

Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais

Notas de aula em construção

Texto original de 2014

Alexandre Megiorin Roma
roma@ime.usp.br
Joyce da Silva Bevilacqua
joyce@ime.usp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br

Departamento Acadêmico de Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Edição de 2019

Pedro da Silva Peixoto
pedrosp@ime.usp.br
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Capítulo 2

Métodos de passo único

Para (1.1.5), um Problema de Cauchy bem posto com solução exata $y(t)$, um método de passo único (ou método de um passo) assume a seguinte forma.

Definição 2.1 (Método de Passo Único).

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h \Phi(t_k, t_{k+1}, y_k, y_{k+1}, h) \end{cases} \quad (2.0.1)$$

com $t_{k+1} = t_k + h$, $0 \leq k \leq n - 1$ e $h = \frac{b-a}{n}$.

Se em (2.0.1) a função Φ não depende de nenhuma informação no instante t_{k+1} então (2.0.1) é um método de passo único explícito. Caso contrário, o método de passo único (2.0.1) é implícito. Dentre os métodos de passo único apresentados até o momento, os Métodos de Euler (1.4.23) e de Euler Aprimorado (1.4.25) são explícitos, enquanto que os Métodos de Euler Implícito (1.4.24) e do Trapézio (1.4.26) são implícitos.

Embora as definições e resultados teóricos a serem apresentados a seguir também sejam válidos para métodos implícitos, por simplicidade, eles serão colocados apenas no contexto de métodos explícitos. Será conveniente também que um método de passo único explícito seja reescrito como

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \Phi(t_k, y_k, h) = 0 \end{cases} . \quad (2.0.2)$$

2.1 Erro de discretização local

Definição 2.2 (Erro local). *Dado um método numérico de passo único explícito, associado a um problema de valor inicial com solução única $y(t)$, o erro de discretização local, associado ao instante $t = t_k$, é definido por*

$$\alpha_k \doteq \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k), h). \quad (2.1.3)$$

É importante destacar que na definição do erro de discretização local (2.1.3) usa-se $y(t)$, a solução exata do Problema de Cauchy, e não uma sua aproximação como é feito em (2.0.2). Além disso, dado um instante de tempo t , fixo, assumimos $t = t_k = kh + t_0$. Portanto, α_k depende implicitamente de t , t_0 e h . Omitimos essa dependência apenas para simplificar a notação.

Multiplicando-se (2.1.3) pelo passo de integração h chega-se a

$$h \alpha_k \doteq d_k \doteq y(t_{k+1}) - [y(t_k) + h \Phi(t_k, y(t_k), h)] \doteq y(t_{k+1}) - y_{k+1}. \quad (2.1.4)$$

Em (2.1.4), a diferença $y(t_{k+1}) - y_{k+1}$, a diferença entre a solução exata e a solução aproximada, pode ser interpretada como sendo *o erro produzido em uma única aplicação do método numérico partindo-se de valores exatos no instante de tempo anterior*. Isto confere a (2.1.4) seu *caráter local* pois parte-se da solução exata no instante anterior e, por isso mesmo, nenhum erro é cometido anteriormente (note em (2.1.4), entre os colchetes, a aplicação do método considerado). Na Figura (2.1), pode-se visualizar a interpretação geométrica do erro de discretização local $d_k = h\alpha_k = y(t_{k+1}) - y_{k+1}$ quando a solução numérica é calculada pelo Método de Euler.

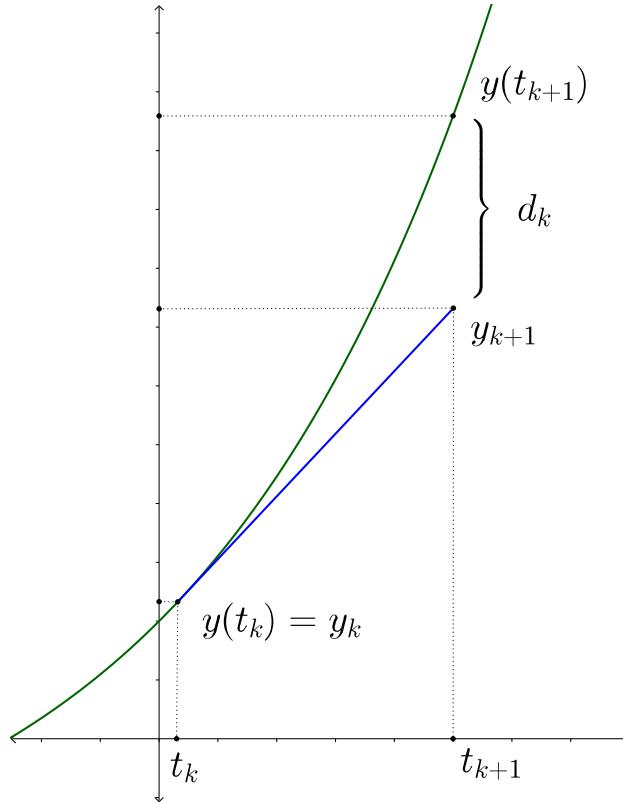


Figura 2.1: Interpretação geométrica do erro de discretização local do Método de Euler: solução exata (curva em verde) e solução aproximada (reta em azul).

