Capítulo 6

Zero-estabilidade e convergência dos métodos de passo múltiplo lineares

Apresentam-se neste Capítulo, condições necessárias e suficientes à convergência dos métodos de passo múltiplo lineares. Conhecimentos sobre equações de diferenças são necessários à apresentação e, por conveniência, são incluídos em seu início. Maior detalhamento do conteúdo aqui exposto e demonstrações de alguns dos resultados apresentados podem ser encontrados, por exemplo, em [24, 16, 17, 18].

6.1 Equações de diferenças lineares

Uma equação de diferenças linear é uma expressão do tipo

$$\gamma_n y_{k+n} + \gamma_{n-1} y_{k+n-1} + \cdots + \gamma_0 y_k = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j y_{k+j} = \phi_k \ , \ k = 0, 1, \ldots, \qquad (6.1.1)$$

onde γ_j, $j = 0, 1, ..., n$, são constantes independentes de k, com $\gamma_0 \neq 0$ e $\gamma_n \neq 0$. As soluções desse tipo de equação são sequências numéricas $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ para as quais quaisquer $n+1$ elementos sucessivos se relacionem como em (6.1.1). A essa equação associamos *uma equação de diferenças homogênea* dada por

$$\gamma_n y_{k+n} + \gamma_{n-1} y_{k+n-1} + \cdots + \gamma_0 y_k = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j y_{k+j} = 0 \ , \ k = 0, 1, \ldots . \qquad (6.1.2)$$

Se $w = \{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $z = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ são duas soluções de (6.1.1), então a sequência dada pela diferença $\widehat{y} = \{\widehat{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{w_k - z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é solução da equação de diferenças homogênea associada, isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \widehat{y}_{k+j} &= \sum_{j=0}^{n} \gamma_j (w_{k+j} - z_{k+j}) = \\ = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j w_{k+j} - \sum_{j=0}^{n} \gamma_j z_{k+j} &= \phi_k - \phi_k = 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \qquad (6.1.3)$$

De (6.1.3), vê-se que (qualquer) uma solução $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de (6.1.1) decompõe-se como uma soma da solução da equação homogênea com uma *solução particular* $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a qual satisfaz

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j z_{k+j} = \phi_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Em outras palavras, das observações anteriores, conclui-se que a solução geral de uma equação de diferenças linear se escreve como a soma da solução de sua equação homogênea associada com uma solução particular, isto é,

$$w_k = \widehat{y}_k + z_k, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.1.4}$$

onde $\widehat{y}$ é solução da equação homogênea e z é uma solução particular da equação não homogênea.

Portanto, percebe-se que a equação de diferenças (6.1.1) não possui solução única; de fato, possui infinitas soluções! Para garantirmos unicidade, a equação de n passos deve vir acompanhada de n condições iniciais. Assim, dados $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, podemos calcular de forma única y_n, e consequente de forma única os valores y_k, $k > n$, usando a relação

$$y_{k+n} = \phi_k - \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j y_{k+j}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.1.5}$$

Um caminho para calcularmos a solução única do problema não homogêneo é:

(i) achar um conjunto de soluções possíveis para o problema homogêneo;

(ii) achar uma solução particular da equação não homogênea;

(iii) definir a solução geral do problema como sendo combinação linear das soluções possíveis do problema homogêneo com a solução particular;

(iv) buscar dentro do conjunto de soluções gerais a única solução do problema não homogêneo que satisfaça as condições iniciais.

Definição 6.1 (Independência linear)**.** *Dizemos que m sequências $y^{(1)} = \{y_k^{(1)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $y^{(2)} = \{y_k^{(2)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, ..., $y^{(m)} = \{y_k^{(m)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ são* linearmente independentes *quando a combinação linear*

$$a_1 y_k^{(1)} + a_2 y_k^{(2)} + \ldots a_m y_k^{(m)} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \tag{6.1.6}$$

implicar em $a_l = 0$, $l = 1, 2, \ldots, m$.

Teorema 6.1 (Sistema de soluções fundamentais)**.** *Sejam $y^{(1)} = \{y_k^{(1)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $y^{(2)} = \{y_k^{(2)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, ..., $y^{(n)} = \{y_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequências linearmente independentes, soluções da equação de diferenças homogênea com n passos (6.1.2). Esse conjunto de n sequências linearmente independentes forma o que chamamos de um* sistema fundamental de soluções. *Toda solução de (6.1.2) é dada como combinação linear de sequencias desse conjunto. Portanto, w é solução de (6.1.2) se, e somente se,*

$$w = \sum_{l=1}^{n} a_l y^{(l)},$$

com $a_l \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1, ..., n$.

A demonstração desse teorema vem de alguns resultados de Algebra Linear. Em particular, o espaço de soluções de equações de diferenças homogêneas com n passos tem dimensão n. As n sequências $y^{(l)}$, $l = 1, 2, ..., n$ são linearmente independentes, portanto formam uma base para o espaço. Logo, a demonstração desse teorema decorre de que simplesmente qualquer solução pode ser escrita nessa base.

O primeiro passo na busca de soluções de uma equação de diferenças linear homogênea com n passos é achar as soluções fundamentais, isto é, n sequências linearmente independentes, todas soluções da equação, que juntas formam uma base para definir qualquer solução da equação homogênea.

Uma forma de achar uma solução para o problema homogêneo é supor que a sequência tenha a forma $y_k = r^k$, com k potência de r, para algum $r \in \mathbb{R}$. Substituindo essa proposta de solução na equação homogênea (6.1.2) temos

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j r^{k+j} = r^k \sum_{j=0}^{n} \gamma_j r^j = 0 \tag{6.1.7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^k = 0 \Rightarrow r = 0: \text{ solução trivial,} \\ \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \gamma_j r^j = 0 \Rightarrow r \text{ é uma raiz do polinômio} \\ \qquad\qquad \rho_n(r) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \gamma_j r^j. \end{cases}$$

Definição 6.2 (Polinômio característico)**.** *Definimos como polinômio característico associado à equação de diferenças homogênea de* n *passos* (6.1.2) *o polinômio de grau* n *dado por*

$$\rho_n(r) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j r^j. \tag{6.1.8}$$

Se todas as raízes do polinômio característico $\rho_n(r)$ forem distintas, então acabamos de achar n sequências que resolvem o problema homogêneo. Sejam $r_1, r_2, ..., r_n$ as n raízes de ρ_n e considere as sequências $y^{(l)} = \{y_k^{(l)}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{r_l^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $l = 1, 2, ..., n$. Observe a troca de índices por potências para cada termo da sequência. $y_k^{(l)} = r_l^k$ significa que o k-ésimo termo da l-ésima sequência tem valor r_l^k, isto é, a l-ésima raiz de ρ_n (r_l) elevada à potência k. Da equação (6.1.7), vemos que as sequências $y^{(l)}$ satisfazem a equação de diferenças homogênea (6.1.2).

Para que essas sequências formem um sistema de soluções fundamentais (base) para o problema homogêneo é necessário que elas sejam linearmente independentes. Isso pode ser analisado considerando o seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} a_1 & + & a_2 & + & \cdots & + & a_n & = & 0 \\ a_1 r_1 & + & a_2 r_2 & + & \cdots & + & a_n r_n & = & 0 \\ a_1 r_1^2 & + & a_2 r_2^2 & + & \cdots & + & a_n r_n^2 & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_1 r_1^n & + & a_2 r_2^n & + & \cdots & + & a_n r_n^n & = & 0 \end{cases}. \tag{6.1.9}$$

Se for possível acharmos $a_1, a_2, ..., a_n$, não todos nulos, tal que o sistema seja satisfeito, então as sequências são linearmente *dependentes*, pois pode-se escrever uma em função das demais. Caso contrário, as sequências são linearmente *independentes*. A matriz que forma o sistema linear é uma matriz conhecida como matriz de Vandermonde, cujo determinante é dado por

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j). \tag{6.1.10}$$

Como as raízes são distintas, $D \neq 0$, e portanto o sistema tem solução única. Como a solução trivial (nula) resolve o sistema, a única solução do sistema será com $a_l = 0$, $l = 1, 2, ..., n$. Logo, as sequências são linearmente independentes.

Concluímos portanto que, caso o polinômio característico tenha raízes distintas, qualquer solução do problema homogêneo pode ser escrita como

$$w = \sum_{l=1}^{n} a_l y^{(l)}, \tag{6.1.11}$$

ou em notação de sequências

$$\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{l=1}^{n} a_l \{r_l^k\}_{k \in \mathbb{N}}. \tag{6.1.12}$$

Se conhecermos uma sequência que seja solução particular do problema não homogêneo, $\psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, então a solução geral da equação de diferenças linear não homogênea será dada por

$$w_k = \sum_{l=1}^{n} a_l r_l^k + \psi_k.$$

Se o problema homogêneo estiver acompanhado de n condições iniciais (y_0, y_1, y_2, ...,y_{n-1}), então podemos encontrar os coeficientes a_l, de forma a obter a solução única da equação de diferenças (6.1.1), resolvendo o sistema (não singular)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & \cdots & + & a_n & = & y_0 - \psi_0 \\ a_1 r_1 & + & a_2 r_2 & + & \cdots & + & a_n r_n & = & y_1 - \psi_1 \\ a_1 r_1^2 & + & a_2 r_2^2 & + & \cdots & + & a_n r_n^2 & = & y_2 - \psi_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_1 r_1^n & + & a_2 r_2^n & + & \cdots & + & a_n r_n^n & = & y_{n-1} - \psi_{n-1} \end{array} \right. . \tag{6.1.13}$$

Um caso particular de interesse para a teoria a ser exposta a seguir ocorre quando $\sum_{j=0}^{n} \gamma_j \neq 0$ e se tem o lado direito não homogêneo de (6.1.1) dado por uma sequência *constante* $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ para a qual se tem $\phi_k = \phi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Nestas condições, não é difícil de se verificar que uma solução particular do problema é $\psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com

$$\psi_k = \frac{\phi}{\sum_{j=0}^{n} \gamma_j}, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

desde que $\sum_{l=0}^{n} \gamma_l \neq 0$.

No caso de raízes múltiplas, alguns ajustes são necessários, e usaremos o seguinte teorema para nos auxiliar.

Teorema 6.2 (Solução de equações de diferenças lineares homogêneas)**.** *Considere a seguinte equação de diferenças linear homogênea*

$$\gamma_n y_{k+n} + \gamma_{n-1} y_{k+n-1} + \cdots + \gamma_0 y_k = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j y_{k+j} = 0 \ , \ k = 0, 1, \ldots, \tag{6.1.14}$$

com $\gamma_n \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., n$. *Sejam* r_l, $l = 1, 2, .., n_r$ *raízes do polinômio característico associado,*

$$\rho_n(r) = \sum_{l=0}^{n} \gamma_l r^l,$$

com respectivas multiplicidades m_1, m_2, ..., m_{n_r}, *satisfazendo* $\sum_{l=1}^{n_r} m_l = n$.

