MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura
Grupos

1. Quais dos conjuntos abaixo são grupos em relação à operação indicada?
a) $\mathbb{Z}_-$; adição
b) $\mathbb{Z}_+$; multiplicação
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} |\ x \text{ é } par\}$; adição
d) $B = \{x \in \mathbb{Z} |\ x \text{ é } ímpar\}$; multiplicação
e) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; adição
f) $D = \{1, -1\}$; multiplicação

2. Mostre que $\mathbb{R}$ dotado da operação $*$ tal que $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ é um grupo abeliano.

3. Mostre que $\mathbb{R}$ munido da operação Δ tal que $x\Delta y = x + y - 3$ é um grupo comutativo.

4. Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um grupo aditivo abeliano. Estabelecer as condições sobre a e b para que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ seja também um grupo multiplicativo.

5. Mostre que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ munido da operação Δ definida por $(a, b)\Delta(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ é um grupo abeliano.

6. No conjunto $\mathbb{C}$ está definida uma operação Δ tal que $a\Delta b = |a| \cdot b$. Mostre que a operação Δ não define uma estrutura de grupo sobre $\mathbb{C}^*$.

7. Verifique que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é grupo em relção a cada uma das seguintes leis de composição:
a) $(a, b) * (c, d) = (a + b, c + d)$ b) $(a, b)\Delta(c, d) = (a \times c, b \times d)$

8. Mostre que $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ munido da operação $\perp$ definida da seguinte forma:

$$(a, b) \perp (c, d) = (ac, bc + d)$$

é um grupo.

9. Seja G um grupo multiplicativo e seja $*$ uma operação sobre G assim definida: $a * b = b \cdot a$. Demonstre que $(G, *)$ é um grupo.

10. Sejam A um conjunto não vazio e $\mathbb{R}^A$ o conjunto das aplicações de A em $\mathbb{R}$. Definimos uma "adição"e uma "multiplicação"em $\mathbb{R}^A$ como segue: sendo f e g funções de A em $\mathbb{R}$, temos:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in A$$

Mostre que $\mathbb{R}^A$ é grupo aditivo. Mostre que, em geral, $\mathbb{R}^A$ não é um grupo multiplicativo.

11. Sejam a,b e c elementos de um grupo multiplicativo G. Prove que $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$. Obtenha $x \in G$ de modo que $abcxb = c$.

12. Se a, b e c são três elementos quaisquer de um grupo multiplicativo G, demonstre que existe um único $x \in G$ tal que $axbcx = abx$.

13. G é um grupo multiplicativo e a e b são elementos de G. Determine $x \in G$ tal que $xax = bba^{-1}$.

14. Mostre que, se x é um elemento de um grupo multiplicativo e $xx = x$, então x é o elemento neutro.

15. Mostre que, se G é um grupo multiplicativo e $xx = 1, \forall x$ então G é abeliano (1 é o elemento neutro).

16. Seja G um grupo finito. Mostre que, dado $x \in g$, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $x^n = e$.

17. Verifique que

$$B = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} | \ m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

é subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{Q}^*$.

18. Mostre que o conjunto G das matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

com a,$b \in \mathbb{R}$ e a e b não nulos simultaneamente, constitui um subgrupo do grupo $GL_2(\mathbb{R})$.($\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ indica o grupo multiplicativo das matrizes reais invertíveis 2×2)

19. Mostre que o conjunto G das matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} cos\ a & sen\ a \\ -sen\ a & cos\ a \end{bmatrix},$$

com $a \in \mathbb{R}$, constitui um subgrupo do grupo multiplicativo $GL_2(\mathbb{R})$ das matrizes reais e invertíveis do tipo 2×2.

20. Verifique se H_1, H_2 e H_3 são subgrupos aditivos de $\mathbb{R}^n$:

$$H_1 = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n |\ a_1 + a_2 + ... + a_n = 0\}$$

$$H_2 = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n |\ a_1 \in \mathbb{Z}\}$$

$$H_3 = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n |\ a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n\}$$