

**Métodos para a solução numérica de equações
diferenciais ordinárias a valores iniciais**
Notas de aula em construção

Texto original de 2014

Alexandre Megiorin Roma
roma@ime.usp.br

Joyce da Silva Bevilacqua
joyce@ime.usp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br

Departamento Acadêmico de Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Edição de 2019

Pedro da Silva Peixoto
pedrosp@ime.usp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Capítulo 4

Estabilidade absoluta dos métodos de passo único

Considere o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) &= -10y(t), \quad t \in [2, 6], \\ y(2) &= 1000, \end{cases} \quad (4.0.1)$$

cuja solução exata é $y(t) = 1000e^{-10t+20}$ (verifique!). A obtenção de uma solução numérica para (4.0.1) demanda, na prática, a escolha de um passo de integração $h > 0$ além, é claro, de um método numérico. Por exemplo, considere as aproximações obtidas com o Método de Euler (1.4.23),

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) = \\ &= y_k + h(-10y_k) = \\ &= (1 - 10h)y_k, \end{aligned}$$

com passos de integração $h = 0,125$ e $h = 0,5$. A Tabela 4.1 mostra o erro de discretização global para cada um destes passos de integração.

		$h=0,125$		$h=0,5$
k	t_k	$y(t_k)$	$ y(t_k) - y_k $	$ y(t_k) - y_k $
0	2,0	1,000E+03	0,000E+00	0,000E+00
1	2,5	6,738E+00	2,832E+00	4,007E+03
2	3,0	4,540E-02	3,014E-02	1,600E+04
3	3,5	3,059E-04	2,463E-04	6,400E+04
4	4,0	2,061E-06	1,828E-06	2,600E+05
5	4,5	1,389E-08	1,298E-08	1,024E+06
6	5,0	9,358E-11	9,003E-11	4,096E+06
7	5,5	6,305E-13	6,166E-13	1,638E+07
8	6,0	4,248E-15	4,194E-15	6,554E+07

Tabela 4.1: Erros de discretização global produzidos pelo Método de Euler na solução numérica de (4.0.1) para dois tamanhos de passos de integração.

Da análise da Tabela 4.1, constata-se que o Método de Euler produz um erro de discretização global aceitável para $h = 0,125$, porém inadmissível para $h = 0,5$.

Qual é então o motivo para o comportamento da solução numérica em ambos os casos? Como escolher, na prática, um passo de integração que permita uma análise confiável dos resultados obtidos? A escolha apropriada do passo de integração $h > 0$ está associada ao conceito de *estabilidade absoluta* ($h > 0$, fixado).

4.1 Estabilidade absoluta

Para compreender a origem dos problemas de estabilidade que se pode ter na escolha de um passo de integração $h > 0$ para um determinado método numérico, considere o Método de Euler

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0), \\ y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \end{cases}$$

aplicado ao Problema de Cauchy modelo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) &= \lambda y, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

cujas solução exata é dada por $y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$ (verifique!). Assim, tem-se

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) = \\ &= y_k + \lambda h y_k = \\ &= (1 + \lambda h) y_k. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Estabelecendo em (4.1.2) uma dependência da condição inicial y_0 , chega-se a

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 + \lambda h) y_0, \\ y_2 &= (1 + \lambda h)^2 y_0, \\ y_3 &= (1 + \lambda h)^3 y_0, \\ &\vdots \\ y_k &= (1 + \lambda h)^k y_0, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

onde o parâmetro λ pode ser real ou complexo. O fator $(1 + \lambda h)$ é denominado *fator de amplificação*.

Há duas situações possíveis para $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Se $\lambda < 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{\lambda(t-t_0)} = 0$.

A solução numérica y_k terá esse comportamento se, e só se,

$$|1 + \lambda h| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + \lambda h < 1 \Rightarrow -2 < \lambda h < 0.$$

Assim, a solução numérica tem o mesmo comportamento da solução exata se, e só se, $\lambda h \in (-2, 0)$.

2. Se $\lambda \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{\lambda(t-t_0)} = \begin{cases} y_0, & \text{se } \lambda = 0, \\ +\infty, & \text{se } \lambda > 0, \quad y_0 > 0, \\ -\infty, & \text{se } \lambda > 0, \quad y_0 < 0. \end{cases}$$

Neste caso, o *valor absoluto* da solução numérica

$$y_k = (1 + \lambda h)^k y_0$$

apresenta sempre o mesmo comportamento da solução exata: tende ao infinito.