2.2 Consistência

Supondo que a função de discretização Φ seja contínua como função do passo de integração h e lembrando que $y(t)$ é a solução exata do Problema de Cauchy (1.1.5), podemos calcular o limite do erro de discretização local (2.1.3) quando o passo de integração tende a zero. Porém, ao fazermos $h \rightarrow 0$, como $t_k = hk + t_0$, teríamos $t_k \rightarrow 0$. Para que a noção de erro local de discretização assintótico esteja definida em todo intervalo $t \in [a, b]$, fixamos t no intervalo e mantemos $hk = t - t_0$ fixo na convergência de α_k com $h \rightarrow 0$. Assim, formalmente $k \rightarrow \infty$ quando $h \rightarrow 0$, e $\alpha_k \rightarrow \alpha(t)$, representando o erro local de discretização no tempo fixado t . Sob essa noção de convergência, com $hk = t - t_0$ fixado, podemos deduzir que

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_k &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k), h) \right] \\ &= y'(t) - \Phi(t, y(t), 0) \\ &= f(t, y(t)) - \Phi(t, y(t), 0).\end{aligned}$$

À medida que o passo de integração h diminui, é razoável supor que o erro local seja cada vez menor (!) e que, no limite para h tendendo a zero, ele venha a se anular. Assim, no limite, tem-se $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$. Em palavras, à medida que o passo de integração tende a zero, a função de discretização deve representar cada vez melhor a equação diferencial que define o Problema de Cauchy. No limite, a função de discretização deve ser *consistente com a equação diferencial* (ou, para encurtar, *consistente*).

Definição 2.3 (Consistência). *Supondo f e Φ contínuas, um método de passo único explícito é dito consistente com um problema de valor inicial bem posto se e somente se*

$$\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

ou, equivalentemente, se e somente se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_k = 0, \quad \forall t \in [a, b], \tag{2.2.5}$$

com $hk = t - t_0$ fixado.

O conceito de consistência está sempre associado a um dado problema de valor inicial bem posto. Diremos que o método é consistente, de forma genérica, quando o método for consistente para qualquer problema de valor inicial bem posto.

Exemplo 2.1. *O Método de Euler Aprimorado é consistente (com qualquer problema de valor inicial bem posto):*

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + h f(t_k, y_k))] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Phi(t, y, h) &= \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t + h, y + h f(t, y))], \\ \Phi(t, y, 0) &= \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t, y)] = f(t, y).\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

É interessante lembrar que, por hipótese, $f(t, y)$ é contínua e Lipschitziana na variável y . Assim, $\Phi(t, y, h)$ é contínua em seu terceiro argumento pois é dada por uma soma de funções contínuas (a segunda parcela do lado direito de (2.2.6) é uma função composta de funções contínuas e, portanto, contínua).

Definição 2.4 (Ordem de consistência). *Se existirem constantes positivas C , h_0 e q , independentes do tamanho do passo de integração h e do subíndice temporal k , tais que o erro de discretização local satisfaça*

$$\max_k \|\alpha_k\| \leq Ch^q, \quad 0 < h \leq h_0, \quad (2.2.7)$$

então o método numérico tem ordem de consistência q , sendo a ordem de consistência atrelada a norma utilizada $\|\cdot\|$.

A desigualdade (2.2.7) expressa o quão rapidamente o erro de discretização local vai a zero à medida que h diminui, ou seja, quanto próxima a solução aproximada está da solução exata.

Notação: Nas condições da Definição 2.4, escreve-se

$$\alpha_k = O(h^q),$$

que se lê “o erro de discretização local no instante t_k tem ordem q ”.

Exemplo 2.2. Qual é a ordem de consistência e uma estimativa do valor de C do Método de Euler para $y(t) \in \mathbb{R}$?

Solução:

O erro de discretização local para o Método de Euler é dado por

$$\alpha_k = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - f(t_k, y(t_k)). \quad (2.2.8)$$

Supondo-se que $y(t)$ seja suficientemente diferenciável ao redor de $t = t_k$ e utilizando-se o polinômio de Taylor de primeiro grau com seu respectivo resto de Lagrange, tem-se em $t = t_{k+1}$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + (t_{k+1} - t_k)y'(t_k) + \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2!}y''(\xi), \quad (2.2.9)$$

com $\xi \in (t_k, t_{k+1})$. Como $h = t_{k+1} - t_k$, a substituição de (2.2.9) em (2.2.8) resulta em

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi) - y(t_k)}{h} - f(t_k, y(t_k)) \\ &= y'(t_k) + \frac{h}{2!}y''(\xi) - f(t_k, y(t_k)) \\ &= \frac{h}{2}y''(\xi). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Portanto,

$$|\alpha_k| = h \left| \frac{1}{2}y''(\xi) \right| \Rightarrow \max_k |\alpha_k| \leq h \max_{\xi \in I} \frac{|y''(\xi)|}{2}. \quad (2.2.11)$$

Em (2.2.11), supõe-se que $y''(t)$ seja contínua em todo o intervalo de estudo, o que garante, pelo Teorema de Weierstrass, a existência de mínimo e máximo absolutos naquele intervalo. De (2.2.11) e da definição (2.2.7), conclui-se que o Método de Euler tem ordem de consistência 1 (um) com constante $C = \max_{\xi \in I} \frac{|y''(\xi)|}{2}$.

