

1 Polinômios

Neste seção, apresentaremos os resultados básicos sobre interpolação polinomial e diferenças divididas que servirão de apoio às seções posteriores.

Polinômios são utilizados em problemas de aproximação porque possuem uma representação computacional que permite a implementação de algoritmos relativamente simples: podem ser calculados, diferenciados e integrados facilmente, e num número finito de passos usando as operações aritméticas básicas de adição, subtração e multiplicação.

Um polinômio de ordem n (ou grau $n - 1$) é uma função da forma

$$p(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} = \sum_{j=1}^n a_jx^{j-1} \quad (1)$$

Designaremos por

$$\mathbb{P}_n$$

o espaço dos polinômios de ordem n .

Teorema 1.1 \mathbb{P}_n é um subespaço linear de $C^\infty(\mathbb{R})$ de dimensão n . Dado qualquer número real ζ , as funções $1, x - \zeta, \dots, (x - \zeta)^{n-1}$ constituem uma base de \mathbb{P}_n .

1.1 Interpolação Polinomial: base de Lagrange

Seja $\tau = (\tau_i)_{i=1}^n$ uma sequência de n pontos distintos. Então

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (2)$$

é o i -ésimo polinômio de Lagrange para a sequência τ . Observe que L_i é um polinômio de ordem n que anula-se em todos os pontos τ_j , com exceção do ponto τ_i onde assume o valor 1. Isto pode ser escrito com a ajuda da função delta de Kronecker:

$$L_i(\tau_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Portanto, para uma dada função arbitrária g ,

$$p = \sum_{j=1}^n g(\tau_j)L_j$$

é um elemento de \mathbb{P}_n e satisfaz

$$p(\tau_i) = g(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Isto mostra que os polinômios de Lagrange permitem escrever diretamente o polinômio que interpola g na sequência de pontos τ . Além disso, p é o único polinômio que interpola g em τ . De fato, se $q \in \mathbb{P}_n$ e $q(\tau_i) = g(\tau_i)$, para todo i , então $r = p - q$ é também um polinômio de ordem n que anula-se em n pontos distintos τ_1, \dots, τ_n e portanto deve ser o polinômio identicamente nulo, isto é, $q = p$. Os resultados desse parágrafo podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 1.2 (Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador) *Dados pontos distintos τ_1, \dots, τ_n e valores $g(\tau_1), \dots, g(\tau_n)$, existe um único polinômio $p \in \mathbb{P}_n$ tal que $p(\tau_i) = g(\tau_i)$, $i = 1, \dots, n$. Este polinômio pode ser escrito na base de Lagrange*

$$p = \sum_{i=1}^n g(\tau_i)L_i$$

onde $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - \tau_j) / (\tau_i - \tau_j)$

A representação do polinômio interpolador na base de Lagrange é bastante elegante. Mas comparada com outras representações está muito longe de ser a mais eficiente. Verifique isto avaliando o custo computacional da avaliação do polinômio interpolador na base de Lagrange. Compare o resultado com a representação na base de Newton que será apresentada a seguir.

Na prática, é frequente desconhecer-se quantos pontos de interpolação devem ser utilizados. Nesse caso, é geralmente necessário elevar-se (ou diminuir-se) convenientemente o grau do polinômio interpolador até que tenhamos uma aproximação satisfatória. A forma de Lagrange não permite reutilizar os polinômios já calculados para obter outro polinômio com grau maior (ou menor). Noutras palavras, suponha que tenhamos disponível, um polinômio interpolador na forma de Lagrange de grau $k - 1$. O cálculo de um polinômio de grau k na

forma de Lagrange deve ser feito de modo totalmente independente.

Outro problema da base de Lagrange, é que as estimativas do erro da interpolação nessa base são extremamente mais complexas se comparadas, por exemplo, com aquelas obtidas na base de Newton.

1.2 Diferenças Divididas e Interpolação na Base de Newton

Interpolação na base de Newton é reconhecida como o melhor compromisso entre facilidade de construção e eficiência computacional. Além disso, conduz a uma análise simples do erro de interpolação e utiliza interpolação polinomial osculatória sem esforço extra.