Diz-se que o Método de Euler é um método *condicionalmente estável* cujo intervalo de estabilidade absoluta é dado por $\lambda h \in (-2, 0)$, $\lambda < 0$.

É interessante observar que para $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se $\lambda h = z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, e que, portanto,

$$\begin{aligned} z &= \lambda h = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ |1 + \lambda h| < 1 &\Rightarrow |z + 1| < 1 \\ &\Leftrightarrow |a + bi + 1| < 1 \\ &\Leftrightarrow |(a + 1) + bi| < 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(a + 1)^2 + b^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow (a + 1)^2 + b^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow [a - (-1)]^2 + b^2 < 1. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Em (4.1.4), tem-se o conjunto dos pontos interiores a um disco centrado no ponto $(-1, 0)$ e de raio 1. O intervalo de estabilidade é definido por $Re(\lambda h) \in (-2, 0)$. A parte imaginária, $Im(\lambda h)$, é responsável pelo comportamento oscilatório da solução. Representamos a região de estabilidade (no plano complexo) na Figura 4.1.

Definição 4.1 (Estabilidade absoluta). *Seja um método de passo único que, aplicado ao Problema de Cauchy modelo*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = \lambda y(t), & \lambda \in \mathbb{C}, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

conduz a

$$y_{k+1} = \psi(\lambda h) y_k.$$

O conjunto

$$\Omega = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\psi(\mu)| < 1\}$$

é denominado *região de estabilidade absoluta* ($h > 0$, fixado) e $\psi(\lambda h)$ é o fator de amplificação. A intersecção da região Ω com a reta real determina o intervalo de estabilidade absoluta do método de passo único.

No intervalo de estabilidade absoluta, solução exata e numérica apresentam qualitativamente (em algum sentido) o mesmo comportamento. A Tabela 4.2 apresenta os intervalos de estabilidade absoluta para alguns métodos de Runge-Kutta. É possível mostrar que, todos os métodos com R estágios e ordem $p = R$ têm o mesmo intervalo de estabilidade absoluta [16]. Por exemplo, o método do ponto médio explícito e o método do trapézio explícito, ambos métodos de Runge-Kutta de 2 estágios e ordem 2, possuem o mesmo intervalo de estabilidade absoluta, descrito na Tabela 4.2. Verifique na Figura 4.1 as regiões de estabilidade absoluta para métodos de Runge-Kutta de R estágios e ordem R .

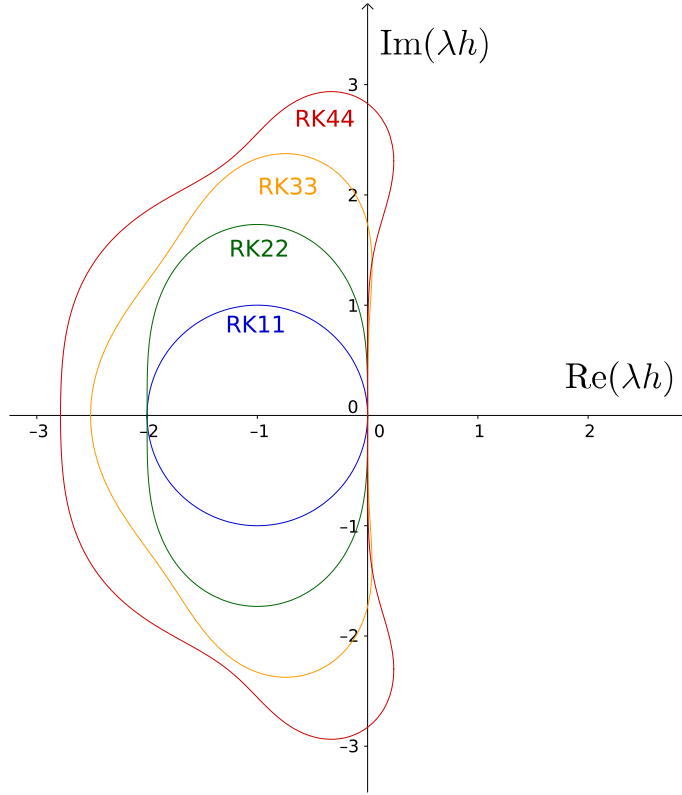


Figura 4.1: Região de estabilidade para métodos de Runge-Kutta. O interior das curvas fechadas indicam λh tais que $|\psi(\lambda h)| < 1$.