2.2.1 Exercícios

Exercício 2.1. Verifique que os métodos de Euler Implícito, de Euler Aprimorado e do Trapézio são consistentes com quaisquer problemas de valores iniciais bem postos e têm ordens de consistência um, dois e dois, respectivamente.

2.3 Erro de discretização global

Definição 2.5 (Erro global). O erro de discretização global no instante $t = t_k$ é dado por

$$e(t_k, h) \doteq e_k \doteq y(t_k) - y_k, \quad (2.3.12)$$

onde $y(t)$ é a solução (única) do problema de Cauchy associado e y_k o k -ésimo passo de integração do método numérico para este mesmo problema de Cauchy.

O erro global representa o erro total acumulado cometido até o k -ésimo passo de integração. É importante salientar que y_k não é calculado a partir de valores exatos no instante de tempo anterior, como na definição do erro de discretização local, mas sim a partir de valores obtidos pela aplicação do método numérico (em todos os instantes de tempo anteriores).

2.4 Convergência

Definição 2.6 (Convergência). Um método numérico é convergente em $t \in [a, b]$ se e somente se

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_k = 0, \quad (2.4.13)$$

com $t - t_0 = kh$ fixado. O método numérico é convergente se for convergente para todo t no intervalo de estudo (para qualquer Problema de Cauchy bem posto).

Para determinar quais condições são suficientes para um método de passo único explícito convergir, analisa-se o comportamento do erro de discretização global. O produto do erro de discretização local (2.1.3) pelo passo de integração h fornece

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\Phi(t_k, y(t_k), h) + h\alpha_k, \quad (2.4.14)$$

associada a um método de passo único explícito geral

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h). \quad (2.4.15)$$

Efetuando-se a subtração entre (2.4.14) e (2.4.15), tem-se

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = y(t_k) - y_k + h[\Phi(t_k, y(t_k), h) - \Phi(t_k, y_k, h)] + h\alpha_k,$$

isto é, a evolução do erro de discretização global é dada por

$$e_{k+1} = e_k + h[\Phi(t_k, y(t_k), h) - \Phi(t_k, y_k, h)] + h\alpha_k. \quad (2.4.16)$$

Supondo que a função $\Phi(t, y, h)$ satisfaz a condição de Lipschitz na variável y , ou seja,

$$\|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)\| \leq L\|y_1 - y_2\|,$$

para quaisquer t e h e para uma constante positiva L , tem-se para (2.4.16) que

$$\begin{aligned}\|e_{k+1}\| &\leq \|e_k\| + h\|\Phi(t_k, y(t_k), h) - \Phi(t_k, y_k, h)\| + h\|\alpha_k\| \\ &\leq \|e_k\| + hL\|y(t_k) - y_k\| + h\|\alpha_k\| \\ &\leq \|e_k\| + hL\|e_k\| + h\|\alpha_k\|,\end{aligned}$$

isto é,

$$\|e_{k+1}\| \leq (1 + hL)\|e_k\| + h\|\alpha_k\|, \quad \text{para todo } k > 0. \quad (2.4.17)$$

Supondo-se que o erro de discretização local α_k seja limitado,

$$\max_k \|\alpha_k\| \leq \alpha, \quad (2.4.18)$$

é possível reescrever (2.4.17) como

$$\|e_{k+1}\| \leq (1 + hL)\|e_k\| + h\alpha, \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (2.4.19)$$

Da arbitrariedade do subíndice k em (2.4.19), tem-se

$$\begin{aligned}\|e_1\| &\leq (1 + hL)\|e_0\| + h\alpha \\ \|e_2\| &\leq (1 + hL)\|e_1\| + h\alpha \\ \|e_3\| &\leq (1 + hL)\|e_2\| + h\alpha \\ &\vdots \\ \|e_{k+1}\| &\leq (1 + hL)\|e_k\| + h\alpha.\end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Por substituição recursiva de (2.4.20), obtém-se

$$\begin{aligned}\|e_1\| &\leq (1 + hL)\|e_0\| + h\alpha \\ \|e_2\| &\leq (1 + hL)^2\|e_0\| + [(1 + hL) + 1]h\alpha \\ \|e_3\| &\leq (1 + hL)^3\|e_0\| + [(1 + hL)^2 + (1 + hL) + 1]h\alpha \\ &\vdots \\ \|e_k\| &\leq (1 + hL)^k\|e_0\| + \\ &+ \left[(1 + hL)^{k-1} + \cdots + (1 + hL)^2 + (1 + hL) + 1 \right] h\alpha.\end{aligned} \quad (2.4.21)$$

A segunda das parcelas na desigualdade (2.4.21) é a soma dos k termos de uma progressão geométrica de termo inicial 1 (um) e razão $(1 + hL)$ ¹. Logo,

$$\|e_k\| \leq (1 + hL)^k\|e_0\| + \frac{(1 + hL)^k - 1}{L}\alpha. \quad (2.4.22)$$

¹A soma S_n dos n termos de uma progressão geométrica é dada por $S_n = a_1(q^n - 1)/q - 1$, onde a_1 é o primeiro termo e q é a razão da progressão.