Definição 1.1 (Interpolação osculatória num ponto) *Seja $\tau = (\tau_i)_1^n$ uma sequência de pontos não necessariamente distintos. Seja x um ponto de τ que repete-se m vezes, $1 \leq m \leq n$. Dizemos que a função p coincide ¹ com a função g em x com multiplicidade m se*

$$p^{(i-1)}(x) = g^{(i-1)}(x) \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

A Definição 1.1 também é denominada *interpolação de Hermite* no ponto x , ou ainda, *interpolação repetida no ponto x* .

Definição 1.2 (Diferenças Divididas) *A k -ésima diferença dividida de uma função g nos pontos $\tau_i, \dots, \tau_{i+k}$ que escrevemos como*

$$[\tau_i, \dots, \tau_{i+k}]g$$

é o coeficiente principal (isto é, o coeficiente de x^k) do polinômio de ordem $k+1$ que coincide com g nos pontos $\tau_i, \dots, \tau_{i+k}$.

A Definição 1.2 tem as seguintes propriedades imediatas:

Propriedade 1.1 (Construção Iterativa) *Seja $p_i \in \mathbb{P}_i$ o polinômio que coincide com g em τ_1, \dots, τ_i para $i = k$ e $i = k+1$. Então*

$$p_{k+1} = p_k + (x - \tau_1)(x - \tau_2) \cdots (x - \tau_k) [\tau_i, \dots, \tau_{i+k}]g \quad (3)$$

¹Daqui por diante escreveremos simplesmente "p coincide com a função g" para expressar efetivamente o sentido da Definição 1.1, isto é, $p(\tau_i) = g(\tau_i)$ e, ocorrendo m repetições na sequência τ , teremos $p^{(i-1)}(x) = g^{(i-1)}(x)$ para $i = 1, \dots, m$.

A Propriedade (1.1) mostra que diferenças divididas podem ser utilizadas para construir o polinômio interpolador adicionando um ponto de interpolação por vez. Deste modo, obtemos:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_1(x) + (p_2(x) - p_1(x)) + \cdots + (p_n(x) - p_{n-1}(x)) \\ &= [\tau_1]g + (x - \tau_1)[\tau_1, \tau_2]g + \cdots + (x - \tau_1) \cdots (x - \tau_{n-1})[\tau_1, \cdots, \tau_n]g \end{aligned}$$

que é a forma de Newton (veja Teorema 1.3 na página 5). Essa propriedade mostra como as operações de ajuste do grau do polinômio interpolador ficam simplificadas na base de Newton.

Propriedade 1.2 A função $[\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}]g$ depende sómente dos números $\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}$ e não da ordem em que eles aparecem na lista. Dizemos que a função é simétrica nos seus argumentos $\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}$.

Propriedade 1.3 $[\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}]g$ é linear em g .

Propriedade 1.4 (Fórmula de Leibniz) Se $f = gh$ então

$$[\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}]f = \sum_{r=i}^{i+k} ([\tau_i, \cdots, \tau_r]g)([\tau_r, \cdots, \tau_{i+k}]h)$$

Propriedade 1.5 Se g é um polinômio de grau $\leq k$, então

$$[\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}]g \text{ é constante como função de } \tau_i, \cdots, \tau_{i+k}.$$

Em particular,

$$[\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}]g = 0 \quad \forall g \in \mathbb{P}_k$$

Propriedade 1.6 Se $g \in C^{(k)}$ então $[\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}]g$ é uma função contínua dos seus $k + 1$ argumentos.

Propriedade 1.7 Se $g \in C^{(k)}$ então existe um ponto ξ no menor intervalo contendo $\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}$ tal que

$$[\tau_i, \cdots, \tau_{i+k}]g = \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}$$

Propriedade 1.8 Para cálculos é importante notar que

$$[\tau_i, \dots, \tau_{i+k}]g = \begin{cases} \frac{g^{(k)}(\tau_i)}{k!} & \text{se } \tau_i = \dots = \tau_{i+k} \text{ e } g \in C^{(k)} \\ \frac{[\tau_i, \dots, \tau_{r-1}, \tau_{r+1}, \dots, \tau_{i+k}]g - [\tau_i, \dots, \tau_{s-1}, \tau_{s+1}, \dots, \tau_{i+k}]g}{\tau_r - \tau_s} & \forall \tau_r, \tau_s \in \{\tau_i, \dots, \tau_{i+k}\} \text{ com } \tau_r \neq \tau_s \end{cases}$$

As Propriedades 1.1 e 1.8 são extremamente importantes nas aplicações práticas e serão muito utilizadas na resolução de exercícios.

