Resolução Numérica de Sistemas Lineares via Fatoração LU

Antonio Elias Fabris

Universidade de São Paulo
www.ime.usp.br/∼aef

Cálculo Numérico e Aplicações
IAG-USP, 2º Semestre 2009

Método de Eliminação de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - (4/3)L_1 \\ L_3 - (1/3)L_1 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 1 & 8/3 \end{bmatrix} \; L_3 - (1/2)L_2$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{bmatrix} = \mathrm{U}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{M_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

Temos que

$$M_3 M_2 M_1 A = \mathrm{U}$$

e assim

$$A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}}_{L} \mathrm{U} = \mathrm{LU}$$

onde

$$\mathrm{L} = \mathrm{M}_1^{-1}\mathrm{M}_2^{-1}\mathrm{M}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$A = \mathrm{LU}$$

isto é:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 4 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{bmatrix}$$

Fatoração $A = \mathrm{LU}$: Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 16 \end{bmatrix} \quad L_3 - 4L_2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Resumo: Fatoração LU

Se A é uma matriz $n \times n$ tal que ao aplicar o Método de Eliminação de Gauss todos os pivôs sejam diferentes de zero, então A pode ser fatorada como um produto $A = \mathrm{LU}$, onde as seguintes afirmações são verdadeiras:

- L é triangular inferior e U é triangular superior

Resumo: Fatoração LU

Se A é uma matriz $n \times n$ tal que ao aplicar o Método de Eliminação de Gauss todos os pivôs sejam diferentes de zero, então A pode ser fatorada como um produto $A = \mathrm{LU}$, onde as seguintes afirmações são verdadeiras:

- L é triangular inferior e U é triangular superior
- $l_{ii} = 1$ e $u_{ii} \neq 0$

Resumo: Fatoração LU

Se A é uma matriz $n \times n$ tal que ao aplicar o Método de Eliminação de Gauss todos os pivôs sejam diferentes de zero, então A pode ser fatorada como um produto $A = \mathrm{LU}$, onde as seguintes afirmações são verdadeiras:

- L é triangular inferior e U é triangular superior
- $l_{ii} = 1$ e $u_{ii} \neq 0$
- L é constituída pelos multiplicadores utilizados para a eliminação de Gauss.

Resumo: Fatoração LU

Se A é uma matriz $n \times n$ tal que ao aplicar o Método de Eliminação de Gauss todos os pivôs sejam diferentes de zero, então A pode ser fatorada como um produto $A = \mathrm{LU}$, onde as seguintes afirmações são verdadeiras:

- L é triangular inferior e U é triangular superior
- $l_{ii} = 1$ e $u_{ii} \neq 0$
- L é constituída pelos multiplicadores utilizados para a eliminação de Gauss.
- U é o resultado final da aplicação do Método de Eliminação de Gauss à matriz A.

Teorema: Condições de Existência da Fatoração LU

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz não-singular. Cada uma das afirmações abaixo é equivalente a dizer que A possui uma fatoração LU.

Teorema: Condições de Existência da Fatoração LU

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz não-singular. Cada uma das afirmações abaixo é equivalente a dizer que A possui uma fatoração LU.

- Não obtemos um pivô nulo nas operações de redução do sistema à forma triangular superior.

Teorema: Condições de Existência da Fatoração LU

Seja $A_{n \times n}$ uma matriz não-singular. Cada uma das afirmações abaixo é equivalente a dizer que A possui uma fatoração LU.

- Não obtemos um pivô nulo nas operações de redução do sistema à forma triangular superior.
- Cada submatriz principal A_k, $k = 1, \cdots, n$, é não-singular.

Resolvendo $Ax = b$ pela fatoração $A = \mathrm{LU}$

$$Ax = b$$

$$\mathrm{L}(\underbrace{\mathrm{Ux}}_{\mathrm{y}}) = \mathrm{b}$$

Então, $Ax = b$ é equivalente aos dois sistemas triangulares

$$\mathrm{Ly} = \mathrm{b} \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{Ux} = \mathrm{y}$$

Resumo: Solução de $Ax = b$ pela fatoração $A = \mathrm{LU}$

- Primeiro resolva $\mathrm{Ly = b}$ e depois $\mathrm{Lx = y}$ para obter o vetor desejado x.