Pela convexidade da função exponencial, pode-se mostrar que $e^t \geq (1 + t)$ e, consequentemente,

$$(e^{hL})^k \geq (1 + hL)^\alpha. \quad (2.4.23)$$

Empregando-se a desigualdade (2.4.23) em (2.4.22), constata-se que

$$\|e_k\| \leq e^{khL} \|e_0\| + \frac{e^{khL} - 1}{L} d, \quad (2.4.24)$$

onde d é a constante de limitação do erro de discretização local.

Teorema 2.1 (Delimitação do erro local). *Seja um método de passo único explícito definido por*

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h \Phi(t_k, y_k, h) \end{cases},$$

onde $\Phi(t, y, h)$ é uma função contínua em seus argumentos e satisfaz a condição de Lipschitz para a variável y , isto é, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Além disso, se o erro de discretização local for limitado, ou seja,

$$\max_k \|\alpha_k\| \leq \alpha,$$

então o erro de discretização global satisfaz a delimitação

$$\|e_k\| \leq e^{khL} \|e_0\| + \frac{e^{khL} - 1}{L} \alpha.$$

Se $\|e_0\| = 0$ e se o método numérico for consistente de ordem q , isto é,

$$\max_k \|\alpha_k\| \leq C h^q,$$

tem-se

$$0 \leq \|e_k\| \leq \frac{e^{khL} - 1}{L} C h^q = \frac{e^{(t_k - t_0)L} - 1}{L} C h^q. \quad (2.4.25)$$

Portanto o método também será convergente de ordem q .

Em (2.4.25), o lado direito da desigualdade tende a zero quando h tende a zero. Dessa forma, pelo *Teorema do Confronto*, o limite do valor absoluto do erro de discretização global tende a zero quando o passo de integração tende a zero. Portanto, um método de passo único consistente é convergente (caso a função Φ seja contínua em seus argumentos e Lipschitziana no segundo argumento). A recíproca contudo não é verdadeira! No segundo exercício resolvido deste capítulo, apresenta-se um método inconsistente e convergente [23]. O teorema a seguir resume as observações anteriores.

Teorema 2.2 (Convergência). *Um método de passo único explícito com*

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h \Phi(t_k, y_k, h) \end{cases},$$

onde Φ é Lipschitziana em y e contínua em seus argumentos, que seja **consistente** para qualquer problema de Cauchy bem posto é **convergente**. Além disso, a ordem de convergência é pelo menos a mesma ordem da consistência.

Exemplo 2.3. O Método de Euler (1.4.23) é consistente com ordem de consistência um. Nesse método, $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$. Como $f(t, y)$ é contínua e de Lipschitz (Problema de Cauchy), a função $\Phi(t, y, h)$ também é contínua e de Lipschitz. Portanto, o Método de Euler é convergente, isto é, para um instante de tempo fixado t , as soluções numéricas convergem para $y(t)$.

2.5 Expansão do erro de discretização global

O comportamento exibido na prática por um determinado método numérico depende fortemente da regularidade da função $f(t, y)$ que define o Problema de Cauchy. O teorema 2.3 [24] fornece os subsídios teóricos necessários para determinar computacionalmente com que ordem o método converge.

Teorema 2.3 (Expansão assintótica do erro de discretização global). *Seja uma função $f(t, y)$ com $N + 2$ derivadas parciais com relação a y , contínuas e limitadas na faixa*

$$\{(t, y); a = t_0 \leq t \leq t_f = b, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Além disso, seja $\eta(t, h)$ a solução numérica obtida através de um método de passo único

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h \Phi(t_k, \eta_k, h)$$

de ordem p para $y(t)$, determinada com o passo de integração h , onde $y(t)$ é a solução do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}.$$

Nessas condições, a solução numérica $\eta(t, h)$ admite expansão em potências de h da forma

$$\eta(t, h) = y(t) + h^p e_p(t) + h^{p+1} e_{p+1}(t) + \cdots + h^N e_N(t) + h^{N+1} E_{N+1}(t, h) \quad (2.5.26)$$

com $e_j(t_0) = 0$, $j = p, p + 1, \dots$, válida para todo $t \in [a, b]$ e para todo $h = \frac{t - t_0}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

Observe que as funções $e_j(t)$ são independentes de h e o resto $E_{N+1}(t, h)$ é limitado para t fixado e para todo $h = \frac{t - t_0}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. A expansão em série

assintótica (2.5.26) pode ser escrita em função do erro de discretização global no instante t como

$$-e(t, h) = \eta(t, h) - y(t) = \sum_{j=p}^N h^j e_j(t) + h^{N+1} E_{N+1}(t, h). \quad (2.5.27)$$

O resultado teórico (2.5.27) pode ser utilizado na prática para estimar o erro de discretização global e a ordem do método, sendo também extremamente útil no processo de depuração do código computacional.

