Indução Finita

1. Verificar por indução as seguintes propriedades:

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}\, n(n+1)\right]^2$

(b) $(1^5 + 2^5 + \cdots n^5) + 1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2\left[\frac{1}{2}\, n(n+1)\right]^4$

(c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(d) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

(e) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$

(f) $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n+1$

(g) $n \leq 2^n \quad \forall\, n \ \geq 0$

(h) $2^n < n! \quad \forall\, n \ \geq 4$

(i) $n! > n^3 \quad \forall\, n \ \geq 6.$

2. Prove que se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$.

(a) Se n é ímpar e $a^n = b^n$ então $a = b$

(b) Se n é par e $a^n = b^n$ então $a = \pm b$

3. Prove que: Dados n e k inteiros tais que $1 \leq k \leq n$ tem-se

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

4. Se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$ então $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}\, b^i$. Conclua que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

5. Demonstrar que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, para todos $a, b, \in \mathbb{Z}$.

6. Demonstrar <u>por indução</u> que $n^2 > 8n + 2$, a partir de um certo valor de n a determinar.

7. Encontrar o erro do seguinte raciocínio:

"Teorema": Todo mundo tem o mesmo sexo.
Demonstração: seja $P(n)$ a proposição: Se A é um conjunto com n pessoas, todas as pessoas de A tem o mesmo sexo.

Temos: $P(1)$ é verdadeira (imediato). Assumimos $P(k)$ verdadeira. Seja A um conjunto com $k+1$ pessoas. Então A pode ser considerado como a união de dois conjuntos A_1 e A_2, cada um deles contendo k pessoas: $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$, $A_1 = \{x_1, \cdots, x_k\}, \{x_2, \cdots, x_{x+1}\}$ como por hipótese $P(k)$ é verdadeira, todas as pessoas de A_1 são do mesmo sexo e o mesmo vale para A_2. Como $A, \cap A_2 \neq \varnothing$, todas as pessoas em A são do mesmo sexo. Pelo princípio de Indução, $P(n)$ é verdadeira para todo n.