Se uma sequência $\{y_k\}$ *de números complexos satisfaz a equação de diferenças homogênea, então*

$$y_k = \sum_{l=1}^{n_r} p_l(k) r_l^k, \tag{6.1.15}$$

onde $p_l(k)$ *é um polinômio em* k *de grau* $m_l - 1$. *Se todas as raízes forem simples* ($m_l = 1$), *então* p_l *são constantes. [9]*

O caso de raízes simples já foi demonstrado anteriormente. Ressaltamos que caso hajam raízes complexas, é possível que observemos soluções também complexas. Porém, dadas condições iniciais reais, a sequência única a ser encontrada terá necessariamente apenas valores reais, tendo em vista que os próximos termos são obtidos a partir dos anteriores e os coeficiente γ_l são reais.

Comentaremos brevemente o caso no qual as raízes tem multiplicidades maiores ou iguais a 1.

Quando as raízes eram simples, tomávamos para cada raiz r_l uma sequência da forma $y^{(l)} = \{r_l^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Se r_l tem agora multiplicidade m_l, precisamos de m_l sequências relacionadas a esta raiz. Podemos definir tais sequências da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
y^{(l,1)} &= \{r_l^k\}_{k\in\mathbb{N}} \\
y^{(l,2)} &= \{k r_l^k\}_{k\in\mathbb{N}} \\
y^{(l,3)} &= \{k(k-1) r_l^k\}_{k\in\mathbb{N}} \\
\vdots \quad & = \vdots \\
y^{(l,m_l)} &= \{k(k-1)\ldots(k-m_l+2) r_l^k\}_{k\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

É fácil mostrar que as sequências $y^{(l,k)}$, $k = 1, 2, ..., m_l$, satisfazem a equação homogênea, pois sabemos, da multiplicidade da raiz, que $\rho_n(r_l) = \rho_n'(r_l) = \rho_n''(r_l) = \ldots = \rho_n^{(m_l-1)}(r_l) = 0$. Resta mostrar que as sequências são linearmente independentes. O determinante do sistema associado a analise de independência linear tem

como determinante algo parecido com o caso de raízes simples, sendo este dependente de um produto de diferenças entre as raízes (com potências relacionadas às multiplicidades). Portanto, as sequências são linearmente independentes.

Assim, as soluções do problema homogêneo no caso de termos raízes com multiplicidade maior que um são da forma

$$w = \sum_{l=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{m_l} a_{lj} y^{(l,j)}, \tag{6.1.16}$$

onde n_r é o número de raízes do polinômio característico, m_l são as respectivas multiplicidades e a_{lj} definem $n = \sum_{l=1}^{n_r} m_l$ coeficientes a serem encontrados com base nas condições iniciais.

Por exemplo, se r_1 for uma raiz de multiplicidade dois, e as demais raízes multiplicidade 1, tem-se como solução geral da equação não homogênea

$$y_k = a_{1,1} r_1^k + a_{1,2} k r_1^k + \sum_{l=2}^{n} a_l r_l^k + \psi_k, \tag{6.1.17}$$

onde ψ_k vem de uma solução particular da equação.

Explicitamente, se temos n_r raízes, com cada raiz r_l tendo multiplicidade m_l, a solução geral será

$$\begin{aligned} y_k &= \left[a_{1,1} + a_{1,2}k + \cdots a_{1,m_1} k(k-1)(k-2)...(k-m_1+2)\right] r_1^k \\ &+ \left[a_{2,1} + a_{2,2}k + \cdots + a_{2,m_2} k(k-1)(k-2)...(k-m_2+2)\right] r_2^k \\ &\vdots \\ &+ \left[a_{n_r,1} + a_{n_r,2}k + \cdots + a_{n_r,m_{n_r}} k(k-1)(k-2)...(k-m_{n_r}+2)\right] r_{n_r}^k \\ &+ \psi_k. \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

Exemplo 6.1. *Considere a equação de diferenças*

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0, \tag{6.1.19}$$

com $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Encontre a solução (única) deste problema.
Solução: O polinômio característico,

$$\rho_2(r) = r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2), \tag{6.1.20}$$

tem raízes $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Portanto, toda solução da equação pode ser escrita como

$$y_k = a_1(1)^k + a_2(-2)^k. \tag{6.1.21}$$

Impondo as condições iniciais temos,

$$a_1(1)^0 + a_2(-2)^0 = a_1 + a_2 = y_0 = 0, \tag{6.1.22}$$

$$a_1(1)^1 + a_2(-2)^1 = a_1 - 2a_2 = y_1 = 1. \tag{6.1.23}$$

$$\tag{6.1.24}$$

Portanto, $a_1 = 1/3$ e $a_2 = -1/3$ e a solução única resultante é

$$y_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^k. \tag{6.1.25}$$

Exemplo 6.2 ([16]). *Encontre a solução da equação de diferenças linear*

$$y_{k+4} - 4y_{k+3} + 5y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 4 \tag{6.1.26}$$

satisfazendo $y_0 = 5$, $y_1 = 0$, $y_2 = -4$ *e* $y_3 = -12$.
Solução:

$$\begin{aligned} p_4(r) &= \sum_{j=0}^{4} \gamma_j r^j = \gamma_4 r^4 + \gamma_3 r^3 + \gamma_2 r^2 + \gamma_1 r + \gamma_0 \\ p_4(r) &= r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 4 \\ &= (r^2+1)(r-2)^2 \\ &= (r-i)(r+i)(r-2)^2 \\ \textit{Raízes:} &\quad r_1 = 2 \ ; r_2 = -i \ e \ r_3 = i. \end{aligned} \tag{6.1.27}$$

Solução particular:

$$\psi_k = \frac{\phi}{\sum_{j=0}^{n} \gamma_j} = \frac{4}{1-4+5-4+4} = 2 \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

Como $r_1 = 2$ *é uma raiz de multiplicidade dois e a solução particular é* $\psi_k = 2$, *a solução geral da equação não homogênea é dada por*

$$y_k = a_{1,1} r_1^k + a_{1,2} k r_1^k + a_2 r_2^k + a_3 r_3^k + 2. \tag{6.1.28}$$

Das condições iniciais

$$\begin{aligned} y_0 &= a_{1,1} + a_2 + a_3 + 2 = 5, \\ y_1 &= a_{1,1} 2 + a_{1,2} 1 \cdot 2 + a_2(-i) + a_3(i) + 2 = 0, \\ y_2 &= a_{1,1} 2^2 + a_{1,2} 2 \cdot 2^2 + a_2(-i)^2 + a_3(i)^2 + 2 = -4, \\ y_3 &= a_{1,1} 2^3 + a_{1,2} 3 \cdot 2^3 + a_2(-i)^3 + a_3(i)^3 + 2 = -12, \end{aligned}$$

obtêm-se um sistema linear de quarta ordem cujas incógnitas são $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, a_2 *e* a_3. *A solução desse sistema é*

$$a_{1,1} = 1 \ , \ a_{1,2} = -1 \ , \ a_2 = 1 - i \ , \ a_3 = 1 + i. \tag{6.1.29}$$

Substituindo as raízes (6.1.27) e os coeficientes (6.1.29) na equação (6.1.28), tem-se

$$\begin{aligned} y_k &= 1 \cdot 2^k + (-1) k 2^k + (1-i)(-i)^k + (1+i)(i)^k + 2 \\ &= (1-k) 2^k + (1-i)(-i)^k + (1+i)(i)^k + 2 \ , \ k = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{6.1.30}$$

(Verifique que de fato essa sequência resolve a equação de diferenças!)

6.1.1 Exercícios

Exercício 6.1. *Calcule os termos* y_4, y_5 *e* y_6 *da solução (6.1.30) empregando*

(a) a própria solução (6.1.30);

(b) a equação de diferenças linear não homogenêa (6.1.26).

Exercício 6.2. *Como os coeficientes de (6.1.26) são reais e as condições iniciais também, y_k é necessariamente real. Mostre que $(1-i)(-i)^k + (1+i)(i)^k$ é um número real para qualquer natural k ou, equivalentemente, mostre que*

$$y_k = 2\left[cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] + (1-k)2^k + 2$$

lembrando que $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercício 6.3. *A sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros onde $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ e cada um dos demais termos é dado pela soma dos dois termos precedentes.*

(a) Escreva a equação de diferenças linear que define a sequência de Fibonacci.

(b) Determine a solução empregando a teoria estudada.

(c) Determine os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci.

(d) Determine y_{100}, usando a solução analítica calculada.

(e) Determine y_{101}/y_{100} e analise o limite de y_{k+1}/y_k quando $k \to \infty$.

6.2 Exemplo de divergência

Discutiremos aqui um exemplo de um método de terceira ordem de consistência que não converge para a solução esperada do problema de Cauchy. Partes deste exemplo estão descritas em detalhes em [24].

6.2.1 Consistência e divergência

Considere o método de 2-passos explícito

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = h\left[\beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k\right]. \tag{6.2.31}$$

Calculando-se os coeficientes do erro de discretização local obtêm-se

$$\begin{aligned}
C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + 1 = 0,\\
C_1 &= 0\cdot\alpha_0 + 1\cdot\alpha_1 + 2\cdot 1 - \beta_0 - \beta_1 = 0,\\
C_2 &= \frac{0^2\cdot\alpha_0 + 1^2\cdot\alpha_1 + 2^2\cdot 1}{2!} - \frac{0\cdot\beta_0 + 1\cdot\beta_1}{1!} = 0,\\
C_3 &= \frac{0^3\cdot\alpha_0 + 1^3\cdot\alpha_1 + 2^3\cdot 1}{3!} - \frac{0^2\cdot\beta_0 + 1^2\cdot\beta_1}{2!} = 0.
\end{aligned} \tag{6.2.32}$$

A solução do sistema linear (6.2.32) é $\alpha_0 = -5$, $\alpha_1 = 4$, $\beta_0 = 2$ e $\beta_1 = 4$. Com os coeficientes determinados, o método resultante,

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} - 5y_k = h\left[4f_{k+1} + 2f_k\right], \tag{6.2.33}$$

assume a maior ordem possível. Portanto, obtivemos um método de terceira ordem de consistência, mas que possui apenas 2 passos. Para ser útil, este método deveria funcionar para qualquer problema de valor inicial que tenha f suficientemente suave.