Exemplo 4.1 (Euler Implícito). Considere o método de Euler implícito, para o qual temos iterações da forma

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Substituindo no problema modelo $y' = \lambda y$, temos

$$y_{k+1} = y_k + \lambda h y_{k+1}.$$

Re-organizando os termos e isolando y_{k+1} notamos que

$$\psi(\lambda h) = \frac{1}{1 - \lambda h}.$$

Para $\lambda < 0$ e $h > 0$, $|\psi(\lambda h)| < 1$, portanto o método é incondicionalmente absolutamente estável. No plano complexo, a sua região de estabilidade é o complementar do círculo centrado em $(1, 0)$ com raio 1, ilustrado na Figura 4.1.

4.1.1 Exercícios

Exercício 4.1. Explique o comportamento observado para o Método de Euler aplicado à solução do p.v.i. (4.0.1) com passos de integração $h = 0,5$ e $h = 0,125$.

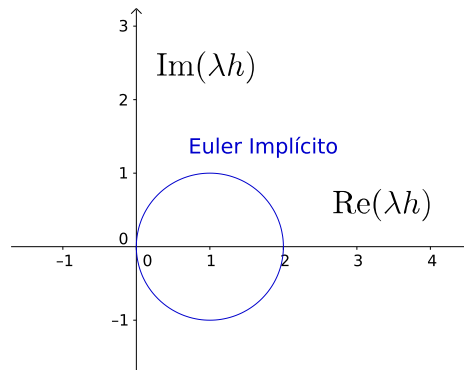


Figura 4.2: Região de estabilidade para o método de Euler Implícito. O interior do círculo indica λh tais que $|\psi(\lambda h)| > 1$, portanto a região que garante estabilidade absoluta é tudo que está fora do círculo.

Exercício 4.2. A Tabela 4.2 traz o fator de amplificação e o intervalo de estabilidade absoluta para os Métodos de Runge-Kutta de ordem R com R estágios [16]. Verifique que, de fato, os fatores de amplificação estão corretos. Além disso, verifi-

R	Fator de amplificação	Intervalo Ω
1	$1 + \lambda h$	$(-2, 0)$
2	$1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}$	$(-2, 0)$
3	$1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6}$	$(-2,51, 0)$
4	$1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}$	$(-2,78, 0)$

Tabela 4.2: Intervalos de estabilidade absoluta para Métodos de Runge-Kutta de ordem R com R estágios [16].

que que o método do trapézio explícito (Euler Aprimorado) (1.4.25) e o método do ponto médio explícito (Euler Modificado) (3.2.11) possuem o mesmo intervalo de estabilidade absoluta.

Exercício 4.3. Comprove o efeito da estabilidade (ou instabilidade) usando o Método de Runge-Kutta de quarta ordem com quatro estágios (3.2.24) para calcular a solução numérica do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = -5ty^2(t) + \frac{5}{t} - \frac{1}{t^2}, & 1 \leq t \leq 4, \\ y(1) = 1, \end{cases} \quad (4.1.5)$$

com $h = 0,2$ e $h = 0,4$. *Sugestão:* Mostre que a solução exata do problema de valor inicial (4.1.5) é $y(t) = \frac{1}{t}$. Com a solução exata e a solução numérica, calcule o erro global de discretização.

4.2 Suplemento teórico

4.2.1 Instabilidade inerente

Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = y(t) - t, & t \in [0, 5] \\ y(0) = 1 \end{cases}. \quad (4.2.6)$$

Em (4.2.6), tem-se uma equação diferencial ordinária linear, de primeira ordem, não homogênea. A solução exata de (4.2.6) é dada por

$$y(t) = t + 1, \quad (4.2.7)$$

que se obtém usando o fator integrante e^{-t} .

