MAT0231 - ÁLGEBRA II PARA LICENCIATURA

Ideais, Homomorfismos e Anéis de Polinômios

1. a) Quais são os ideais de $\mathbb{Z}$? E de $\mathbb{Z}_m$?
b) Quais destes ideais são primos e quais são maximais?

2. Seja $(A, +, \times)$ um domínio de integridade. Mostre que A é um corpo se e somente se os únicos ideais de A são (0) e A.

3. Sejam U,V ideais de R e considere os conjuntos:

$$U + V = \{x + y | x \in U, y \in V\}$$

$$UV = \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i | x_i \in U, y_i \in V, n \in \mathbb{N}\}$$

$$U \cap V = \{x \in R | x \in U e x \in V\}$$

Mostre que esses conjuntos são ideais de R e que $UV \subset U \cap V$, $U \subset U + V$ e $V \subset U + V$.

4. a) Mostre que os anéis $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ não são isomorfos.
b) Mostre também que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não são isomorfos.
c) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ são isomorfos?

5. Sejam R um anel e $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ definida por

$$\varphi(n) = n \cdot 1_R = \begin{cases} \underbrace{1_R + 1_R + \ldots + 1_R}_{n\ vezes}, se\ n \geq 0 \\ \underbrace{-1_R - 1_R - \ldots - 1_R}_{n\ vezes}, se\ n < 0 \end{cases}$$

Prove que:
a) φ é um homomorfismo de anéis.
b) $ker\varphi$ é um ideal de $\mathbb{Z}$
Logo, existe $c > 0$ tal que $ker\varphi = c\mathbb{Z}$. O número c é chamado de característica de R.

6. Calcule a característica dos seguintes anéis:
a) $\mathbb{Z}_{12}$
b) $\mathbb{Z}_5$

c) $\mathbb{Z}_p$
d) $\mathbb{Z}$
e) $\mathbb{Q}$

7. Prove que, se R é um domínio de integridade, então a característica de R é 0 ou um número primo.

8. Encontre exemplos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ exemplo de:
a) Ideal maximal
b) Ideal primo não maximal
c) Ideal próprio que não seja primo

9. Mostre que $\varphi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ definido por

$$\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

é um monoformismo de $\mathbb{C}$ em $M_2(\mathbb{R})$.

10. Mostre que a função $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ definida por $\varphi(x) = \bar{9}x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, é um homomorfismo de anéis. Determine $im\varphi$ e $ker\varphi$. Verifique que $\varphi(1) \neq \bar{1}$. Como isto é possível?

11. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, provando-as ou exibindo um contra-exemplo.
a) Todo ideal primo de um anel comutativo com unidade R é maximal.
b) Todo ideal de um anel comutativo com unidade R é primo.
c) $\mathbb{Q}$ é um ideal de $\mathbb{R}$.
d) $\mathbb{Q}$ é um subanel de $\mathbb{R}$.

12. Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis.
a) Mostre que se $I \subset R$ é um ideal de R então $\varphi(I)$ é um ideal de $\varphi(R)$. $\varphi(I)$ é um ideal de S?
b) Mostre que se $J \subset S$ é ideal de S então $\varphi^{-1}(J) = \{x \in R | \varphi(x) \in J\}$ é ideal de R que contém $ker\varphi$
c) Como se correspondem os ideais de R e S se φ for um epimorfismo?

13. Sejam $A = \mathbb{Z}[x]$ e I o ideal de A gerado por 2 e x, isto é,

$$I = \{f2 + gx | f, g \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que I não é um ideal principal. Como isto é possível?

14. Sejam $A = K[x]$, K corpo, I, J ideais não nulos de A tais que $I = fK[x]$, $J = gK[x]$. Mostre que
a) $I + J = dK[x]$, onde $d = mdc(f, g)$
b) $I \cap J = mK[x]$, onde $m = mmc(f, g)$

15. Sejam $f \in K[x]$, K corpo, $a \in K$. Mostre que:
a) O resto da divisão de f por $x - a$ é $f(a)$.
b) a é raiz de f se, e somente se, $(x - a)|f$.

16. Calcular o MDC em $\mathbb{Q}[x]$ dos seguintes polinômios:
a) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ e $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
b) $4x^5 + 7x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ e $x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1$
c) $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ e $x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1$

17. Verdadeiro ou falso? Prove ou dê um contra-exemplo:
a) Se existem r,$s \in K[x]$ tais que $d = rf + sg$ então d é um mdc entre f e g.
b) Se existem r, $s \in K[x]$ tais que $rf + sg = a \in K^*$ então $mdc(f, g) = 1$

18. Sejam f e g relativamente primos e seja $h \in K[x]$ tal que $f|h$ e $g|h$. Mostre que $f \cdot g|h$.

19. Sejam f, g polinômios mônicos não nulos. Mostre que

$$mdc(f, g) \cdot mmc(f, g) = f \cdot g.$$