Resumo: Solução de $Ax = b$ pela fatoração $A = \mathrm{LU}$

- Primeiro resolva $\mathrm{Ly} = \mathrm{b}$ e depois $\mathrm{Lx} = \mathrm{y}$ para obter o vetor desejado x.
- A vantagem dessa abordagem é que uma vez calculados os fatores LU, qualquer outro sistema linear $Ax = \tilde{b}$ pode ser resolvido com somente n^2 multiplicações/divisões e $n^2 - n$ adições/subtrações.

Exemplos

- Exercício 1 : Use a fatoração LU de A para resolver $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

- Exercício 2 : Suponha que depois de resolver o sistema original são obtidas novas informações que modificam o vetor b para

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

  Use os fatores LU de A para resolver o sistema atualizado $Ax = \tilde{b}$.

- Exercício 3 : Use os fatores LU de A para calcular A^{-1}.

MEG com Condensação Pivotal

- É também conhecido como MEG com Pivotamento Parcial

MEG com Condensação Pivotal

- É também conhecido como MEG com Pivotamento Parcial
- Como estudamos anterioremente, análises de propagação de erros de arredondamento para o MEG Simples indicam a conveniência de serem todos os multiplicadores (as constantes $a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ do $\mathrm{k}^{\underline{o}}$ passo) menores que 1 em módulo.

MEG com Condensação Pivotal

- É também conhecido como MEG com Pivotamento Parcial
- Como estudamos anterioremente, análises de propagação de erros de arredondamento para o MEG Simples indicam a conveniência de serem todos os multiplicadores (as constantes $a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ do $\mathrm{k}^{\underline{o}}$ passo) menores que 1 em módulo.
- Ou seja, o pivô deve ser o elemento de maior valor absoluto da coluna, da diagonal (inclusive) para baixo.

MEG com Condensação Pivotal

- É também conhecido como MEG com Pivotamento Parcial
- Como estudamos anterioremente, análises de propagação de erros de arredondamento para o MEG Simples indicam a conveniência de serem todos os multiplicadores (as constantes $a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ do $\mathrm{k}^{\underline{o}}$ passo) menores que 1 em módulo.
- Ou seja, o pivô deve ser o elemento de maior valor absoluto da coluna, da diagonal (inclusive) para baixo.
- Então, em cada passo, escolhemos na coluna correspondente o elemento de maior valor absoluto, da diagonal (inclusive) para baixo, e fazemos uma permutação nas equações do sistema, de modo que esse elemento venha a ocupar a posição de pivô.

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Problema: Faça condensação pivotal (ou, *pivotamento parcial*) na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e determine a fatoração **PA=LU**, onde **P** é a matriz de permutação associada.

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Problema: Faça condensação pivotal (ou, *pivotamento parcial*) na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e determine a fatoração **PA=LU**, onde **P** é a matriz de permutação associada.

Solução:

- Vamos anexar uma "coluna registradora de permutações" p inicializada com a ordem natural $1, 2, 3, 4$.

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Problema: Faça condensação pivotal (ou, *pivotamento parcial*) na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e determine a fatoração **PA=LU**, onde **P** é a matriz de permutação associada.

Solução:

- Vamos anexar uma "coluna registradora de permutações" p inicializada com a ordem natural $1, 2, 3, 4$.
- Conforme as linhas são permutadas, registramos as trocas correspondentes no vetor p.

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Problema: Faça condensação pivotal (ou, *pivotamento parcial*) na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e determine a fatoração **PA=LU**, onde **P** é a matriz de permutação associada.

Solução:

- Vamos anexar uma "coluna registradora de permutações" p inicializada com a ordem natural $1, 2, 3, 4$.
- Conforme as linhas são permutadas, registramos as trocas correspondentes no vetor p.
- A matriz de permutação **P** é obtida aplicando-se a ordem final registrada no vetor p às linhas de uma matriz identidade de tamanho apropriado.