As Propriedades 1.7 e demais serão utilizadas para o importante problema da estimativa do erro da interpolação polinomial.

Teorema 1.3 (Forma de Newton e Interpolação Osculatória) Se $g \in C^{(n)}$ e $\tau = (\tau_i)$ é uma sequência de n pontos arbitrários não necessariamente distintos então

$$g(x) = p_n(x) + (x - \tau_1) \cdots (x - \tau_n) [\tau_1, \dots, \tau_n, x]g \quad (4)$$

com

$$p_n(x) = [\tau_1]g + (x - \tau_1) [\tau_1, \tau_2]g + \cdots + (x - \tau_1) \cdots (x - \tau_{n-1}) [\tau_1, \dots, \tau_n]g. \quad (5)$$

Em particular, $p_n(x)$ é o único polinômio de grau $n - 1$ que coincide com g em τ_1, \dots, τ_n .

O corolário seguinte fornece um modo de estimar o erro de interpolação polinomial. É consequência imediata da aplicação da Propriedade 1.7 no Teorema 1.3.

Corolário 1.1 (Estimativa do Erro da Interpolação Polinomial) Se $g \in C^{(n)}$, $\tau = (\tau_i)$ é uma sequência de n pontos arbitrários não necessariamente distintos e $p_n(x)$ é o único polinômio interpolador de g em τ então existe ξ_x no menor intervalo $[a, b]$ contendo τ_1, \dots, τ_n, x tal que

$$\|g - p_n\| \leq \max_{x \in [a, b]} |(x - \tau_1) \cdots (x - \tau_n) \frac{g^{(n)}(\xi_x)}{n!}| \quad (6)$$

Como mencionamos anteriormente, é importante notar que ao apresentar a base de Newton no Teorema 1.3, permitimos a ocorrência de pontos de interpolação com repetição na sequência τ . Assim, a interpolação de Hermite (ou, interpolação osculatória) é obtida como caso particular do Teorema 1.3. Consegue-se isso através da Definição 1.2, de diferenças divididas, que permite a repetição de pontos de interpolação nas sequência τ .

Corolário 1.2 (Interpolação osculatória e Série de Taylor) *Vamos identificar todos os pontos $\tau_1 \cdots \tau_n$ em (4) e (5), com um único ponto t :*

$$\tau_1 = \cdots = \tau_n = t.$$

Então, usando as Propriedades 1.7 e 1.8 obtemos

$$g(x) = p_n(x) + \frac{g^{(n)}(\xi_x)}{n!}(x-t)^n \quad \text{para algum } \xi_x \text{ entre } t \text{ e } x$$

com

$$p_n(x) = g(t) + g'(t)(x-t) + \frac{g^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \quad (7)$$

que é a conhecida série de Taylor truncada de g . Note que a série truncada (7) coincide com g em $\tau_1 = \cdots = \tau_n = t$ com multiplicidade n , isto é,

$$p_n(t) = g(t), \quad p'_n(t) = g'(t), \quad \cdots, \quad p_{n-1}^{(n-1)}(t) = g^{(n-1)}(t).$$

Observação 1.1 (Tabela de Diferenças Divididas) Os coeficientes $[\tau_1]g, \cdots, [\tau_1, \cdots, \tau_n]g$ da forma de Newton 1.3 são eficientemente computados através da seguinte tabela de diferenças divididas:

Ptos Int	Dados	1ª DD	2ª DD	...	$(n-2)^a$ DD	$(n-1)^a$ DD
τ_1	$g(\tau_1)$					
		$[\tau_1, \tau_2]g$				
τ_2	$g(\tau_2)$		$[\tau_1, \tau_2, \tau_3]g$			
		$[\tau_2, \tau_3]g$.		
τ_3	$g(\tau_3)$				$[\tau_1, \dots, \tau_{n-1}]g$	
			.			$[\tau_1, \dots, \tau_n]g$
\vdots	\vdots	.			$[\tau_2, \dots, \tau_{n-1}]g$	
				.		
τ_{n-1}	$g(\tau_{n-1})$		$[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}, \tau_{n-2}]g$			
		$[\tau_{n-1}, \tau_n]g$				
τ_n	$g(\tau_n)$					

Note que a diagonal superior

$$g(\tau_1), [\tau_1, \tau_2]g, [\tau_1, \tau_2, \tau_3]g, \dots, [\tau_1, \dots, \tau_n]g$$

contém os coeficientes da forma de Newton (Teorema 1.3) requeridos.