Exemplo 6.3. *Solucione o Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = 0, \quad t \in [0,1], \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{6.2.34}$$

utilizando o método de terceira ordem (6.2.33) com inicialização consistente dada por $y_1 = h$.
Solução: O problema de valor inicial está bem posto e tem como solução única a soluçã $y(t) = 0$. *O método pode ser escrito para este problema como*

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} - 5y_k = 0, \tag{6.2.35}$$

que é uma equação de diferenças linear homogênea. O polinômio característico tem raízes $r_1 = 1$ *e* $r_2 = -5$, *portanto as solução devem ser da forma*

$$y_k = a_1(1)^k + a_2(-5)^k. \tag{6.2.36}$$

Imponto as condições iniciais temos que

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 - 5a_2 &= h, \end{aligned}$$

que definem $a_1 = -h/6$ *e* $a_2 = h/6$. *Assumindo um* $t \in [0,1]$ *fixado, e portanto que* $t - 0 = kh$ *é constante, temos que a solução única será dada por*

$$y_k = -\frac{t}{6k} + \frac{t}{6k}(-5)^k. \tag{6.2.37}$$

Agora note que, por exemplo em $t = 1$, *temos*

$$\lim_{h\to 0} y_k = \lim_{k\to\infty}(-\frac{1}{6k} + \frac{(-5)^k}{6k}) = \lim_{k\to\infty}\frac{(-5)^k}{6k} \neq 0, \tag{6.2.38}$$

portanto o método, apesar de ser consistente com o problema, não converge para solução analítica do mesmo com $h \to 0$. *O pequeno erro cometido na inicialização, ainda que esta tenha sido feita de forma consistente, é exponencialmente amplificado pelo termo* $(-5)^k$ *da solução, que também fará com que a solução numérica oscile em torno do zero. Note também que isso vale para qualquer* $t > 0$ *fixado.*

O exemplo anterior mostra que o método apresentado aqui não será útil mesmo para um problema muito simples (este será instável) se tivermos pequenos erros na inicialização. Se a condição inicial tivesse sido imposta de forma exata no exemplo anterior, com $y_1 = 0$, então o método seria exato, sem erro algum, com $y_k = 0$, $\forall k > 0$. Para compreender melhor esse fenômeno, vamos dar um exemplo menos trivial com inicialização sem erro.

Exemplo 6.4. *Solucione o Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = -y(t), \quad t \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{6.2.39}$$

utilizando o método de terceira ordem (6.2.33) com inicialização $y_0 = 1$, $y_1 = e^{-h}$ *e* $h = 0,01$.
Solução:

A solução exata do problema é $y(t) = e^{-t}$, portanto a inicialização está sendo feita de forma analítica. A discretização de (6.2.39) por (6.2.33) é dada por

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= -4y_{k+1} + 5y_k + h\left[4f_{k+1} + 2f_k\right] = \\ &= -4y_{k+1} + 5y_k + h\left[-4y_{k+1} - 2y_k\right] = \\ &= -(4+4h)y_{k+1} + (5-2h)y_k, \end{aligned}$$

ou, reescrevendo-a, por

$$y_{k+2} + (4+4h)y_{k+1} + (-5+2h)y_k = 0. \tag{6.2.40}$$

A equação (6.2.40) é uma equação de diferenças linear homogênea com $\gamma_2 = 1$, $\gamma_1 = 4+4h$ e $\gamma_0 = -5+2h$, cuja solução (exata) se escreve como

$$y_k = a_1 r_1^k + a_2 r_2^k, \tag{6.2.41}$$

onde r_j são as raízes do polinômio

$$p_2(r) = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j r^j = \gamma_2 r^2 + \gamma_1 r^1 + \gamma_0 = r^2 + (4+4h)r + (-5+2h)$$

e as contantes a_j, $j = 1, 2$, são calculadas a partir das condições iniciais da equação de diferenças

$$y(t_0) = y_0 = 1 \quad e \quad y_1 = y(t_0 + h) = y(0+h) = e^{-h}.$$

Calculando-se as raízes de $p_2(r)$, obtêm-se

$$r_1 = -2 - 2h + 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2}$$

e

$$r_2 = -2 - 2h - 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2},$$

e calculando-se a_1 e a_2 chega-se a

$$\begin{cases} 1 = y_0 = a_1 + a_2 \\ e^{-h} = y_1 = a_1 r_1 + a_2 r_2 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 = \frac{r_2 - e^{-h}}{r_2 - r_1} \quad e \quad a_2 = \frac{e^{-h} - r_1}{r_2 - r_1} \ .$$

Assim,

$$y_k = \frac{r_2 - e^{-h}}{r_2 - r_1} r_1^k + \frac{e^{-h} - r_1}{r_2 - r_1} r_2^k \tag{6.2.42}$$

é a solução exata da equação de diferenças (6.2.40), resultante da aplicação do esquema numérico (6.2.33) ao Problema de Cauchy (6.2.39).

As diferenças entre a solução numérica (6.2.42) e a solução exata, para vários valores de instantes de tempo, encontram-se na Tabela 6.1. Observa-se que o método de passo múltiplo linear consistente (6.2.33) diverge da solução do problema (6.2.39).

É importante destacar que o resultado exibido pela Tabela 6.1 não melhora fazendo-se com que o passo de integração h diminua. No limite para h tendendo a zero, r_1 tende a um e r_2 tende a -5. O caráter ilimitado do erro de discretização global é devido à raiz com módulo maior que um, associada ao polinômio característico da equação de diferenças (6.2.40) quando $h = 0$. Como conclusão, vê-se que, mesmo consistentes e com ordem máxima, métodos de passo múltiplo lineares podem ser divergentes. O que falta para a convergência é o estudo da zero-estabilidade de tais esquemas numéricos.

k	$y_k - e^{t_k}$
2	$-1,4 \times 10^{-9}$
3	$+5,01 \times 10^{-9}$
4	$-3,00 \times 10^{-8}$
5	$+1,44 \times 10^{-7}$
$\vdots$	$\vdots$
98	$-2,57 \times 10^{58}$
99	$+1,29 \times 10^{59}$
100	$-6,52 \times 10^{59}$

Tabela 6.1: Erro de discretização global obtido na solução do problema de valor inicial (6.2.39) com o método (6.2.33) e $h = 0,01$.[24]

6.2.2 Exercícios

Exercício 6.4. *Calcule $y_2, \cdots, y_{100}$ usando a solução exata da equação de diferenças, (6.2.42), e usando a própria equação de diferenças, (6.2.33).*

6.2.3 Relação com as raízes do polinômio característico

Os resultados presentes na Tabela 6.1 mostram que consistência e alta ordem não bastam à convergência. Usando a solução (6.2.41)-(6.2.42) da equação de diferenças, pode-se explicar as causas desse comportamento.

Ao se expandir as raízes r_1 e r_2, assim como das constantes a_1 e a_2, em Série de Taylor como função de h em torno de $h = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} r_1 &= -2 - 2h + 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2} = 1 - h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{72}h^4 + O(h^5) \\ &\text{e} \\ r_2 &= -2 - 2h - 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2} = -5 - 3h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{72}h^4 + O(h^5) \end{aligned}$$

pois

$$\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2} = 1 + \frac{1}{3}h + \frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{18}h^3 + \frac{1}{216}h^4 + O(h^5).$$

Lembrando-se de que a função exponencial tem desenvolvimento em série de Taylor dado por

$$e^{-h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-h)^n}{n!} = 1 - h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + O(h^5),$$

para as constantes a_1 e a_2, obtêm-se

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{r_2 - e^{-h}}{r_2 - r_1} &= 1 + O(h^2), \\ a_2 = \frac{e^{-h} - r_1}{r_2 - r_1} &= -\frac{1}{216}h^4 + O(h^5). \end{aligned}$$

Dessa forma, das observações anteriores, têm-se a solução para o tempo $t = hk$

$$\begin{aligned}
y_k &= a_1 r_1^k + a_2 r_2^k \\
&= \left[1 + O\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)\right]\left[1 - \left(\frac{t}{k}\right) + O\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)\right]^k + \\
&- \frac{1}{216}\left(\frac{t}{k}\right)^4 \left[1 - O\left(\frac{t}{k}\right)\right]\left[-5 - 3\left(\frac{t}{k}\right) + O\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)\right]^k = \\
&= \left[1 + O\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)\right]\left[1 - \left(\frac{t}{k}\right) + O\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)\right]^k + \\
&- \frac{1}{216}\left(\frac{t}{k}\right)^4 (-5)^k \left[1 - O\left(\frac{t}{k}\right)\right]\left[1 + \frac{3}{5}\left(\frac{t}{k}\right) + O\left(\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)\right]^k,
\end{aligned} \tag{6.2.43}$$

onde y_k representa a solução numérica, ou seja, a solução da equação de diferenças linear.

Lembrando-se que $kh = t - 0$ permanece fixado, à medida que k tende a infinito, observa-se que a primeira parcela do lado direito de (6.2.43) tende a e^{-t}, a solução exata do Problema de Cauchy (6.2.39). Entretanto, a segunda parcela comporta-se como

$$-\frac{t^4}{216}\frac{(-5)^k}{k^4} e^{\frac{3t}{5}}. \tag{6.2.44}$$

Nas considerações anteriores, empregam-se os limites fundamentais

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e,$$

$$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{a}{b}\frac{1}{k}\right)^k = e^{\frac{a}{b}}.$$

Em (6.2.44),

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-5)^k}{k^4}\right| = \infty, \tag{6.2.45}$$

uma vez que $5^k >> k^4$ quando $k \to \infty$.

Portanto, o limite (6.2.45) explica o comportamento oscilatório e ilimitado da solução y_k quando $k \to \infty$ ($k \to \infty \iff h \to 0$).

De (6.2.43), conclui-se então que o comportamento da solução da equação de diferenças é controlado pela maior raiz do polinômio

$$p_2(r) = r^2 + (4 + 4h)r + (-5 + 2h),$$

ou seja, $r_1 = -2 - 2h + 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2}$. Com h tendendo a zero, tem-se

$$p_2(r) \to r^2 + 4r - 5,$$

cujas raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = -5$.

6.3 Primeiro e segundo polinômios característicos

Considere o método de passo múltiplo linear

$$y_{k+n} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{n} \beta_j f_{k+j}. \tag{6.3.46}$$

O primeiro e o segundo polinômios característicos associados ao método são definidos, respectivamente, por ρ e σ,

$$\rho(r) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j r^j \tag{6.3.47}$$

$$\sigma(r) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j r^j, \tag{6.3.48}$$

onde α_n é tomado como sendo um.

Observe que, em relação aos polinômios característicos (6.3.47) e (6.3.48), um método de passo múltiplo linear (6.3.46) é consistente para qualquer problema de valor inicial bem posto se, e somente se,

$$\rho(1) = 0$$

e

$$\rho'(1) - \sigma(1) = 0.$$

Veja

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j r^j = \alpha_0 r^0 + \alpha_1 r^1 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \cdots + \alpha_n r^n, \\
\rho(1) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = C_0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho(1) = 0 \Rightarrow C_0 = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\rho'(r) &= \alpha_1 + 2\alpha_2 r^1 + 3\alpha_3 r^2 + 4\alpha_4 r^3 + \cdots + n\alpha_n r^{n-1}, \\
\rho'(1) &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + \cdots + n\alpha_n = \sum_{j=0}^{n} j\alpha_j \sigma(r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(r) &= \sum_{j=0}^{n} \beta_j r^j = \beta_0 r^0 + \beta_1 r^1 + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \cdots + \beta_n r^n, \\
\sigma(1) &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \\
\rho'(1) - \sigma(1) &= \sum_{j=0}^{n} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{n} \beta_j = C_1
\end{aligned}$$

portanto,

$$\rho'(1) - \sigma(1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Em um método de passo múltiplo linear, o primeiro polinômio característico $\rho(r)$ tem sempre uma raiz igual a 1. Esta raiz é denominada *raiz principal* e geralmente denotada por r_1. Assim, a consistência de um método de passo múltiplo linear depende apenas da raiz principal $r_1 = 1$.