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

$$[A|p] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

$$[A|p] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/2} & 1 & -1 & 2 & 2 \\ \mathbf{\text{-}1/4} & 2 & 3/2 & 4 & 3 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{\text{-}1/4} & 2 & 3/2 & 4 & 3 \\ \mathbf{1/2} & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

$$[A|p] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/2} & 1 & -1 & 2 & 2 \\ \mathbf{-1/4} & 2 & 3/2 & 4 & 3 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & 2 & 3/2 & 4 & 3 \\ \mathbf{1/2} & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & -1/6 & 4/3 & 2 \end{array}\right)$$

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

$$[A|p] = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/2} & 1 & -1 & 2 & 2 \\ \mathbf{-1/4} & 2 & 3/2 & 4 & 3 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & 2 & 3/2 & 4 & 3 \\ \mathbf{1/2} & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & -1/6 & 4/3 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\max\{|a''_{33}|, |a''_{43}|\} = |a''_{33}|$, as linhas da matriz anterior não são permutadas.

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & -1/6 & 4/3 & 2 \end{array}\right)$$

- Como $\max\{|a''_{33}|, |a''_{43}|\} = |a''_{33}|$, as linhas da matriz anterior não são permutadas.
- Basta anular o elemento da 3^{a} coluna abaixo da diagonal principal.

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & -1/6 & 4/3 & 2 \end{array}\right)$$

- Como $\max\{|a''_{33}|, |a''_{43}|\} = |a''_{33}|$, as linhas da matriz anterior não são permutadas.
- Basta anular o elemento da 3ª coluna abaixo da diagonal principal.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{-1/19} & 28/19 & 2 \end{array}\right)$$

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Temos então que:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{-1/19} & 28/19 & 2 \end{array} \right)$$

Portanto,

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Temos então que:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{-1/19} & 28/19 & 2 \end{array}\right)$$

Portanto,

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -2/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & -1/19 & 1 \end{pmatrix}$$

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Temos então que:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{-1/19} & 28/19 & 2 \end{array}\right)$$

Portanto,

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -2/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & -1/19 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 19/6 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 28/19 \end{pmatrix}$$

Fatoração LU com Condensação Pivotal: $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

Temos então que:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ \mathbf{1/4} & -3 & 5/2 & -2 & 1 \\ \mathbf{-1/4} & \mathbf{-2/3} & 19/6 & 8/3 & 3 \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{-1/19} & 28/19 & 2 \end{array}\right)$$

Portanto,

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -2/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & -1/19 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 19/6 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 28/19 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + Fatoração $PA = \mathrm{LU}$

- Como matrizes de permutação são invertíveis, **Ax=b** é equivalente a

$$\mathbf{PAx{=}Pb}\,,$$

e portanto podemos utilizar as técnicas de solução LU já discutidas.

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + Fatoração $PA = \mathrm{LU}$

- Como matrizes de permutação são invertíveis, **Ax=b** é equivalente a

$$\mathbf{PAx{=}Pb}\,,$$

  e portanto podemos utilizar as técnicas de solução LU já discutidas.
- Isto é, suponha que já realizamos a fatoração **PA =LU**. Então:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; PAx = Pb \;\Leftrightarrow\; \mathrm{LUx = Pb} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{Ly{=}Pb} \\ \mathbf{Ux{=}y} \end{cases}$$

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + Fatoração $PA = \mathrm{LU}$

- Como matrizes de permutação são invertíveis, **Ax=b** é equivalente a

$$\mathbf{PAx=Pb}\,,$$

  e portanto podemos utilizar as técnicas de solução LU já discutidas.
- Isto é, suponha que já realizamos a fatoração **PA =LU**. Então:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; PAx = Pb \;\Leftrightarrow\; \mathrm{LUx} = \mathrm{Pb} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{Ly=Pb} \\ \mathbf{Ux=y} \end{cases}$$

- É claro que a matriz de permutação **P** não é realmente necessária. Basta o conhecimento dos fatores LU e da permutação final contida no *vetor p* de "registro de permutações" exemplificado anteriormente.

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + Fatoração $PA = \mathrm{LU}$

- Como matrizes de permutação são invertíveis, **Ax=b** é equivalente a

$$\mathbf{PAx{=}Pb}\,,$$

  e portanto podemos utilizar as técnicas de solução LU já discutidas.
- Isto é, suponha que já realizamos a fatoração **PA =LU**. Então:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; PAx = Pb \;\Leftrightarrow\; \mathrm{LUx} = \mathrm{Pb} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{Ly{=}Pb} \\ \mathbf{Ux{=}y} \end{cases}$$

- É claro que a matriz de permutação **P** não é realmente necessária. Basta o conhecimento dos fatores LU e da permutação final contida no *vetor* p de "registro de permutações" exemplificado anteriormente.
- A coluna $\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{{=}Pb}$ é simplesmente um rearranjo dos componentes de b de acordo com a permutação final exibida pelo vetor p.