2.5.1 Estimativa do erro de discretização global

Para um dado passo de integração h e um instante de tempo fixado t , calculam-se a soluções numéricas $\eta(t, h)$ e $\eta(t, \frac{h}{2})$. Se h for suficientemente pequeno, em primeira aproximação, tem-se de (2.5.27)

$$-e(t, h) = \eta(t, h) - y(t) \approx e_p(t)h^p, \quad (2.5.28)$$

$$-e(t, \frac{h}{2}) = \eta\left(t, \frac{h}{2}\right) - y(t) \approx e_p(t)\left(\frac{h}{2}\right)^p. \quad (2.5.29)$$

Calculando-se a diferença entre (2.5.28) e (2.5.29), chega-se a

$$\eta(t, h) - \eta\left(t, \frac{h}{2}\right) \approx e_p(t) \left[h^p - \left(\frac{h}{2}\right)^p \right] = e_p(t) \left(\frac{h}{2}\right)^p (2^p - 1)$$

e, portanto, a

$$e_p(t) \left(\frac{h}{2}\right)^p \approx \frac{\eta(t, h) - \eta(t, \frac{h}{2})}{2^p - 1}. \quad (2.5.30)$$

Substituindo-se (2.5.30) em (2.5.29), considerando $h > 0$ suficientemente pequeno, obtém-se

$$e(t, \frac{h}{2}) \approx -\frac{\eta(t, h) - \eta(t, \frac{h}{2})}{2^p - 1}, \quad (2.5.31)$$

uma estimativa do erro de discretização global em t , tendo sido calculadas as aproximações $\eta(t, h)$ e $\eta(t, \frac{h}{2})$ e sendo conhecida a ordem do método empregado. As considerações anteriores assumem tacitamente que a ordem do método seja menor que a regularidade de f . A ordem de convergência exibida na prática por um método numérico, \bar{p} , depende fortemente do quão diferenciável é f e pode exibir um comportamento distinto da ordem p . Tem-se $p = \bar{p}$ apenas se f for suficientemente diferenciável.

2.5.2 Estimativa da ordem de convergência

A expansão (2.5.26) fornece um meio útil para se estimar a ordem com a qual o método numérico em uso converge para a solução de um determinado Problema de Cauchy. Para tanto, calculam-se $\eta(t, 2h)$, $\eta(t, h)$ e $\eta(t, \frac{h}{2})$, as aproximações numéricas no instante t empregando passos de integração $2h$, h e $\frac{h}{2}$, respectivamente, para um passo de integração $h > 0$ suficientemente pequeno. O valor absoluto

do quociente entre as diferenças $\eta(t, 2h) - \eta(t, h)$ e $\eta(t, h) - \eta(t, \frac{h}{2})$ fornece, em primeira aproximação,

$$\left| \frac{\eta(t, 2h) - \eta(t, h)}{\eta(t, h) - \eta(t, \frac{h}{2})} \right| \approx \left| \frac{e_{\bar{p}}(t)(2^{\bar{p}} - 1)h^{\bar{p}}}{e_{\bar{p}}(t)(1 - 2^{-\bar{p}})h^{\bar{p}}} \right| = 2^{\bar{p}}. \quad (2.5.32)$$

Calculando o logaritmo de base 2 de (2.5.32)

$$\log_2 \left(\left| \frac{\eta(t, 2h) - \eta(t, h)}{\eta(t, h) - \eta(t, \frac{h}{2})} \right| \right) \approx \log_2 (2^{\bar{p}}) = \bar{p},$$

tem-se uma estimativa para a ordem exibida pelo método.

Este procedimento deve ser executado para várias triplas de passos sucessivamente menores $(2h, h, \frac{h}{2})$, $(h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4})$, ..., obtendo-se assim uma sequência de aproximações $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots$, que converge para a ordem \bar{p} que o método apresenta para o Problema de Cauchy em questão.

2.5.3 Depuração do código computacional

Nas seções anteriores, as estimativas apresentadas assumem que o método numérico já tenha passado por um processo conhecido como *verificação / validação* e que, portanto, ele esteja implementado corretamente e funcionando perfeitamente. Durante a programação, entretanto, é necessário o uso de estratégias de depuração para remover eventuais erros de lógica ou de coeficientes ou parâmetros que tenham sido introduzidos inadvertidamente. Para isto, empregam-se a aproximação do erro de discretização global (2.5.28) e um Problema de Cauchy com solução exata conhecida. Tal estratégia é denominada *verificação por solução manufaturada*.

Para verificar se o código computacional está correto, escolhe-se um Problema de Cauchy com solução suficientemente diferenciável (isto é, com um número de derivadas superior à ordem do método). Em (2.5.28), o erro de discretização global é conhecido uma vez que se tem à mão a solução exata $y(t)$ do Problema de Cauchy. Deseja-se então certificar-se que o método tem, de fato, a ordem prevista na teoria, p . Para tanto, determinam-se $\eta(t, h)$ e $\eta(t, \frac{h}{2})$, as aproximações numéricas do problema no instante t , empregando-se passos de integração $h > 0$ e $\frac{h}{2}$, respectivamente. O valor absoluto do quociente entre (2.5.28) e (2.5.29) fornece

$$\left| \frac{\eta(t, h) - y(t)}{\eta(t, \frac{h}{2}) - y(t)} \right| \approx \left| \frac{e_{\bar{p}^*}(t)h^{\bar{p}^*}}{e_{\bar{p}^*}(t)(\frac{h}{2})^{\bar{p}^*}} \right| = 2^{\bar{p}^*}, \quad (2.5.33)$$

ou seja,

$$\bar{p}^* \approx \log_2 \left(\left| \frac{\eta(t, h) - y(t)}{\eta(t, \frac{h}{2}) - y(t)} \right| \right). \quad (2.5.34)$$

Quando esta estratégia é executada para passos de integração progressivamente menores $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}, \dots$, obtém-se pelo uso sucessivo de (2.5.34) uma sequência $\bar{p}_1^*, \bar{p}_2^*, \bar{p}_3^*, \bar{p}_4^*, \dots$, que converge à ordem p que a teoria prevê para o método numérico, desde que este tenha sido implementado corretamente e aplicado a um Problema de Cauchy com garantias de solução única suficientemente diferenciável.