6.4 Zero-estabilidade

A zero-estabilidade de um método de passo múltiplo linear diz respeito ao estudo da estabilidade para no limite para h tendendo a zero. Esta pode ser analisado com base no seguinte problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = 0 \quad t \in [t_0, T] \\ \\ y(t_0) = 0 \end{cases}, \tag{6.4.49}$$

cuja solução exata é dada por $y(t) = 0$. Ao se aplicar o método de passo múltiplo linear

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{n} \beta_j f_{k+j} \tag{6.4.50}$$

para resolver (6.4.49), tem-se

$$\alpha_n y_{k+n} + \alpha_{n-1} y_{k+n-1} + \cdots + \alpha_0 y_k = 0, \tag{6.4.51}$$

uma vez que $f(t, y(t)) = 0$. A relação (6.4.51) é uma equação de diferenças linear homogênea.

Se o método (6.4.50) for convergente então

$$\lim_{h \to 0} y_k = 0, \quad kh = t - t_0 \text{ fixado}, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Para simplificar a análise num primeiro momento, suponha que as raízes do polinômio característico da equação de diferenças (6.4.51)

$$p_n(r) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j r^j, \tag{6.4.52}$$

o qual coincide com o primeiro polinômio característico do método de passo múltiplo (6.4.50), sejam reais e distintas, denotadas por r_l, $l = 1, 2, \ldots, n$. Neste contexto, a solução de (6.4.51) pode ser escrita como

$$y_k = a_1 r_1^k + a_2 r_2^k + a_3 r_3^k + \cdots + a_n r_n^k, \tag{6.4.53}$$

onde as constantes a_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, são obtidas a partir das n primeiras aproximações da solução exata $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, nos instantes $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. É natural que se utilize $y_0 = y(t_0) = 0$ (a condição inicial dada para o problema estudado). As aproximações nos outros $n-1$ instantes de tempo devem ser obtidas

numericamente, por exemplo e para fixar ideias, por um método de passo único de primeira ordem, isto é,

$$y_k = 0 + \mathrm{O}(h), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{6.4.54}$$

Buscamos soluções da forma (6.4.53) que respeitem as condições iniciais (6.4.54), portanto

$$a_1 r_1^k + a_2 r_2^k + a_3 r_3^k + \cdots + a_n r_n^k = O(h), \quad , k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{6.4.55}$$

É simples ver que as solução desse problema são da forma $a_l = hd_l$, para que a igualdade seja verificada com $h \to 0$. Logo, pode-se escrever a solução do problema homogêneo como y_k, $k \geq n$, da forma

$$y_k = h\left(d_1 r_1^k + d_2 r_2^k + \cdots + d_n r_n^k\right).$$

Considerando a convergência do método para a solução exata do problema (no caso, a solução trivial), tem-se

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ kh = t - t_0}} y_k = 0$$

e, portanto, para cada parcela que compõe a solução numérica y_k devemos ter

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ kh = t - t_0}} h r_j^k = \lim_{k \to \infty} \frac{t - t_0}{k} r_j^k = t - t_0 \lim_{k \to \infty} \frac{r_j^k}{k} = 0. \tag{6.4.56}$$

Note que o método jamais poderá ser convergente se o módulo de qualquer uma das raízes r_j for maior do que 1. Em outras palavras, o limite em (6.4.56) será zero se e somente se $|r_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Isso nos leva ao seguinte teorema.

Teorema 6.3 (Critério das raízes simples reais)**.** *Um método de passos múltiplos linear de n passos da forma (6.4.50), com inicialização consistente, que tenha o primeiro polinômio característico com raízes simples, distintas e reais é convergente somente se*

$$|r_j| \leq 1, \quad j = 1, \cdots, n \ ,$$

sendo r_j as raízes do seu primeiro polinômio característico.

Se o polinômio (6.4.52) tiver uma raiz com multiplicidade maior que um, por exemplo r_j com multiplicidade $m > 1$, então tal raiz contribuirá para a solução da equação de diferenças com uma parcela da forma

$$\left[a_{j,1} + a_{j,2}k + \cdots + a_{j,m}k(k-1)\cdots(k-m+2)\right] r_j^k.$$

Se $|r_j| \geq 1$, o termo dominante quando $k \to \infty$ ($h \to 0$) é o termo de maior grau em k, referente a $a_{j,m}$. Analisando a forma geral da solução do problema, descrita na equação (6.1.18), vemos que quando houver uma multiplicidade $m > 1$, essa raiz sempre contribuirá com uma parcela da forma $hk^{m-1}r_j^k$, $m > 1$. Para tais parcelas, tem-se, para um instante de tempo t fixado, o limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ kh = t - t_0}} hk^{m-1} r_j^k = \lim_{k \to \infty} \frac{t - t_0}{k} k^{m-1} r_j^k = t - t_0 \lim_{k \to \infty} k^{m-2} r_j^k. \tag{6.4.57}$$

Se $m = 2$, então esta equação (6.4.57), e de fato a equação geral (6.4.56), será da forma

$$\lim_{k\to\infty} k\frac{r_j^k}{k}. \tag{6.4.58}$$

Neste caso, como $|r_j| \geq 1$, o limite não vai a zero com $k \to \infty$. Se $|r_j| = 1$, o limite será ± 1, e se $|r_j| > 1$, o limite será $\pm\infty$. Caso $m > 2$, então vemos que a equação (6.4.57) irá para $\pm\infty$ quando $k \to \infty$.

Concluímos, portanto, que se $m > 1$ não há convergência se $|r_j| \geq 1$, mesmo que $|r_j| = 1$. Logo, o método poderá convergir para a solução exata do problema-modelo proposto somente se o limite em (6.4.57) for zero, que só ocorre quando $|r_j| < 1$.

Teorema 6.4 (Critério das raízes)**.** *Um método de passos múltiplos linear de n passos da forma (6.4.50) que tenha primeiro polinômio característico com raízes r_j, $j = 1, 2, ..., n_r$, é convergente somente se*

$$\begin{aligned} &|r_j| \leq 1, && \textit{se } r_j \textit{ for raiz simples,} \\ &|r_j| < 1, && \textit{se } r_j \textit{ for raiz com multiplicidade maior que 1.} \end{aligned}$$

É importante destacar que o critério das raízes é necessário para convergência, mas não suficiente, pois mostramos a sua necessidade para apenas um único problema de valor inicial. Para garantia de convergência para qualquer problema de valor inicial bem posto vamos precisar de algo além desse crierio.

Definição 6.3 (Zero-estabilidade)**.** *Um método de passo múltiplo linear é zero-estável se nenhuma raiz do primeiro polinômio característico*

$$\rho(r) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j r^j \tag{6.4.59}$$

tiver módulo maior que 1 e toda raiz com módulo 1 for simples (multiplicidade um).

Note que aqui estamos também interessados em raízes complexas. Portanto, dizemos que o método é zero-estável se as raízes do seu primeiro polinômio característico estiverem no interior do disco unitário fechado do plano complexo, sendo que aquelas que estiveram no bordo (tenham módulo igual a 1) devem ter multiplicidade 1.

Se analisarmos o caso dos métodos de passo único explícitos (2.0.1), vemos que estes sempre tem primeiro polinômio característico dado por

$$\rho(r) = r - 1, \tag{6.4.60}$$

com raiz simples e igual a 1. Se o método for consistente com qualquer problema de Cauchy bem posto, de forma a garantir que a Φ do lado direito de (2.0.1) seja de pelo menos $O(h^p)$, $p \geq 0$, e portanto respeitando o problema modelo $y' = 0$ quando $h \to 0$, temos o seguinte resultado.

Teorema 6.5. *Todo método de passo único explícito consistente é zero-estável.*

O principal resultado deste capítulo relaciona zero-estabilidade com convergência, e é descrito a seguir.

Teorema 6.6 (Teorema de Equivalência de Dahlquist)**.** *Um método de n passos linear* ***consistente*** *com a equação diferencial $y' = f(t, y)$, sendo f Lipschitz, com condições iniciais consistentes, isto é, $y_j = \theta_j(h)$, $j = 0, 1, ..., n-1$ são tais que $\theta_j(h) \to 0$ quando $h \to 0$, é* ***convergente*** *se e somente se é* ***zero-estável****. Além disso, se f for suficientemente diferenciável, e o erro local de discretização e inicialização tiverem ambas ordem p, então o erro global também terá ordem p.*

A demonstração da necessidade de um método ser zero-estável para obtermos convergência segue do critério das raízes. Porém, a volta, que garante que um método consistente zero-estável é sempre convergente, exige outros resultados que estão além do escopo destas notas. A prova pode ser encontrada em [13, 24], mas foi primeiro discutida por Dalhquilst [6].

6.5 Ordem de convergência

O teorema de equivalência de Dahlquist nos garante que para buscar métodos de uma certa ordem de convergência, que sejam zero-estáveis, basta analisar a ordem consistência. Com base no Teorema 5.3, se os coeficientes C_p, deduzidos em (5.3.13), forem nulos até o coeficiente de ordem p, isto é $C_j = 0$, $j = 0, 1, ..., p$, então o método é de ordem $O(h^p)$ de consistência. Se for zero-estável, então também terá ordem $O(h^p)$ de convergência.

Suponha um método de n passos linear. Temos $2(n+1)$ coeficientes (α_j, β_j) a serem determinados. Como podemos, sem perda de generalidade, multiplicar a equação do método por uma constante sem afetar a solução, temos na prática apenas $2n+1$ coeficientes a serem determinados. Portanto, à princípio, poderíamos tentar buscar métodos de até ordem $p = 2n$.

Isso significa, por exemplo, que poderíamos ter um método de 2-passos com ordem 4. Vimos no exemplo (6.2.31) que isso pode ser perigoso. Neste exemplo apresentamos um método de 2 passos explícito com ordem 3, que foi definido unicamente, ou seja, é o único método de 2 passos e ordem 3 explícito possível, portanto seria um método ótimo. Na prática, verificamos que o método era instável.

As restrições impostas pela zero-estabilidade reduzem as possibilidade de termos métodos de n passos com ordem $2n$, de fato, temos o seguinte importante resultado que estabelece uma barreira para a ordem.

Teorema 6.7 (Barreira de Dahlquist)**.** *Nenhum método de passo múltiplo linear de n passos ($n \geq 2$) zero-estável tem ordem maior que $n+1$ se n for ímpar, ou ordem maior que $n+2$ se n for par. [13, 23]*

Além disso, é possível mostrar que apenas métodos implícitos atingem a ordem máxima definida pela barreira de Dahlquist.

