Teoria dos Conjuntos

1. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:

(a) Se A é subconjunto de B e B é subconjunto de C, então A é subconjunto de C.

(b) Se $A \subset B$ então $A \cup B = B$.

(c) Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$.

(d) Se $A \subset B$ então $A \cup C \subset\ B \cup C$ e $A \cap C \subset\ B \cap C$.

(e) Seja $A \subset X$ e $A = \complement\, B$ se e somente se $A \cup B = X$ e $A \cap B = \varnothing$.

2. Determine os elementos dos seguintes conjuntos:

(a) $\wp(\varnothing)$

(b) $\wp(\{a\})$

(c) $\wp(\{a, b, c\})$

3. Se A e B são conjuntos finitos, mostre que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

4. Represente graficamente os produtos cartesianos $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $B \times C$, $A \times C$, $C \times A$ onde

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}\ \ -2 \leq x \leq 1\}.$$

5. Sejam A, B, C subconjuntos do conjunto X , prove que:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B)\ \cup\ (A \times C)$.

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B)\ \cap\ (A \times C)$.

6. Determine os elementos de $\wp(A \times B)$ onde $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3\}$.

7. Determine o número de elementos de $A \times B$ quando A e B são finitos.

8. Dar exemplos de relações R sobre o conjunto $E = \{0, 1, 2\}$ tais que:

(a) R é reflexiva, simétrica e transitiva.

(b) R é reflexiva mas não é simétrica ou transitiva.

(c) R é simétrica mas não é reflexiva nem transitiva.

(d) R é transitiva mas não é simétrica nem reflexiva.

(e) R é reflexiva e simétrica mas não transitiva.

(f) R é reflexiva e transitiva mas não simétrica.

(g) R é simétrica e transitiva mas não reflexiva.

Este exercício nos mostra que, de fato, as condições reflexiva, simétrica e transitiva são independentes entre si.

9. Seja B um subconjunto de um conjunto E e considere a relação R sobre $\wp(E)$ definida por XRY se e só se $X \cap B = Y \cap B$. Mostre que R é uma relação de equivalência.

10. Seja E o conjunto $E = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$ determine quais das seguintes relações f são aplicações de E em R onde f é dada por:

(a) $y = x^3$ (b) $y^2 = x^3$ (c) $y = x^2 + 5x + 6$

(d) $y^2 = 1 - x^2 \quad y \leq 0$ (e) $y^2 = 2x \quad y \geq 0$ (f) $y^2 = 2x$

11. Considere as aplicações f, g, h de R em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x + 1, g(x) = x^2$, $h(x) = x^2 + x + 1$. Determine as seguintes compostas $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ g$, $g \circ h$, $h \circ g$, $h \circ h$, $(f \circ g) \circ h$, $h \circ (f \circ g)(g \circ f) \circ h$, $h \circ (g \circ f)(f \circ h) \circ g$ e $g \circ (f \circ h)$.

12. Determine quais das seguintes aplicações f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são sobrejetoras, injetoras ou bijetoras:

(a) $f(x) = 2x + 1$ (b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (c) $f(x) = x^2 + x + 1$

(d) $f(x) = x^3 - x$ (e) $f(x) = ax + b \quad a \neq 0, \ a, b \in \mathbb{R}$

13. Seja E um conjunto finito e $f : E \rightarrow E$. Mostre que:

(a) f é injetora $\Rightarrow f$ bijetora.

(b) f é sobrejetora $\Rightarrow f$ bijetora.

Procure exemplos de aplicações injetoras ou sobrejetoras que não são bijetoras.