O procedimento de verificação por solução manufaturada não pode, por motivo algum, ser negligenciado. Para o bom programador, ele precede o uso regular do método no problema que se deseja solucionar numericamente. Usualmente, o procedimento de verificação deve ser efetuado para várias soluções manufaturadas com complexidade variada.

Exemplo 2.4. Comprove numericamente a ordem de convergência do Método de Euler aplicado à solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = -20y(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (2.5.35)$$

cuja solução exata é $y(t) = e^{-20t}$ (verifique!).

$h = n^{-1}$	$ e(t, h) $	$\left \frac{e(t, h)}{e\left(t, \frac{h}{2}\right)} \right $	$\log_2 \left \frac{e(t, h)}{e\left(t, \frac{h}{2}\right)} \right $
$2,000000 \times 10^{-1}$	2,430000E+02		
$1,000000 \times 10^{-1}$	9,999999E-01	2,430000E+02	7,924813E+00
$5,000000 \times 10^{-2}$	2,061154E-09	4,851652E+08	2,885390E+01
$2,500000 \times 10^{-2}$	2,060244E-09	1,000441E+00	6,367371E-04
$1,250000 \times 10^{-2}$	1,960019E-09	1,051135E+00	7,194787E-02
$6,250000 \times 10^{-3}$	1,534787E-09	1,277063E+00	3,528297E-01
$3,125000 \times 10^{-3}$	9,876378E-10	1,553998E+00	6,359843E-01
$1,562500 \times 10^{-3}$	5,632015E-10	1,753614E+00	8,103308E-01
$7,812500 \times 10^{-4}$	3,010566E-10	1,870749E+00	9,036163E-01
$3,906250 \times 10^{-4}$	1,556782E-10	1,933839E+00	9,514678E-01
$1,953125 \times 10^{-4}$	7,916378E-11	1,966533E+00	9,756547E-01
$9,765625 \times 10^{-5}$	3,991780E-11	1,983170E+00	9,878083E-01

Tabela 2.1: Verificação da ordem de convergência do Método de Euler aplicado ao problema de valor inicial (2.5.35) no instante $t = 1$.

A Tabela (2.1) apresenta as razões entre erros de discretização global para passos de integração progressivamente menores (razão de refinamento dois) em $t = 1$. Observa-se que a ordem estimada, localizada na última coluna, tende a um, a ordem de convergência prevista pela teoria para o Método de Euler.

Exemplo 2.5. Verifique a ordem de convergência numérica do Método de Euler aplicado à solução do problema de valor inicial [5]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = -y(t) \tan(t) - \frac{1}{\cos(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.5.36)$$

em $t = 1,292695719373$ (raiz da equação $e^t \cos(t) = 1$), sabendo que a solução exata de (2.5.36) é $y(t) = \cos(t) - \sin(t)$ (comprove!).

A Tabela (2.2) apresenta a razão entre erros de discretização global para passos de integração progressivamente menores (razão de refinamento dois) em $t = 1,292695719373$. Observa-se que a ordem estimada, localizada na última coluna,

$h = n^{-1}$	$ e(t, h) $	$\left \frac{e(t, h)}{e\left(t, \frac{h}{2}\right)} \right $	$\log_2 \left \frac{e(t, h)}{e\left(t, \frac{h}{2}\right)} \right $
$5,000000 \times 10^{-2}$	1,130400E-03		
$2,500000 \times 10^{-2}$	2,561790E-04	4,412540E+00	2,141609E+00
$1,250000 \times 10^{-2}$	6,115026E-05	4,189336E+00	2,066722E+00
$6,250000 \times 10^{-3}$	1,494962E-05	4,090422E+00	2,032250E+00
$3,125000 \times 10^{-3}$	3,696597E-06	4,044157E+00	2,015839E+00
$1,562500 \times 10^{-3}$	9,191362E-07	4,021816E+00	2,007847E+00
$7,812500 \times 10^{-4}$	2,291629E-07	4,010842E+00	2,003905E+00
$3,906250 \times 10^{-4}$	5,721340E-08	4,005406E+00	2,001949E+00
$1,953125 \times 10^{-4}$	1,429410E-08	4,002588E+00	2,000933E+00
$9,765625 \times 10^{-5}$	3,573300E-09	4,000251E+00	2,000091E+00

Tabela 2.2: Verificação da ordem de convergência do Método de Euler aplicado ao problema de valor inicial (2.5.36) no instante $t = 1, 292695719373$ [5].

tende a dois, diferente da ordem de convergência um prevista pela teoria para o Método de Euler. A ordem mais elevada é justificada pelo cancelamento do termo mais significativo na expansão assintótica do erro de discretização global para $t = 1, 292695719373$, raiz da equação $e^t \cos(t) = 1$ [5]. Para qualquer outro instante de tempo que não seja raiz dessa equação, a ordem estimada tende a um, a ordem de convergência prevista pela teoria para o Método de Euler.