Exemplo 6.5. *Quando $n = 1$, temos o método o método do Trapézio implícito dado por*

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{2}(f_{k+1} + f_k). \tag{6.5.61}$$

Mostre que este método é consistente com qualquer problema de valor inicial bem posto com ordem 2, zero-estável e convergente. Justifique porque o método não pode ter ordem de convergência maior que 2.

Solução:

O método é um método de passo único linear implícito. É simples ver que, para este método temos $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, portanto tem consistência de ordem 2 para qualquer problema de valor inicial bem posto. Como o método é de passo único, pelo Teorema 6.5 ele é zero-estável. Se inicializarmos o método com a condição inicial dado do problema, então a inicialização será consistente. Portanto, pelo teorema da equivalência de Dahlquist, o método é convergente de ordem 2. Concluímos ainda que como $n = 1$ é ímpar, a maior ordem possível de convergência é 2, pelo Teorema da Barreira de Dahlquist.

6.5.1 Exercícios

Exercício 6.5. *Vimos no Teorema 6.5 que todo método de passo único consistente é zero-estável. Por outro lado, vimos no Exercício Resolvido 2.2 que um método de passo único pode ser convergente e ao mesmo tempo inconsistente. Justifique por que não há contradição destas observações com o Teorema de Equivalência de Dahlquist 6.6.*

Exercício 6.6. *Verifique se o método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} - 5y_k = h\left[4f_{k+1} + 2f_k\right]$$

é zero-estável.

Exercício 6.7. *Analise a zero-estabilidade do método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+2} - (1+a)y_{k+1} + ay_k = \frac{h}{2}\left[(3-a)f_{k+1} - (1+a)f_k\right]$$

para

1. $a = 0$;
2. $a = -5$.

Exercício 6.8. *Mostre que o método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+2} + (b-1)y_{k+1} - by_k = \frac{h}{4}\left[(b+3)f_{k+2} + (3b+1)f_k\right]$$

é zero-instável se $b = -1$.

Exercício 6.9. *Empregue o método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+2} + (b-1)y_{k+1} - by_k = \frac{h}{4}\left[(b+3)f_{k+2} + (3b+1)f_k\right],$$

com $b = 0$ e $b = -1$, para solucionar o p.v.i.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = y(t), \quad t \in [0,1] \\ \\ y_0 = y_1 = 0 \end{cases}.$$

Comente os resultados obtidos.

Exercício 6.10. *Considere o seguinte método de 2 passos linear implícito*

$$y_{k+2} - y_k = h\left(\frac{1}{3}f_{k+2} + \frac{4}{3}f_{k+1} + \frac{1}{3}f_k\right).$$

Mostre que o método é zero-estável e tem ordem de consistência 4. Observe que esta é a maior ordem possível para um método de 2 passos.

Exercício 6.11. *Considere o seguinte método de 2 passos linear explícito da forma*

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = h\left(\beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k\right).$$

Mostre que não é possível acharmos coeficientes α_1, α_0, β_1, β_0 tais que o método seja zero-estável e consistente de ordem 4, que é a maior ordem possível para métodos de 2 passos pela Barreira de Dahlquist.

6.6 Erro de discretização global

Para o método de passo múltiplo linear

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_{k+j} = h\sum_{j=0}^{n} \beta_j f_{k+j}, \tag{6.6.62}$$

o erro de discretização local multiplicado pelo passo de integração h e a solução numérica são dados, respectivamente, por

$$h\tau_k = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j y(t_{k+j}) - h\sum_{j=0}^{n} \beta_j f\left(t_{k+j}, y(t_{k+j})\right), \tag{6.6.63}$$

$$R_k = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_{k+j} - h\sum_{j=0}^{n} \beta_j f(t_{k+j}, y_{k+j}). \tag{6.6.64}$$

Observe que aqui estamos supondo que a equação de diferenças numérica não é resolvida exatamente, pois esta pode acumular, por exemplo, erros de arredondamento.

Efetuando-se a subtração (6.6.63) - (6.6.64), tem-se

$$\begin{aligned} h\tau_k - R_k &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(y(t_{k+j}) - y_{k+j}\right) + \\ &- h\sum_{j=0}^{n} \beta_j \left(f\left(t_{k+j}, y(t_{k+j})\right) - f(t_{k+j}, y_{k+j})\right). \end{aligned} \tag{6.6.65}$$

Considerando-se em (6.6.65) $\phi_k = h\tau_k - R_k$ e empregando-se o Teorema do Valor Médio, chega-se a

$$\begin{aligned} \phi_k &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(y(t_{k+j}) - y_{k+j}\right) + \\ &- h\sum_{j=0}^{n} \beta_j \frac{\partial}{\partial y} f\left(t_{k+j}, \xi_{k+j}\right)\left(y(t_{k+j}) - y_{k+j}\right), \end{aligned} \tag{6.6.66}$$

para ξ_{k+j} entre $y(t_{k+j})$ e y_{k+j}.

Lembrando-se que o erro de discretização global, no instante de tempo $t = t_{k+j}$, é definido como sendo

$$e_{k+j} = y(t_{k+j}) - y_{k+j},$$

pode-se reescrever (6.6.66) como

$$\phi_k = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j e_{k+j} - h \sum_{j=0}^{n} \beta_j \frac{\partial}{\partial y} f\left(t_{k+j}, \xi_{k+j}\right) e_{k+j}. \tag{6.6.67}$$

Supondo-se que para todo $k > 0$ se tenha

$$\begin{aligned} \phi_k &\approx \bar{\phi} = \text{constante}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f\left(t_{k+j}, \xi_{k+j}\right) &\approx \lambda = \text{constante}, \end{aligned}$$

de (6.6.67) obtém-se a equação de diferenças linear que descreve aproximadamente a dinâmica do comportamento do erro de discretização global ao longo do tempo,

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\alpha_j - h\lambda\beta_j\right) e_{k+j} = \bar{\phi}. \tag{6.6.68}$$

A solução de (6.6.68) é determinada pelas raízes de seu polinômio característico,

$$\pi(r) = \sum_{j=0}^{n} \left(\alpha_j - h\lambda\beta_j\right) r^j, \tag{6.6.69}$$

e pode ser escrita como,

$$e_k = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j^k + \frac{\bar{\phi}}{\sum\limits_{j=0}^{n} \left(\alpha_j - h\lambda\beta_j\right)}, \tag{6.6.70}$$

onde r_j são as raízes de $\pi(r)$, supostas simples momentaneamente apenas para simplificar a exposição da teoria. Aqui, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j r_j^k$ é a solução geral da equação de diferenças linear homogênea e

$$\frac{\bar{\phi}}{\sum\limits_{j=0}^{n} \left(\alpha_j - h\lambda\beta_j\right)}$$

é uma solução particular de (6.6.68).

Sendo (6.6.62) consistente, tem-se

$$C_0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 0,$$

e denotando-se por $\bar{h} = h\lambda$, (6.6.70) reescreve-se como

$$e_k = \sum_{j=1}^{n} d_j r_j^k + \frac{\bar{\phi}}{-\bar{h} \sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j}, \tag{6.6.71}$$

solução da equação de diferenças linear para o erro global de discretização (6.6.68).

É interessante notar que o polinômio característico da equação de diferenças que descreve aproximadamente a dinâmica do comportamento do erro de discretização global, (6.6.68). Este pode ser reescrito em termos dos polinômios característicos de (6.6.62), sendo

$$\begin{aligned} \pi(r) &= \sum_{j=0}^{n} \left(\alpha_j - \bar{h}\beta_j\right) r^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j r^j - \bar{h} \sum_{j=0}^{n} \beta_j r^j \\ &= \rho(r) - \bar{h}\,\sigma(r). \end{aligned} \tag{6.6.72}$$

De (6.6.72), vê-se que as raízes de $\pi(r)$ tendem às raízes do primeiro polinômio característico de (6.6.62), $\rho(r) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, r^j$, quando o passo de integração h tende a zero. Como consequência, conclui-se que o comportamento do erro de discretização global, no limite para h tendendo a zero, relaciona-se à zero-estabilidade do método considerado.

No que segue, apresenta-se o conceito de *estabilidade absoluta* também conhecida como *estabilidade fraca*. Enquanto que o conceito de zero-estabilidade relaciona-se à convergência do método numérico, o conceito de estabilidade absoluta relaciona-se à escolha de um passo de integração $h > 0$ o qual, na prática, possa ser utilizado na obtenção de uma solução numérica que qualitativamente preserve as características da solução exata do problema, permitindo assim uma análise e interpretação corretas do fenômeno objeto de estudo.

6.7 Estabilidade absoluta

Vamos considerar o problema de valor inicial adotado na parte de estabilidade absoluta dos métodos de passo únicos,

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t > 0, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{6.7.73}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$. Vamos supor que a parte real de λ seja negativa ($\mathrm{Re}(\lambda) < 0$) e que portanto $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Substituindo esse problema na forma usual dos métodos de passo múltiplos temos

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_{k+j} = h \sum_{j=0}^{n} \beta_j \lambda y_{k+j}, \tag{6.7.74}$$

e portanto

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\alpha_j - \lambda h \beta_j\right) y_{k+j} = 0 \tag{6.7.75}$$

que define a equação homogênea associada à equação (6.6.68) no estudo do erro global. Portanto, o λ a ser considerado no problema modelo diz respeito a variação de f com relação a y (relativo a $\frac{\partial f}{\partial y}$), que é uma primeira aproximação (linear) de f. Essa aproximação (linearização) é razoável localmente, e esperamos que um método seja capaz de reproduzir o comportamento de convergência para zero do problema (6.7.73) com $t \to \infty$.

Definição 6.4 (Polinômio de estabilidade absoluta)**.** *Definimos como o polinômio de estabilidade absoluta associado a um problema de n-passos múltiplos linear o polinômio,*

$$\pi(r) = \rho(r) - \bar{h}\,\sigma(r), \tag{6.7.76}$$

onde ρ e σ são respectivamente o primeiro e o segundo polinômios característico do método e $\bar{h} \in \mathbb{C}$.

Definição 6.5 (Estabilidade Absoluta)**.** *Um método de passo múltiplo linear é absolutamente estável se e só se, para $\bar{h} = h\lambda$ dado ($\bar{h}$ fixado), todas as raízes, r_j, do polinômio de estabilidade absoluta satisfizerem*

$$|r_j| < 1, \;\; j = 1, 2, \cdots, n. \tag{6.7.77}$$

A região de estabilidade absoluta é definida pelo conjunto de valores de $\bar{h}$ no plano complexo tal que o método é absolutamente estável.

