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\underbrace{\frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]}_{\text{trapezoido 1}} + \underbrace{\frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)]}_{\text{trapezoido 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]}_{\text{trapezoido n}}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Slide 4

Erro do Método dos Trapézios em $[a, b]$

$$E_T = \sum_{i=1}^n E_T^i \quad \implies \quad E_T = -\frac{nh^3}{12} f''(\epsilon) \quad a \leq \epsilon \leq b \quad (1)$$

Substituindo $h = (b - a)/n$ em (1) obtemos

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\epsilon) \quad a \leq \epsilon \leq b \quad (2)$$

Slide 5

Método de Simpson

Fórmula de Simpson em $[x_0, x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_{21}(x)dx$$

p_{21} é a parábola que interpola f nos pontos x_0, x_1 e x_2

Slide 6

Escrevendo p_{21} na Forma de Newton (passo constante h)

$$p_{21}(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}$$

Integrando o polinômio do segundo grau p_{21}

$$\int_{x_0}^{x_2} p_{21}(x)dx \stackrel{*}{=} \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Veja demonstração de (*) na pág. 6, Proposição 2

Slide 7

Erro do Método de Simpson em $[x_0, x_2]$

$a = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_{2n-2} \quad x_{2n-1} \quad x_{2n} = b$

$$E_S^1 = \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_{21}(x)) dx \stackrel{*}{=} -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\epsilon_1) \quad x_0 \leq \epsilon_1 \leq x_2$$

Veja demonstração de (*) na pág. 7, Proposição 3

Slide 8

Fórmula de Simpson em $[a, b]$

$$\int_{a=x_0}^{b=x_{2n}} f(x) dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \approx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} p_{21}(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} p_2^2(x) dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} p_2^n(x) dx =$$

$$\underbrace{\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}_{\text{Simpson's rule on } [x_0, x_2]} + \underbrace{\frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]}_{\text{Simpson's rule on } [x_2, x_4]} + \cdots$$

$$+ \underbrace{\frac{h}{3} [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]}_{\text{Simpson's rule on } [x_{2n-2}, x_{2n}]}$$

Slide 9

Fórmula de Simpson em $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]$$

Erro do Método de Simpson em $[a, b]$

$$E_{\mathbb{S}} = \sum_{i=1}^n E_{\mathbb{S}}^i \implies E_{\mathbb{S}} = -\frac{nh^5}{90}f^{(4)}(\epsilon) \quad a \leq \epsilon \leq b \quad (3)$$

Substituindo $h = (b - a)/2n$ em (3) obtemos

$$E_{\mathbb{S}} = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\epsilon) \quad (4)$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular pela fórmula dos trapézios e pela fórmula de Simpson

$$\int_0^{0.8} \frac{dx}{x^2 - 1}$$

com passo $h = 2$.

2. Calcular

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

para $x = 0.5$ pelas fórmulas dos trapézios e Simpson com $n = 3$. Comparar com o valor extraído de uma tabela $\operatorname{erf}(0.5) \approx 0.520500$.

3. Delimite o erro que se comete ao calcular

$$\int_0^{0.4} e^x dx$$

pela fórmula de Simpson com $h = 0.1$.

4. Deseja-se calcular

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

com erro inferior a $1/2400$ usando a fórmula dos trapézios. Qual deve ser o passo escolhido? Repita o exercício usando a fórmula de Simpson.

RESULTADOS AUXILIARES

A.1 - $f(x) = p_n(x) + R(x)$ onde p_n é polinômio interpolador de f nos pontos x_0, x_1, \dots, x_n de $[a, b]$ e

$$R(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}$$

A.2 - Se f não muda de sinal em $[a, b]$, existe $\epsilon \in [a, b]$ t.q.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\epsilon) \int_a^b g(x)dx$$

PROPOSIÇÃO 1 (Erro do Método dos Trapézios em $[x_0, x_1]$)

$$E_{\mathbb{T}}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - p_{11}(x))dx = -\frac{1}{12}h^3 f''(\epsilon_1) \quad x_0 \leq \epsilon_1 \leq x_1$$

Prova: Pelo resultado A.1

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - p_{11}(x))dx = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2!} dx$$

Fazendo a mudança de variável $x = x_0 + hz$ temos:

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) \frac{f''(\xi_x)}{2!} dx \stackrel{\text{M.V.}}{=} \int_0^1 hz(hz-h) \frac{f''(x_0 + \xi_z)}{2!} h dz = \frac{h^3}{2} \int_0^1 z(z-1) f''(x_0 + \xi_x h) dz$$

Pelo resultado A.2 temos

$$\frac{h^3}{2} \int_0^1 \underbrace{z(z-1)}_{g(z)} f''(x_0 + \xi_x h) dz \stackrel{\text{A.2}}{=} \frac{h^3}{2} f''(\epsilon_1) \underbrace{\int_0^1 z(z-1) dz}_{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{12} h^3 f''(\epsilon_1)$$

que prova a proposição 1.

PROPOSIÇÃO 2 Se p_{21} é o polinômio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ então

$$\int_{x_0}^{x_1} p_{21}(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Prova: Pela fórmula de Newton para diferenças simples

$$p_{21} = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}$$

Integrando p_{21} e fazendo a mudança de variável $x = x_0 + hz$ temos:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} [f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}] dx &\stackrel{\text{M.V.}}{=} \\ \int_0^2 [f(x_0) + z \Delta f(x_0) + z(z-1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}] h dz &\quad (5) \end{aligned}$$

Distribuindo e fatorando a integral (5) tem-se

$$h \left[f(x_0) \int_0^2 dz + \Delta f(x_0) \underbrace{\int_0^2 z dz}_2 + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} \underbrace{\int_0^2 z(z-1) dz}_{\frac{1}{3}} \right]$$

Lembrando que

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) \quad \text{e} \quad \Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0),$$

obtemos o resultado.

PROPOSIÇÃO 3 (Erro do Método de Simpson em $[x_0, x_2]$)

$$E_S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x_2} (f(x) - p_{21}(x)) dx = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\epsilon_1) \quad x_0 \leq \epsilon_1 \leq x_2$$

Prova: Análoga à prova da proposição 1; veja também a proposição 1.3 do livro texto, página 168.