MAT0231 - ÁLGEBRA II PARA LICENCIATURA

Classes Laterais e Teorema de Lagrange

1. Determine todas as classes laterais de $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ no grupo aditivo $\mathbb{Z}_{12}$.

2. Determine todas as classes laterais de $4\mathbb{Z}$ no grupo aditivo $\mathbb{Z}$.

3. Sendo $H = m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{Z}$, mostre que $\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\} = \mathbb{Z}_m$ é o conjunto das classes laterais de $\mathbb{Z}$. Logo, $(\mathbb{Z} : H) = m$.

4. É finito ou infinito o número de classes se $\mathbb{Z}\times\ 2\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Por quê?

5. Mostre que as classes laterais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ é infinito.

6. Seja H um subgrupo de um grupo $(G, \cdot)$.
a) Mostre que "$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$"define uma relação de equivalência em G.
b) Mostre que, $\forall a \in G$, $\bar{a} = aH$.

7. Seja G um grupo de ordem p^n, em que p é primo e $n > 1$. Mostre que a ordem de um elemento qualquer G é uma potência de p.

8. Seja G um grupo tal que $\{e\}$, G são seus únicos subgrupos. Mostre que a ordem de G é um número primo.

Anéis

9. Seja p um número primo. Seja R o subconjunto dos números racionais m/n tais que $n \neq 0$ e n não é divisível por p. Mostre que R é um anel. Quais são os elementos invertíveis de R?

10. Mostre que o anel das funções reais definidas no intervalo $[0, 1]$ possui divisores de zero.

11. Seja R um domínio de integridade. Se a, b, $c \in R$, $a \neq 0$, $ab = ac$, mostre que $b = c$.

12. Seja R um domínio de integridade, $a \in R$ e $a \neq 0$. Mostre que a aplicação $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax$ é uma aplicação injetora.

13. Seja R um domínio de integridade finito. Mostre que R é um corpo. (Use o exercício anterior)

14. Seja R um anel tal que $x^2 = x$ para todo $x \in R$. Mostre que R é comutativo.

15. Sejam R um anel comutativo e $x \in R$. Dizemos que x é nilpotente se existe um inteiro positivo n tal que $x^n = 0$. Se x, y são nilpotentes, mostre que $x + y$ é nilpotente.

16. Seja R um anel e seja G o subconjunto de R que consiste de todos os elementos $x \in R$ tais que existe algum $y \in R$ para o qual $xy = yx = e$. Mostre que G é um grupo.

17. Sejam R um anel e Z o conjunto de todos os elementos $a \in R$ tais que $ax = xa$ para todo $x \in R$. Mostre que Z é um subanel de R.

18. Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ é um anel e, mais ainda, que é um corpo.

19. Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ é um anel mas não é um corpo.

20. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$ é um anel. Descreva todos os seus elementos invertíveis.

21. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.

22. Mostre que, se m não é um número primo, então o anel $\mathbb{Z}_m$ não é um domínio de integridade.

23. Mostre que $\bar{a}$ é um elemento invertível de $\mathbb{Z}_m$ se, e somente se, $mdc(a, m) = 1$.

24. Mostre que, se p é um número primo, então $\mathbb{Z}_p$ é um corpo.