Definição 6.6 (A-estabilidade)**.** *Dizemos que um método é A-estável se, e somente se, a região de estabilidade absoluta contiver o todos os pontos complexos z tais que $Re(z) < 0$.*

Exemplo 6.6. *Considere o método do Trapézio Implícito,*

$$y_{k+1} - y_k = \frac{h}{2}\left(f_k + f_{k+1}\right). \tag{6.7.78}$$

Sabemos que o método é consistente de segunda ordem, pois $C_0 = C_1 = C_2 = 0$, e que é zero-estável pois é de passo único. O polinômio de estabilidade absoluta para este método é

$$\pi(r) = r - 1 - \frac{\bar{h}}{2}(r+1) = \left(1 - \frac{\bar{h}}{2}\right) r - \left(1 + \frac{\bar{h}}{2}\right), \tag{6.7.79}$$

cujas raiz é

$$r = \frac{1 + \frac{\bar{h}}{2}}{1 - \frac{\bar{h}}{2}}. \tag{6.7.80}$$

Vemos que o método é absolutamente estável para todo $\bar{h} = h\lambda$ tal que $hRe(\lambda) < 0$, ou seja, método sempre respeita o comportamento de convergência a zero do problema modelo (6.7.73)*. Este método é portanto A-estável.*

Na prática, podemos estar interessados apenas em valores reais de λ. Neste caso, o intervalo (a, b) da reta real é denominado *intervalo de estabilidade absoluta* se o método de passo múltiplo linear for absolutamente estável para todo $\bar{h} \in (a, b)$. Pode-se determinar o intervalo de estabilidade absoluta da seguinte forma:

1. Calculam-se as raízes de $\pi(r) = \rho(r) - \bar{h}\,\sigma(r)$, $r_j(\bar{h})$, para um conjunto de valores de $\bar{h}$ numa vizinhança da origem;

2. Representam-se graficamente as funções $\left|r_j(\bar{h})\right|$;
3. Observam-se os intervalos para os quais $\left|r_j(\bar{h})\right| < 1$.

Exemplo 6.7. *Considere o seguinte esquema de 2-passos lineares, conhecido como Leap-Frog,*

$$y_{k+2} - y_k = 2hf_{k+1}. \tag{6.7.81}$$

Este método é consistente com segunda ordem, pois $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ (verifique!). Ele também é zero-estável, pois o seu primeiro polinômio característico tem raízes $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, distintas, simples e com módulos iguais a 1. O seu polinômio de estabilidade absoluta é

$$\pi(r) = r^2 - 1 - \bar{h}2r, \tag{6.7.82}$$

com raízes $r_\pm = \bar{h} \pm \sqrt{\bar{h}^2 + 1}$. Vejamos o caso em que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$. Neste caso, $|r_\pm| = 1$ somente se $\bar{h} = 0$. Para $\bar{h} \neq 0$, conforme podemos ver na Figura 6.7, temos que

$$\begin{aligned} 0 < r_+ < 1 \qquad & \forall \bar{h} < 0 \\ r_- < -1, \qquad & \forall \bar{h} < 0. \end{aligned}$$

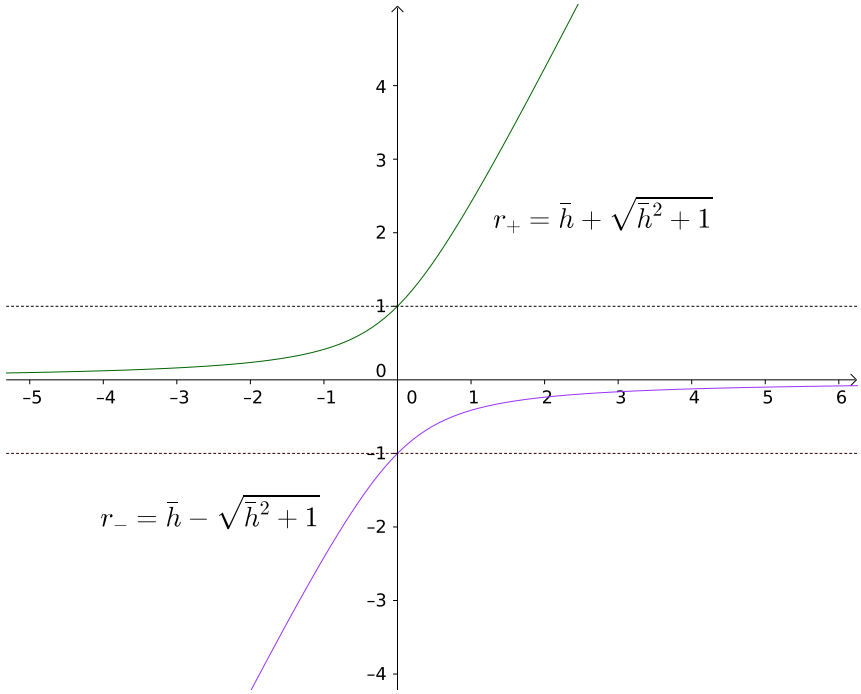


Figura 6.1: Exemplo de construção do intervalo de estabilidade absoluta para o método descrito em (6.7.81)

Então a raiz r_+ não afeta a estabilidade absoluta para $\lambda < 0$. Porém, a raiz r_- nunca terá módulo menor que 1 para $\lambda < 0$. Portanto, o método não é absolutamente estável não importa o quão pequeno for h. Portando, como está, o método não tem utilidade prática. Curiosamente, este método é bastante utilizado na prática, dado seu baixíssimo custo computacional (apenas uma avaliação de f), mas é necessário usar um filtro para obtermos soluções estáveis.

Métodos A-estáveis são na verdade raros. O seguinte resultado mostra o quão difícil pode ser de se obter um método A-estável.

Teorema 6.8 (Segunda Barreira de Dahlquist [7] [9])**.** *Relações entre A-estabilidade e métodos de passos múltiplos lineares:*

(i) Nenhum método linear de passos múltiplos explícito é A-estável.

(ii) Nenhum método A-estável linear de múltiplos passos tem ordem maior que 2.

(iii) O método de segunda ordem A-estável linear de passos múltiplos com menor constante de erro é o método do Trapézio Implícito.

Exemplo 6.8. *Considere o método de 2-passos implícito conhecido como BDF2 (Backwards Differentiation Formulae),*

$$3y_{k+2} - 4y_{k+1} + y_k = 2hf_{k+2}. \tag{6.7.83}$$

Este método é consistente com ordem 2, pois $C_0 = C_1 = C_2 = 0$. *As raízes do primeiro polinômio característico são* 1 *e* $1/3$, *portanto o método é zero-estável. O polinômio de estabilidade absoluta é*

$$\pi(r) = (3 - 2\bar{h})r^2 - 4r + 1,$$

com raízes

$$r_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{1 + 2\bar{h}}}{3 - 2\bar{h}}.$$

Mostramos na Figura 6.8 que a região de estabilidade contempla todo plano complexo negativo (esquerdo), e que portanto o método é A-estável. O método BDF2 só não é estável para alguns valores de λ *positivos com* $\bar{h}$ *próximo de* 2.

6.7.1 Exercícios

Exercício 6.12. *Reveja as noções de estabilidade absoluta e de zero-estabilidade e suas relações com a escolha, na prática, do passo de integração para a análise do problema e com a convergência do método numérico.*

Exercício 6.13. *Considere o método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+2} - (1+a)y_{k+1} + ay_k = \frac{h}{12}\left[(5+a)f_{k+2} + 8(1-a)f_{k+1} - (1+5a)f_k\right], \tag{6.7.84}$$

onde $-1 \leq a < 1$.

1. *Mostre que o intervalo de estabilidade absoluta do método (6.7.84) é*

$$\left(\frac{6(a+1)}{a-1},\ 0\right).$$

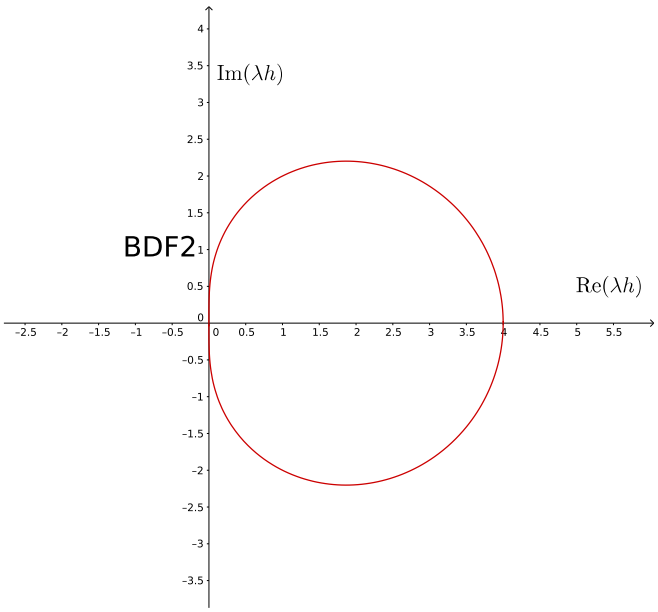


Figura 6.2: Exemplo de região de estabilidade absoluta para o método BDF2 descrito em (6.7.86). O interior da curva indica região com módulo maior que 1, e toda a região exterior à curva define a região onde o método é absolutamente estável.

2. *Para $a = -0,9$, use o método (6.7.84) para solucionar o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = -20y(t), \quad t \in [0,1], \\ \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{6.7.85}$$

utilizando $h = 0,01$, $h = 0,02$ e $h = 0,04$.

Exercício 6.14. *Considere o método de 3-passos implícito conhecido como BDF3 (Backwards Differentiation Formulae),*

$$11y_{k+3} - 18y_{k+2} + 9y_{k+1} - 2y_k = 6hf_{k+3}. \tag{6.7.86}$$

Mostre que o método tem ordem 3 de consistência e que é zero-estável. Construa a região de estabilidade absoluta do método, verificando que ele não é A-estável (por bem pouco!).

6.8 Exercícios resolvidos

Exercício Resolvido 6.1. *Use o método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} + y_k = \frac{h}{2}\left[8f_{k+1} + 4f_k\right] \tag{6.8.87}$$

para calcular a solução numérica do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = 4t\sqrt{y}, \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2, \tag{6.8.88}$$

com $h = 0,1$, $h = 0,05$ e $h = 0,025$. Comente os resultados obtidos.
Solução:

Cálculo da solução exata do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= 4t\sqrt{y} \\
\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dt} &= 4t \\
\int \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dt}dt &= \int 4tdt \\
\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} &= \frac{4t^2}{2} + C \\
y^{\frac{1}{2}} &= t^2 + \frac{C}{2} \\
y &= \left(t^2 + \frac{C}{2}\right)^2 \\
y(0) = 1 &\Rightarrow C = 2 \\
y(t) &= \left(t^2 + 1\right)^2 . \qquad (6.8.89)
\end{aligned}$$

O método (6.8.87) foi implementado utilizando a solução exata (6.8.89) para obter y_1, ou seja,

$$y_1 = y\left(t_0 + h\right) = y(h) = \left(h^2 + 1\right)^2 .$$

Este dado é necessário para iniciar o cálculo das aproximações em um método de dois passos (alternativamente, pode-se empregar um método de passo único para gerar y_1).