Perturbando a condição inicial em (4.2.6) em 1%, isto é, $y(0) = 1 \pm 0,01$, tem-se os problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = y(t) - t, & t \in [0, 5], \\ y(0) = 0,99, \end{cases} \quad (4.2.8)$$

e

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = y(t) - t, & t \in [0, 5], \\ y(0) = 1,01. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

As soluções exatas de (4.2.8) e (4.2.9) são dadas, respectivamente, por

$$y(t) = -0,01e^t + t + 1 \quad \text{e} \quad (4.2.10)$$

$$y(t) = 0,01e^t + t + 1. \quad (4.2.11)$$

As soluções (4.2.7), (4.2.10) e (4.2.11) em $t = 5$ valem, respectivamente,

$$y(5) = 5 + 1 = 6$$

$$y(5) = -0,01e^5 + 5 + 1 \approx 4,5$$

$$y(5) = 0,01e^5 + 5 + 1 \approx 7,5.$$

Como pode ser visto, perturbando-se a condição inicial em (4.2.6) em 1%, a solução varia cerca de 25%. No exemplo dado, nenhum método numérico será capaz de produzir um erro inferior a 25% se a condição inicial for perturbada em 1%. Este é um problema de estabilidade intrínseco ao problema de valor inicial e, por este motivo, denominado de *instabilidade inerente*.

4.3 Exercícios resolvidos

Exercício Resolvido 4.1. *Determine a região de estabilidade absoluta para o Método do Trapézio (Implícito).*

Solução:

Tome o problema-modelo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) &= \lambda y, & \lambda < 0, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

cujas solução exata é

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Aplicando-se o Método do Trapézio, obtém-se

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) \\ y_{k+1} &= y_k + h \frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})}{2} \\ y_{k+1} &= y_k + h \frac{\lambda y_k + \lambda y_{k+1}}{2} \\ \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y_{k+1} &= \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y_k \\ y_{k+1} &= \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) y_k. \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Estabelecendo-se em (4.3.12) uma dependência da condição inicial y_0 ,

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) y_0, \\ y_2 &= \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) y_1 = \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) y_0 = \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right)^2 y_0, \\ y_3 &= \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) y_2 = \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right)^2 y_0 = \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right)^3 y_0, \\ y_4 &= \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) y_3 = \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right) \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right)^3 y_0 = \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right)^4 y_0, \\ &\vdots \\ y_k &= \left(\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right)^k y_0. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

O fator de amplificação é $\psi(\lambda h) = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}$.

Para estabelecer o intervalo de estabilidade absoluta do método é preciso analisar as condições para que $|\psi(\lambda h)| < 1$, isto é,

$$\left|\frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} < 1 \Rightarrow \lambda h < 0 \Rightarrow \lambda h \in (-\infty, 0).$$

O Método do Trapézio é **incondicionalmente estável**, ou seja, não restrição na escolha do passo de integração.

Observação:

Quando $\lambda \in \mathbb{C}$, se $z = \lambda h = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} \right| < 1 &\Rightarrow \left| \frac{2 + z}{2 - z} \right| < 1 \\
 &\Rightarrow \left| \frac{2 + a + bi}{2 - a - bi} \right| < 1 \\
 &\Rightarrow \left| \frac{(a + 2) + bi}{(-a + 2) - bi} \right| < 1 \\
 &\Rightarrow \frac{|(a + 2) + bi|}{|(-a + 2) - bi|} < 1 \\
 &\Rightarrow \frac{\sqrt{(a + 2)^2 + b^2}}{\sqrt{(-a + 2)^2 + (-b)^2}} < 1 \\
 &\Rightarrow \sqrt{(a + 2)^2 + b^2} < \sqrt{(-a + 2)^2 + b^2} \\
 &\Rightarrow a^2 + 4a + 4 + b^2 < a^2 - 4a + 4 + b^2 \\
 &\Rightarrow 8a < 0 \\
 &\Rightarrow a < 0 \\
 &\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda h) < 0.
 \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Em (4.3.14), tem-se o conjunto dos pontos do semiplano à esquerda da origem. O intervalo de estabilidade é definido por $\operatorname{Re}(\lambda h) \in (-\infty, 0)$, enquanto que $\operatorname{Im}(\lambda h)$ é responsável apenas por um comportamento oscilatório da solução (veja Schwarz [21]).

Exercício Resolvido 4.2. Considere o Método de Runge-Kutta de dois estágios

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0), \\ y_{k+1} &= y_k + h(c_1 \kappa_1 + c_2 \kappa_2), \end{cases} \tag{4.3.15}$$

com

$$\begin{cases} \kappa_1 &= f(t, y), \\ \kappa_2 &= f(t + ah, y + hb\kappa_1), \end{cases}$$

onde a, b, c_1 , e c_2 são constantes, aplicado ao problema-modelo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) &= \lambda y, \quad \lambda < 0, \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \tag{4.3.16}$$

Calcule o fator de amplificação e o intervalo de estabilidade absoluta do método (4.3.15) supondo $a = b$ e $c_1 + c_2 = 1$.