Observação 1.2 (Pontos Repetidos) Em geral, vamos assumir que os pontos de interpolação são ordenados. Então, se existirem pontos repetidos, estes ocorrerão juntos, isto é, se $\tau_i = \tau_{i+r}$ então $\tau_i = \tau_{i+1} = \dots = \tau_{i+r}$. Portanto, no cálculo de $[\tau_i, \dots, \tau_{i+r}]g$,

se $\tau_i = \tau_{i+r}$ então

$$[\tau_i, \dots, \tau_{i+r}]g = \frac{g^{(r)}(\tau_i)}{r!}$$

senão (no caso $\tau_i \neq \tau_{i+r}$) teremos

$$[\tau_i, \dots, \tau_{i+r}]g = \frac{[\tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+r}]g - [\tau_i, \dots, \tau_{i+r-1}]g}{\tau_{i+r} - \tau_i}$$

1.3 Exercícios

Exercício 1.1 (Interpolação osculatória de Hermite para o logaritmo) Desejamos aproximar a função $g(x) = \ln x$ em $x = 1.5$ através de $p_4(1.5)$, onde p_4 é o polinômio cúbico satisfazendo $p(k) = g(k)$ e $p'(k) = g'(k)$, $k = 1$ e $k = 2$. Determine tal polinômio cúbico resolvendo o sistema linear 4×4 correspondente. Ou seja, este é um exemplo da conhecida interpolação de Hermite.

Exercício 1.2 (Interpolação de Hermite utilizando Diferenças Divididas com Repetição) Podemos resolver o Exercício 1 no contexto desta seção, utilizando a Definição 1.1, página 3. Para isto, consideramos os pontos de interpolação dados pela sequência $\tau = \{1, 1, 2, 2\}$ e os respectivos valores $g(1) = 0$, $g'(1) = 1$, $g(2) = 0.693147$ e $g'(2) = 0.5$. Queremos determinar p_4 que coincida com g em τ .

(a) Construir a tabela de diferenças divididas

τ_i	$g(\tau_i)$	1ª DD	2ª DD	3ª DD
?	?			
		?		
?	?		?	
		?		?
?	?		?	
		?		
?	?			

(b) Determinar o polinômio cúbico na forma de Newton que interpola g nos pontos $\tau = \{1, 1, 2, 2\}$

(c) Utilizando o polinômio obtido no item anterior, aproximar $\ln 1.5$.

Exercício 1.3 Seja $\tau = \{0, 0, \pi/4, \pi/4, \pi/2, \pi/2\}$.

(a) Construir o polinômio p_6 de ordem 6 que coincide com $\sin(x)$ em τ .

(b) Dê uma estimativa para o erro máximo $\max\{|\sin(x) - p_6(x)| : 0 \leq x \leq \pi/2\}$ utilizando a fórmula do erro (4) na página 5.

- (c) Comparar a estimativa obtida no item anterior com o erro máximo a ser encontrado diretamente em, por exemplo, 50 pontos do intervalo $[0, \pi/2]$.

1.4 Limitações da Aproximação Polinomial

Nesta seção, mostraremos que um dos principais restrições da interpolação polinomial é sua relativa inflexibilidade. Ilustraremos como essa inflexibilidade manifesta-se e daremos algumas indicações das suas possíveis causas.

Começaremos com um exemplo clássico devido a Rünge (1901). Suponha que queremos aproximar a função

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{em } x \in [-5, 5]$$

utilizando polinômios. Uma abordagem natural é escolher m pontos no intervalo, e interpolar estes pontos. Admita que escolhamos pontos equiespaçados, isto é:

$$\tau_i = -5 + 10 \frac{i-1}{m-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Então pelo Teorema 1.3 existe um único polinômio $p_m \in \mathbb{P}_m$ que interpola g nos pontos $(\tau_i)_1^m$.

A função g é bem comportada, sendo inclusive analítica numa vizinhança do intervalo de aproximação $[-5, 5]$. A expectativa é a de que o erro máximo

$$\|e_n\| = \max_{-5 \leq x \leq 5} |g(x) - p_m(x)|$$

convirja para zero conforme m cresça.