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + Fatoração $PA = \mathrm{LU}$

- Como matrizes de permutação são invertíveis, **Ax=b** é equivalente a

$$\mathbf{PAx{=}Pb}\,,$$

  e portanto podemos utilizar as técnicas de solução LU já discutidas.
- Isto é, suponha que já realizamos a fatoração **PA =LU**. Então:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; PAx = Pb \;\Leftrightarrow\; \mathrm{LUx} = \mathrm{Pb} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{Ly{=}Pb} \\ \mathbf{Ux{=}y} \end{cases}$$

- É claro que a matriz de permutação **P** não é realmente necessária. Basta o conhecimento dos fatores LU e da permutação final contida no *vetor p* de "registro de permutações" exemplificado anteriormente.
- A coluna $\tilde{\mathbf{b}}$**=Pb** é simplesmente um rearranjo dos componentes de b de acordo com a permutação final exibida pelo vetor p.
- Em outras palavras, a estratégia é primeiro permutar b de acordo com a permutação expressão pelo vetor p, e depois resolver o sistema **Ly=**$\tilde{\mathbf{b}}$ seguido por **Ux=y**.

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + fatoração $PA = \mathrm{LU}$

Problema: Usar a fatoração LU obtida com Condensação Pivotal (*pivotamento parcial*) para resolver o sistema $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + fatoração $PA = \mathrm{LU}$

Problema: Usar a fatoração LU obtida com Condensação Pivotal (*pivotamento parcial*) para resolver o sistema $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- A fatoração **PA=LU** com condensação pivotal já foi computada.

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + fatoração $PA = \mathrm{LU}$

Problema: Usar a fatoração LU obtida com Condensação Pivotal (*pivotamento parcial*) para resolver o sistema $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- A fatoração **PA=LU** com condensação pivotal já foi computada.
- Permute os componentes de b de acordo com a permutação $p = (\ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ )$ obtida e denote o resultado por $\tilde{b}$:

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + fatoração $PA = \mathrm{LU}$

Problema: Usar a fatoração LU obtida com Condensação Pivotal (*pivotamento parcial*) para resolver o sistema $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- A fatoração **PA=LU** com condensação pivotal já foi computada.
- Permute os componentes de b de acordo com a permutação $p = (\ 4 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 2\ )$ obtida e denote o resultado por $\tilde{b}$:

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + fatoração $PA = \mathrm{LU}$

- Agora, resolva $\mathbf{Ly}=\tilde{\mathbf{b}}$ por substituição progressiva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -2/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & -1/19 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right.$$

$$\Rightarrow \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5/2 \\ 35/6 \\ 28/19 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ por Condensação Pivotal + fatoração $PA = \mathrm{LU}$

- Então, resolva **Ux=y** por substituição retroativa:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 19/6 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 28/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5/2 \\ 35/6 \\ 28/19 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema: Condição de Existência da Fatoração $\mathrm{PA} = \mathrm{LU}$

- Seja $A_{n \times n}$ uma matriz não-singular.
- Então, existe uma matriz de permutação $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{PA}$ possui uma fatoração

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

Exemplos

Sejam A e b as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Exercício 1 : Explicar porque a matriz A não possui uma fatoração LU.

Exemplos

Sejam A e b as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Exercício 1 : Explicar porque a matriz A não possui uma fatoração LU.
- Exercício 2 : Usando condensação pivotal (*pivotamento parcial*), determine uma matriz de permutação **P** bem como fatores LU tais que **PA=LU**.

Exemplos

Sejam A e b as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Exercício 1 : Explicar porque a matriz A não possui uma fatoração LU.
- Exercício 2 : Usando condensação pivotal (*pivotamento parcial*), determine uma matriz de permutação **P** bem como fatores LU tais que **PA=LU**.
- Exercício 3 : Usando as informações em **P**, **L**, e **U** resolver o sistema **Ax=b**.