Solução:

Na aproximação obtida no ponto t_{k+1} , tem-se

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= y_k + hc_1 \kappa_1 + hc_2 \kappa_2 \\
 &= y_k + hc_1 f(t_k, y_k) + hc_2 f(t_k + ah, y_k + hb f(t_k, y_k)) \\
 &= y_k + hc_1 \lambda y_k + hc_2 \lambda (y_k + hb \lambda y_k) \\
 &= y_k + hc_1 \lambda y_k + hc_2 \lambda y_k + c_2 b (\lambda h)^2 y_k \\
 &= \left(1 + (c_1 + c_2) \lambda h + c_2 b (\lambda h)^2\right) y_k \\
 &= \left(1 + \lambda h + c_2 b (\lambda h)^2\right) y_k.
 \end{aligned}$$

Assim, recursivamente, obtém-se

$$y_{k+1} = \left(1 + \lambda h + c_2 b (\lambda h)^2\right)^k y_0.$$

Denotando-se $\alpha = c_2 b$ e $\lambda h = x$, o fator de amplificação é dado por

$$\psi(x) = 1 + x + \alpha x^2. \quad (4.3.17)$$

Para determinar o intervalo de estabilidade absoluta do método (4.3.15) é necessário analisar as condições para que $|\psi(x)| < 1$, isto é,

$$-1 < \psi(x) < 1 \Rightarrow -1 < \alpha x^2 + x + 1 < 1 \Rightarrow -2 < \alpha x^2 + x < 0.$$

Para:

1. $\alpha x^2 + x > -2 \Rightarrow \alpha x^2 + x + 2 > 0$, há três casos possíveis:

(a) Se $\alpha < 0$ então

$$\begin{cases} \Delta &= 1 - 8\alpha > 0 \\ x_1 &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 8\alpha}}{2\alpha} \\ x_2 &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\alpha}}{2\alpha} \end{cases}$$

e o intervalo é dado por (x_1, x_2) ;

(b) Se $0 < \alpha \leq \frac{1}{8}$ então

$$\begin{cases} \Delta &= 1 - 8\alpha \geq 0 \\ x_1 &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 8\alpha}}{2\alpha} \\ x_2 &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\alpha}}{2\alpha} \end{cases}$$

e o intervalo é dado por $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$;

(c) Se $\alpha > \frac{1}{8}$ então $\alpha x^2 + x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $\alpha x^2 + x < 0$, há dois casos possíveis:

(a) Se $\alpha > 0$ então

$$\alpha x^2 + x < 0 \Rightarrow x(\alpha x + 1) < 0$$

e o intervalo é dado por $\left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$;

(b) Se $\alpha < 0$ então

$$\alpha x^2 + x < 0 \Rightarrow x(\alpha x + 1) < 0$$

e o intervalo é dado por $(-\infty, 0) \cup \left(-\frac{1}{\alpha}, \infty\right)$.

Sendo $\alpha = c_2 b$, na análise do problema modelo (4.3.16) tem-se os seguintes intervalos de estabilidade:

- $\alpha < 0$: $\left\{(-\infty, 0) \cup \left(-\frac{1}{\alpha}, \infty\right)\right\} \cap (x_1, x_2)$;
- $0 < \alpha \leq \frac{1}{8}$: $\left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right) \cap \{(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)\}$;
- $\alpha > \frac{1}{8}$: $\left(-\frac{1}{\alpha}, 0\right)$.

Exemplos

1. Método de Euler Modificado (Método do Ponto Médio)

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y)\right)$$

$$a = b = \frac{1}{2}, c_1 = 0, c_2 = 1 \Rightarrow \alpha = c_2b = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \lambda h \in (-2, 0)$$

2. Método de Euler Aprimorado

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y))]$$

$$a = b = 1, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = c_2b = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \lambda h \in (-2, 0)$$

3. Método de Ralston

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4} \left[f(t, y) + 3f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}hf(t, y)\right) \right]$$

$$a = b = \frac{2}{3}, c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = c_2b = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \lambda h \in (-2, 0)$$