Exemplo 2.6. Verifique a ordem de convergência numérica do Método de Euler aplicado à solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) &= -\frac{ty(t)}{1-t^2} \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (2.5.37)$$

em $t = 1$, sabendo que a solução exata de (2.5.37) é $y(t) = \sqrt{1-t^2}$ (comprove!).

A Tabela (2.3) apresenta a razão entre erros de discretização global para passos de integração progressivamente menores (razão de refinamento dois) em $t = 1$. Observa-se que a ordem estimada, localizada na última coluna, tende a meio, diferente da ordem de convergência um prevista pela teoria para o Método de Euler. A justificativa para a perda de ordem é que a Condição de Lipschitz não é mantida quando $t = 1$ e $y = 0$ [5].

2.5.4 Exercícios

Exercício 2.2. Estime numericamente a ordem de convergência do Método de Euler Aprimorado (1.4.25) com a estratégia de solução manufaturada empregando o problema modelo (2.5.35) no instante final $t = 1$.

Exercício 2.3. Estime numericamente a ordem de convergência do Método de Euler (1.4.23) com a estratégia de solução manufaturada empregando o problema modelo (2.5.36) no instante final $t = \frac{\pi}{4}$.

$h = n^{-1}$	$ e(t, h) $	$\left \frac{e(t, h)}{e\left(t, \frac{h}{2}\right)} \right $	$\log_2 \left \frac{e(t, h)}{e\left(t, \frac{h}{2}\right)} \right $
$1,2500000000 \times 10^{-1}$	3,012018700E-01		
$6,2500000000 \times 10^{-2}$	2,072697687E-01	1,453188E+00	5,392210E-01
$3,1250000000 \times 10^{-2}$	1,441738248E-01	1,437638E+00	5,237004E-01
$1,5625000000 \times 10^{-2}$	1,009724646E-01	1,427853E+00	5,138473E-01
$7,8125000000 \times 10^{-3}$	7,100787890E-02	1,421990E+00	5,079109E-01
$3,9062500000 \times 10^{-3}$	5,005564440E-02	1,418579E+00	5,044464E-01
$1,9531250000 \times 10^{-3}$	3,533418900E-02	1,416635E+00	5,024680E-01
$9,7656250000 \times 10^{-4}$	2,496156840E-02	1,415544E+00	5,013562E-01
$4,8828125000 \times 10^{-4}$	1,764145320E-02	1,414938E+00	5,007392E-01
$2,4414062500 \times 10^{-4}$	1,247093200E-02	1,414606E+00	5,004001E-01
$1,2207031250 \times 10^{-4}$	8,816964600E-03	1,414425E+00	5,002153E-01
$6,1035156250 \times 10^{-5}$	6,234037200E-03	1,414327E+00	5,001153E-01
$3,0517578125 \times 10^{-5}$	4,407942200E-03	1,414274E+00	5,000615E-01

Tabela 2.3: Verificação da ordem de convergência do Método de Euler aplicado ao problema de valor inicial (2.5.37) no instante $t = 1$ [5].

Exercício 2.4. Estime numericamente a ordem de convergência do Método de Euler (1.4.23) com a estratégia de solução manufaturada empregando o problema modelo (2.5.37) no instante final $t = \frac{1}{2}$.

2.6 Suplemento teórico

Teorema 2.4 (Teorema de Weierstrass). Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no conjunto A fechado e limitado. Então, existem pontos de máximo e mínimo absoluto de f em A , isto é, existem $x_0, x_1 \in A$ tais que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

para todo $x \in A$.

Teorema 2.5 (Teorema do Confronto). Se $f(t) \leq g(t) \leq h(t)$ quando t está próximo de a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} h(t) = L,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow a} g(t) = L.$$

2.7 Exercícios resolvidos

Exercício Resolvido 2.1. Considere o Método do Trapézio.

- (a) Calcule o erro local de discretização do método;
- (b) Verifique que o método é consistente;
- (c) Determine um delimitante superior do erro global de discretização.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k), y(t_{k+1}), h) \\
 \alpha_k &= \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \frac{f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))}{2} \\
 2h\alpha_k &= 2[y(t_{k+1}) - y(t_k)] - h[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))] \\
 2h\alpha_k &= 2\left[y(t_k) + h'y'(t_k) + \frac{h^2}{2!}y''(t_k) + \frac{h^3}{3!}y'''(\varepsilon_1) - y(t_k)\right] + \\
 &\quad - h[y'(t_k) + y'(t_{k+1})] \\
 2h\alpha_k &= 2\left[h'y'(t_k) + \frac{h^2}{2!}y''(t_k) + \frac{h^3}{3!}y'''(\varepsilon_1)\right] + \\
 &\quad - h\left[y'(t_k) + y'(t_k) + h'y''(t_k) + \frac{h^2}{2!}y'''(\varepsilon_2)\right] \\
 2h\alpha_k &= 2h'y'(t_k) + h^2y''(t_k) + \frac{h^3}{3!}y'''(\varepsilon_1) + \\
 &\quad - 2h'y'(t_k) - h^2y''(t_k) - \frac{h^3}{2}y'''(\varepsilon_2) \\
 2h\alpha_k &= \frac{h^3}{3!}y'''(\varepsilon_1) - \frac{h^3}{2}y'''(\varepsilon_2) \\
 \alpha_k &= \frac{h^2}{6}y'''(\varepsilon_1) - \frac{h^2}{4}y'''(\varepsilon_2) \\
 \alpha_k &= h^2\left[\frac{y'''(\varepsilon_1)}{6} - \frac{y'''(\varepsilon_2)}{4}\right]
 \end{aligned}$$

Portanto, o erro local de discretização é dado por

$$\boxed{\alpha_k = h^2\left[\frac{y'''(\varepsilon_1)}{6} - \frac{y'''(\varepsilon_2)}{4}\right], \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]t_k, t_{k+1}[.}$$

(b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_k = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \left[\frac{y'''(\varepsilon_1)}{6} - \frac{y'''(\varepsilon_2)}{4} \right] = 0.$$

Logo, o Método do Trapézio é consistente.

