

Lista de Exercícios de Álgebra II - MAT231 Licenciatura

1ª Parte: Números Complexos

1. Calcular as partes real e imaginária dos números complexos abaixo:

(a) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ (b) $z = \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$ (c) $\frac{i(1-\sqrt{3}i)}{\sqrt{3}+i}$

2. Representar geometricamente os números complexos

$z_1, z_2, z_1^{-1}, z_1 z_2, \frac{z_1+z_2}{2}, \frac{z_1}{z_2}$ onde $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_2 = \sqrt{2}(1+i)$

3. Provar que se $1+|z| = |1+z|$ então $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}_+$

4. Demonstrar as desigualdades:

(a) $\sqrt{2}|z| \geq |x| + |y|$, se $z = x + yi$ (b) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

5. Use a forma polar de um número complexo para provar que:

(a) $(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-11}(-1 + \sqrt{3}i)$ (b) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$

6. Quantos valores admitem $z^{2/3}, z^{3/2}, z^{1/2}, z^3$ se $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$?

7. Determinar as raízes sextas $z_i, i = 1, 2, \dots, 6$, de $z = -1$.

8. Resolver a equação $z^5 - 1 = 0$ e representar geometricamente as soluções.

9. Descrever geometricamente a aplicação $z \in \mathbb{C} \mapsto (zi) \in \mathbb{C}$.

2ª Parte: Equações de graus 3 e 4

10. Suponha que a equação $x^3 + px + q = 0$ admita três raízes reais a, b, c .

(i) Mostre que $a + b + c = 0$

(ii) Conclua que $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$.

(iii) O que mostra esse exercício?

11. Resolva as equações abaixo em \mathbb{C} .

(a) $x^3 - 15x - 4 = 0$

(b) $x^3 - 12x + 16 = 0$

(c) $x^3 + x - 2 = 0$

(d) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$