O método (6.8.87) não é consistente nem zero-estável (verifique!). Logo, divergente. A redução no passo de integração h aumenta o erro de discretização global. O método (6.8.87) gera aproximações negativas a partir de certos valores de tempo para as quais $f(t, y)$ é um número complexo.

Considerando-se o instante $t = 0.3$, pode-se perceber que a redução do passo de integração h provoca aumento no erro. As tabelas 6.2, 6.3 e 6.4 apresentam os valores gerados até o ponto em que a solução numérica torna-se negativa.

$\mathbf{h = 0,1}$			
t_k	$y(t_k)$	y_k	$\lvert y(t_k) - y_k \rvert$
0,000	1,000000	1,000000	0,000000
0,100	1,020100	1,020100	0,000000
0,200	1,081600	1,081200	0,000400
0,300	**1,188100**	**1,189238**	**0,001138**
0,400	1,345600	1,338866	0,006734
0,500	1,562500	1,592994	0,030494
0,600	1,849600	1,702337	0,147263
0,700	2,220100	2,913023	0,692923
0,800	2,689600	-0,602567	3,292167

Tabela 6.2: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.88), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.87) com $h = 0,1$.

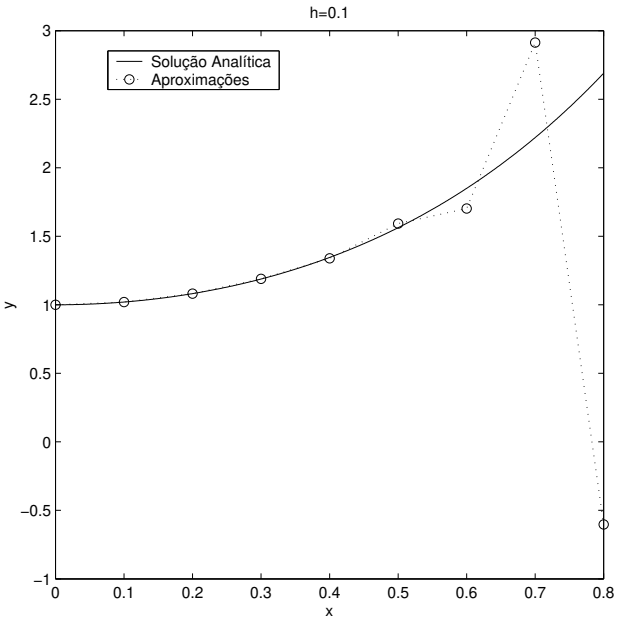


Figura 6.3: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.88), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.87) com $h = 0,1$.

$\mathbf{h = 0,05}$			
t_k	$y(t_k)$	y_k	$\lvert y(t_k) - y_k \rvert$
0,000	1,000000	1,000000	0,000000
0,050	1,005006	1,005006	0,000000
0,100	1,020100	1,020075	0,000025
0,150	1,045506	1,045580	0,000074
0,200	1,081600	1,081158	0,000442
0,250	1,128906	1,130988	0,002082
0,300	**1,188100**	**1,177715**	**0,010385**
0,350	1,260006	1,310883	0,050877
0,400	1,345600	1,095852	0,249748
0,450	1,446006	2,666284	1,220278
0,500	1,562500	-4,430548	5,993048

Tabela 6.3: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.88), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.87) com $h = 0,05$.

Exercício Resolvido 6.2. *Verifique o efeito da falta de estabilidade (instabilidade) do método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+2} - y_{k+1} = \frac{h}{3}\left[3f_{k+1} - 2f_k\right] \tag{6.8.90}$$

empregando-o para solucionar numericamente o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = 4t\sqrt{y}, \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2, \tag{6.8.91}$$

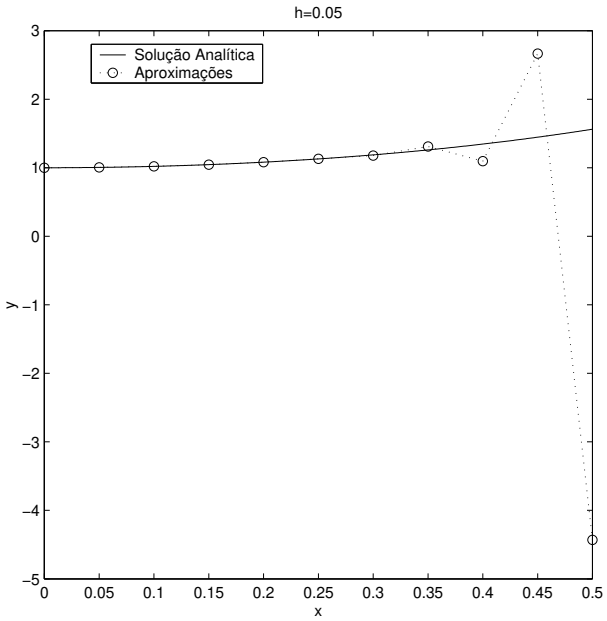


Figura 6.4: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.88), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.87) com $h = 0,05$.

$\mathbf{h = 0,025}$			
t_k	$y(t_k)$	y_k	$\lvert y(t_k) - y_k \rvert$
0,000	1,000000	1,000000	0,000000
0,025	1,001250	1,001250	0,000000
0,050	1,005006	1,005005	0,000002
0,075	1,011282	1,011286	0,000005
0,100	1,020100	1,020072	0,000028
0,125	1,031494	1,031627	0,000133
0,150	1,045506	1,044835	0,000672
0,175	1,062188	1,065521	0,003334
0,200	1,081600	1,065009	0,016591
0,225	1,103813	1,186258	0,082445
0,250	1,128906	0,719318	0,409588
0,275	1,156969	3,187841	2,030872
0,300	**1,188100**	**-8,915969**	**10,104069**

Tabela 6.4: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.88), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.87) com $h = 0,025$.

cuja solução exata é $y(t) = \left(t^2 + 1\right)^2$.

Solução:

O método (6.8.90) é zero-estável porém inconsistente (verifique!). Logo, divergente. As Figuras 6.6 e 6.7a-b foram geradas com passos de integração $h = 0,1$,

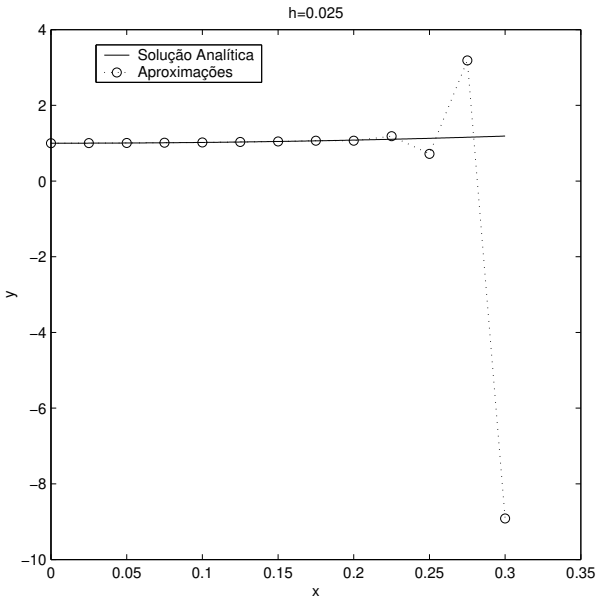


Figura 6.5: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.88), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.87) com $h = 0,025$.

$h = 0,05$ *e* $h = 0,025$. *Note-se que a diferenç entre as aproximações e a solução exata aumenta à medida que o passo de integração é reduzido, fato que caracteriza a divergência do método numérico (6.8.90).*

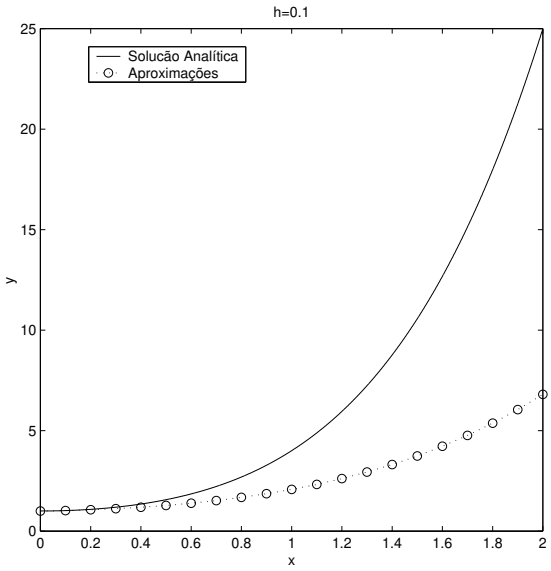
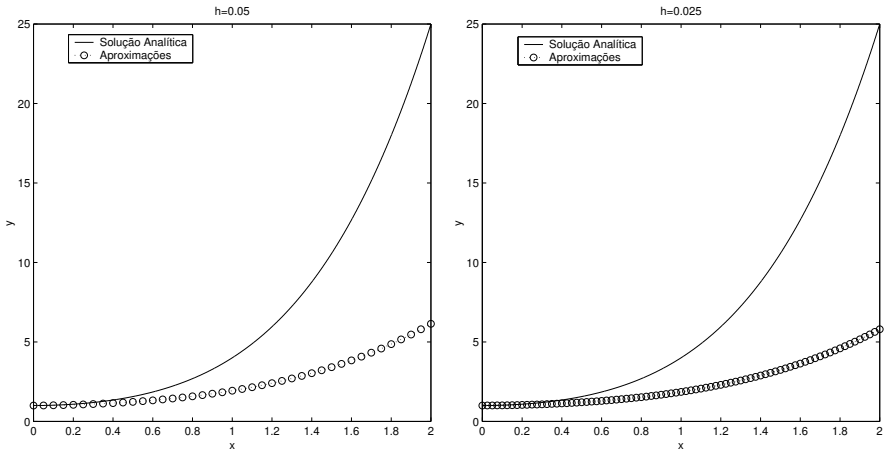


Figura 6.6: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.91), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.90) com $h = 0,1$.



(a) (b)

Figura 6.7: Comparação das soluções exata e numérica do problema de valor inicial (6.8.91), onde a solução numérica foi obtida através do método (6.8.90) com (a) $h = 0,05$ e (b) $h = 0,025$.