Fizemos os gráficos de g e p_m para $m = 5$, $m = 11$ e $m = 15$. As figuras indicam que o erro de interpolação cresce com m . A Figura ?? mostra que na parte central do intervalo $[-5, 5]$, o polinômio p_{15} interpola bem melhor do que p_5 e p_{11} , mas é muito pior nas extremidades. Permanece a expectativa de que conforme m cresça, p_m e g irão coincidir em muitos mais pontos e então p_m seja uma boa aproximação para f em todo o intervalo $[-5, 5]$. Entretanto, o teorema seguinte mostra que isto não acontece:

Teorema 1.4 (Rünge) *Sejam*

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

e p_m o polinômio de ordem m que interpola g em m pontos equiespaçados dados por

$$\tau_i = -5 + 10 \frac{i-1}{m-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Então, para $|x| > 3.64$

$$|g(x) - p_m(x)| \longrightarrow \infty \quad \text{conforme} \quad m \longrightarrow \infty$$

Esta situação pode ser contornada se tivermos a liberdade de escolher os pontos de interpolação. Os chamados pontos de Tchebyshev para o intervalo $[a, b]$ são obtidos subdividindo-se o semi-círculo em n arcos iguais e depois projetando o ponto médio de cada arco no intervalo. Isto é:

$$\tau_j = \frac{a + b - (a - b) \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)}{2}.$$

Resumindo, o Teorema 1.4 mostra que sequências de polinômios interpoladores em pontos equiespaçados podem não convergir. Escolhas especiais de pontos de interpolação, como por exemplo os pontos de Tchebyshev, podem resolver o problema.

Entretanto, de acordo com o teorema seguinte, tais escolhas especiais também podem falhar pois para quaisquer sequências pré-determinadas de pontos de interpolação sempre poderemos encontrar uma função contínua g tal que a sequência dos polinômios interpoladores não convergem para g .

Teorema 1.5 (Faber) Fixado $[a, b]$, suponha que para cada $m \geq 1$

$$t_{m1} < t_{m2} < \dots < t_{mm}$$

é um conjunto de pontos de $[a, b]$. Então existe uma função $g \in C[a, b]$ tal que

$$\|g - p_m\| \longrightarrow \infty \quad \text{conforme} \quad m \longrightarrow \infty$$

onde p_m é o único polinômio de ordem m que interpola g em $t_{m1}, t_{m2}, \dots, t_{mm}$.

Os fenômenos de não-convergência nos Teoremas 1.4 e 1.5 são manifestações da inflexibilidade dos polinômios. Quando os polinômios são obrigados a coincidir em muitos pontos

com uma curva num intervalo, os mesmos podem reagir com oscilações abruptas em outras regiões do intervalo. Esta tendência à oscilação torna-se mais evidente conforme aumenta-se a ordem dos polinômios. Para ordens baixas, digamos no máximo 5 ou 10 as oscilações dos polinômios podem ser aceitáveis. Infelizmente, o clássico Teorema de Jackson² estabelece que uma boa aproximação requer em muitos casos o acréscimo da ordem dos polinômios.

Um modo de explicar a tendência de oscilação dos polinômios é que os coeficientes da derivada de um polinômio de ordem alta serão, em geral, muito maiores do que os coeficientes do polinômio original. De fato, em (1) o coeficiente de x^{n-2} em Dp é $(n-1)a_n$, onde a_n é o coeficiente de x^{n-1} em p .

Outra explicação para a inflexibilidade dos polinômios está fundamentada na mais básica de suas propriedades, celebrada antes como uma qualidade: polinômios são suaves. Na realidade, polinômios são suaves demais. Como uma função de uma variável complexa, os polinômios são analíticos, isto é, seus valores em todo o plano complexo são determinados por alguns de seus valores num conjunto arbitrariamente pequeno. Em \mathbb{R} , a afirmação equivalente é que $p(x)$ fica completamente caracterizado para todo $x \in \mathbb{R}$ por alguns de seus valores em qualquer intervalo (a, b) não importando quão pequeno este seja.

²Sendo f uma função contínua em $[-1, 1]$ e w_f seu módulo de continuidade, o teorema de Jackson afirma que existe uma sequência de polinômios p_n de grau $\leq n$ e uma constante C tal que $\max_{|x| \leq 1} |p_n(x) - f(x)| \leq C \cdot w_f(\frac{1}{n})$.