Exercício Resolvido 6.3. *Determine a ordem de consistência e o erro de discretização local principal do Método de Quade*

$$y_{k+4} - \frac{8}{19}(y_{k+3} - y_{k+1}) - y_k = \frac{6h}{19}(f_{k+4} + 4f_{k+3} + 4f_{k+1} + f_k). \qquad (6.8.92)$$

Solução:

$$\alpha_4 = 1,\ \alpha_3 = -\frac{8}{19},\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 = \frac{8}{19},\ \alpha_0 = -1$$

$$\beta_4 = \frac{6}{19},\ \beta_3 = \frac{24}{19},\ \beta_2 = 0,\ \beta_1 = \frac{24}{19},\ \beta_0 = \frac{6}{19}$$

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \sum_{j=0}^{4} \alpha_j = -1 + \frac{8}{19} - \frac{8}{19} + 1 = 0 \\
C_1 &= \sum_{j=0}^{4} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{4} \beta_j \\
&= \left(\frac{8}{19} - \frac{24}{19} + 4\right) - \left(\frac{12}{19} + \frac{48}{19}\right) \\
&= \frac{60}{19} - \frac{60}{19} = 0 \\
C_2 &= \sum_{j=0}^{4} \frac{j^2}{2!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{4} j\beta_j \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{19} - \frac{72}{19} + 16\right) - \left(\frac{24}{19} + \frac{72}{19} + \frac{24}{19}\right) \\
&= \frac{120}{19} - \frac{120}{19} = 0 \\
C_3 &= \sum_{j=0}^{4} \frac{j^3}{3!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{4} \frac{j^2}{2!}\beta_j \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{8}{19} - \frac{216}{19} + 64\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{24}{19} + \frac{216}{19} + \frac{96}{19}\right) \\
&= \frac{168}{19} - \frac{168}{19} = 0 \\
C_4 &= \sum_{j=0}^{4} \frac{j^4}{4!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{4} \frac{j^3}{3!}\beta_j \\
&= \frac{1}{24}\left(\frac{8}{19} - \frac{648}{19} + 256\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{24}{19} + \frac{648}{19} + \frac{384}{19}\right) \\
&= \frac{176}{19} - \frac{176}{19} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_5 &= \sum_{j=0}^{4} \frac{j^5}{5!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{4} \frac{j^4}{4!}\beta_j = \\
&= \frac{1}{120}\left(\frac{8}{19} - \frac{1944}{19} + 1024\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{24}{19} + \frac{1944}{19} + \frac{1536}{19}\right) \\
&= \frac{146}{19} - \frac{146}{19} = 0 \\
C_6 &= \sum_{j=0}^{4} \frac{j^6}{6!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{4} \frac{j^5}{5!}\beta_j = \\
&= \frac{1}{720}\left(\frac{8}{19} - \frac{5832}{19} + 4096\right) - \frac{1}{120}\left(\frac{24}{19} + \frac{5832}{19} + \frac{6144}{19}\right) \\
&= \frac{100}{19} - \frac{100}{19} = 0 \\
C_7 &= \sum_{j=0}^{4} \frac{j^7}{7!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{4} \frac{j^6}{6!}\beta_j = \\
&= \frac{1}{5040}\left(\frac{8}{19} - \frac{17496}{19} + 16384\right) + \\
&- \frac{1}{720}\left(\frac{24}{19} + \frac{17496}{19} + \frac{24576}{19}\right) \\
&= \frac{6121}{1995} - \frac{877}{285} = -\frac{6}{665}
\end{aligned}
$$

O Método de Quade (6.8.92) é consistente ($C_0 = C_1 = 0$) *de ordem* 6. *O erro de discretização local principal do método é*

$$\alpha = C_7 h^6 y^{(7)}(\xi)$$

com constante $C_7 = -\dfrac{6}{665}$.

Exercício Resolvido 6.4. *Verifique que (6.8.92) é convergente.*

Solução:

Primeiro polinômio característico:

$$
\begin{aligned}
r^4 - \frac{8}{19}r^3 + \frac{8}{19}r - 1 &= r^4 - 1 - \frac{8}{19}r\left(r^2 - 1\right) \\
&= \left(r^2 - 1\right)\left(r^2 + 1\right) - \frac{8}{19}r\left(r^2 - 1\right) \\
&= \left(r^2 - 1\right)\left(r^2 - \frac{8}{19}r + 1\right) \\
&= (r+1)(r-1)\left(r^2 - \frac{8}{19}r + 1\right).
\end{aligned}
$$

Raízes do polinômio (6.8.93):

$$
\begin{aligned}
r + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad r_1 = -1; \\
r - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad r_2 = 1; \\
r^2 - \frac{8}{19}r + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad r_3 = \frac{4}{19} + \frac{i}{19}\sqrt{345}; \\
& \quad r_4 = \frac{4}{19} - \frac{i}{19}\sqrt{345}.
\end{aligned}
$$

Módulo das raízes r_3 e r_4:

$$|r_3| = |r_4| = \left[\left(\frac{4}{19}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{345}}{19}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{361} + \frac{345}{361}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Como as quatro raízes do polinômio (6.8.93) são distintas e têm módulo 1, o método é zero-estável.

O Método de Quade (6.8.92) é convergente uma vez que é consistente e zero-estável.

Exercício Resolvido 6.5. *Considere o método de passo múltiplo linear*

$$y_{k+3} + \alpha\left(y_{k+2} - y_{k+1}\right) - y_k = \frac{h}{2}\left(3+\alpha\right)\left(f_{k+2} + f_{k+1}\right). \tag{6.8.93}$$

1. *Determine para quais valores de α o método (6.8.93) é zero-estável.*

   Solução:

$$\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = \alpha,\ \alpha_1 = -\alpha,\ \alpha_0 = -1$$

Primeiro polinômio característico:

$$\begin{aligned} r^3 + \alpha r^2 - \alpha r - 1 &= \left(r^3 - 1\right) + \alpha\left(r^2 - r\right) \\ &= (r-1)\left(r^2 + r + 1\right) + \alpha r\,(r-1) \\ &= (r-1)\left[r^2 + (1+\alpha)\,r + 1\right]. \end{aligned} \tag{6.8.94}$$

Uma das raízes do polinômio (6.8.94) é $r_1 = 1$. As outras duas raízes são dadas por

$$r_{2,3} = \frac{-(1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2}. \tag{6.8.95}$$

(a) *Considerando $\alpha = 1$ ou $\alpha = -3$ em (6.8.95):*

$$\begin{aligned} \alpha = 1 \quad &\Rightarrow \quad (1+\alpha)^2 - 4 = 0 \Rightarrow r_2 = r_3 = -1; \\ \alpha = -3 \quad &\Rightarrow \quad (1+\alpha)^2 - 4 = 0 \Rightarrow r_2 = r_3 = 1. \end{aligned}$$

Como em ambos os casos o polinômio tem raiz de multiplicidade 2 e módulo 1, o método não é zero-estável.

(b) *Considerando $\alpha > 1$ ou $\alpha < -3$ em (6.8.95):*

$$\begin{aligned} \alpha > 1 \quad &\Rightarrow \quad 1 + \alpha > 2 \Rightarrow -(1+\alpha) < -2 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1+\alpha}{2} < -1 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1+\alpha}{2} - \frac{\sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2} < -1 \\ &\Rightarrow \quad r_3 \text{ é menor que } -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha < -3 \quad &\Rightarrow \quad 1+\alpha < -2 \Rightarrow -(1+\alpha) > 2 \\
&\Rightarrow \quad -\frac{1+\alpha}{2} > 1 \\
&\Rightarrow \quad -\frac{1+\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2} > 1 \\
&\Rightarrow \quad r_2 \text{ é maior que } 1.
\end{aligned}$$

Como em ambos os casos o polinômio tem raiz de módulo maior que 1, *o método não é zero-estável.*

(c) *Considerando* $-3 < \alpha < 1$ *em (6.8.95):*

$$\begin{aligned}
-3 < \alpha < 1 \quad &\Rightarrow \quad -2 < 1+\alpha < 2 \Rightarrow (1+\alpha)^2 < 4 \\
&\Rightarrow \quad r_{2,3} = -\frac{1+\alpha}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4-(1+\alpha)^2}; \\
|r_2| = |r_3| \quad &= \quad \left[\frac{(1+\alpha)^2}{4} + \frac{4-(1+\alpha)^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Para $\alpha \in (-3, 1)$ *o método (6.8.93) é zero-estável, uma vez que as três raízes do primeiro polinômio característico (6.8.94) são distintas de módulo* 1.

2. *Mostre que existe um valor de* α *para o qual o método (6.8.93) tem ordem* 4, *mas para que ele seja zero-estável sua ordem não pode exceder* 2.

   Solução:

$$\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = \alpha,\ \alpha_1 = -\alpha,\ \alpha_0 = -1$$

$$\beta_3 = 0,\ \beta_2 = \frac{3+\alpha}{2},\ \beta_1 = \frac{3+\alpha}{2},\ \beta_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= \sum_{j=0}^{3} \alpha_j = -1 - \alpha + \alpha + 1 = 0 \\
C_1 &= \sum_{j=0}^{3} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{3} \beta_j \\
&= -\alpha + 2\alpha + 3 - \left(\frac{3+\alpha}{2} + \frac{3+\alpha}{2}\right) \\
&= \alpha + 3 - 3 - \alpha = 0 \\
C_2 &= \sum_{j=0}^{3} \frac{j^2}{2!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{3} j\beta_j \\
&= \frac{1}{2}(-\alpha + 4\alpha + 9) - \left(\frac{3+\alpha}{2} + 3 + \alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}(9+3\alpha) - \frac{1}{2}(9+3\alpha) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_3 &= \sum_{j=0}^{3} \frac{j^3}{3!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{3} \frac{j^2}{2!}\beta_j \\
&= \frac{1}{6}\left(-\alpha + 8\alpha + 27\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3+\alpha}{2} + 4\frac{3+\alpha}{2}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(27 + 7\alpha\right) - \frac{1}{4}\left(15 + 5\alpha\right) \\
&= \frac{18 - 2\alpha}{24} = \frac{9-\alpha}{12}
\end{aligned}
$$

$$C_3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq 9$$

Para que o método (6.8.93) seja zero-estável é necessário que a ordem do mesmo seja 2*, uma vez que* $\alpha = 9 \notin (-3, 1)$.

$$
\begin{aligned}
C_4 &= \sum_{j=0}^{3} \frac{j^4}{4!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{3} \frac{j^3}{3!}\beta_j \\
&= \frac{1}{24}\left(-\alpha + 16\alpha + 81\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{3+\alpha}{2} + 8\frac{3+\alpha}{2}\right) \\
&= \frac{1}{24}\left(81 + 15\alpha\right) - \frac{1}{12}\left(27 + 9\alpha\right) \\
&= \frac{27 - 3\alpha}{24} = \frac{9-\alpha}{8}
\end{aligned}
$$

$$\alpha = 9 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

$$
\begin{aligned}
C_5 &= \sum_{j=0}^{3} \frac{j^5}{5!}\alpha_j - \sum_{j=0}^{3} \frac{j^4}{4!}\beta_j \\
&= \frac{1}{120}\left(-\alpha + 32\alpha + 243\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{3+\alpha}{2} + 16\frac{3+\alpha}{2}\right) \\
&= \frac{1}{120}\left(243 + 31\alpha\right) - \frac{1}{48}\left(51 + 17\alpha\right) \\
&= \frac{231 - 23\alpha}{240}
\end{aligned}
$$

$$\alpha = 9 \quad \Rightarrow \quad C_5 = \frac{1}{10}$$

Para $\alpha = 9$*, o método (6.8.93) tem ordem* 4*, porém não é zero-estável.*