(c)

$$\begin{aligned}
 y(t_{k+1}) &= y(t_k) + h\Phi(t_k, y(t_k), y(t_{k+1}), h) + h\alpha_k & A \\
 y_{k+1} &= y_k + h\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) & B
 \end{aligned}$$

Calculando-se A-B:

$$\begin{aligned}
 y(t_{k+1}) - y_{k+1} &= y(t_k) - y_k + \\
 &\quad + h[\Phi(t_k, y(t_k), y(t_{k+1}), h) - \Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h)] + \\
 &\quad + h\alpha_k;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|e_{k+1}\| &= \|e_k + \\
&\quad + h \left[\frac{f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))}{2} - \frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})}{2} \right] + \\
&\quad + h \alpha_k\|; \\
\|e_{k+1}\| &= \|e_k + \\
&\quad + \frac{h}{2} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) - f(t_{k+1}, y_{k+1})] + \\
&\quad + h \alpha_k\|; \\
\|e_{k+1}\| &\leq \|e_k\| + \frac{h}{2} \|f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)\| + \\
&\quad + \frac{h}{2} \|f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) - f(t_{k+1}, y_{k+1})\| + \\
&\quad + h \|\alpha_k\|; \\
\|e_{k+1}\| &\leq \|e_k\| + \frac{L_1 h}{2} \|y(t_k) - y_k\| + \frac{L_2 h}{2} \|y(t_{k+1}) - y_{k+1}\| + h \|\alpha_k\|.
\end{aligned}$$

Sendoo $L = \max\{L_1, L_2\}$ e $d = \max_k \|\alpha_k\|$:

$$\begin{aligned}
\|e_{k+1}\| &\leq \|e_k\| + \frac{Lh}{2} \|e_k\| + \frac{Lh}{2} \|e_{k+1}\| + h d; \\
\left(1 - \frac{Lh}{2}\right) \|e_{k+1}\| &\leq \left(1 + \frac{Lh}{2}\right) \|e_k\| + h d;
\end{aligned}$$

Para h suficiente pequeno, isto é, $Lh \ll 2$,

$$\|e_{n+1}\| \leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right) \|e_n\| + \frac{hd}{1 - \frac{Lh}{2}}. \quad (2.7.38)$$

Para $n = 0$ em (2.7.38):

$$\|e_1\| \leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right) \|e_0\| + \frac{hd}{1 - \frac{Lh}{2}}.$$

Para $n = 1$ em (2.7.38):

$$\begin{aligned}
\|e_2\| &\leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right) \|e_1\| + \frac{hd}{1 - \frac{Lh}{2}}; \\
\|e_2\| &\leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right) \left[\left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right) \|e_0\| + \frac{hd}{1 - \frac{Lh}{2}} \right] + \frac{hd}{1 - \frac{Lh}{2}}; \\
\|e_2\| &\leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^2 \|e_0\| + \left(1 + \frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right) \frac{hd}{1 - \frac{Lh}{2}}.
\end{aligned}$$

Para $n = 2$ em (2.7.38):

$$\begin{aligned}\|e_3\| &\leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^3 \|e_0\| + \\ &+ \left[1 + \frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} + \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^2 \right] \frac{h d}{1 - \frac{Lh}{2}}.\end{aligned}$$

Para $n = k - 1$ em (2.7.38):

$$\begin{aligned}\|e_k\| &\leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^k \|e_0\| + \\ &+ \left[1 + \frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} + \cdots + \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^{k-1} \right] \frac{h d}{1 - \frac{Lh}{2}}; \\ \|e_k\| &\leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^k \|e_0\| + \left[\frac{\left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^k - 1}{\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} - 1} \right] \frac{h d}{1 - \frac{Lh}{2}}; \\ \|e_k\| &\leq \left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^k \|e_0\| + \left[\left(\frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}} \right)^k - 1 \right] \frac{d}{L},\end{aligned}$$

que define um limite superior para o erro global.

Exercício Resolvido 2.2. Considere o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [0, 1], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.7.39)$$

e o seguinte método para sua solução,

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) + h 2^{k-n}, \quad (2.7.40)$$

onde $h = \frac{1}{n}$, $t_k = kh$ e $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Mostre que o método é inconsistente e convergente [23].

Solução:

O método é de passo único, explícito, com função de iteração

$$\Phi(t_k, y_k, h) = f(t_k, y_k) + \theta(t_k, h), \quad (2.7.41)$$

onde $\theta_k = \theta(t_k, h) = 2^{k-n} = 2^{\frac{t_k-1}{h}}$. Se f for contínua e de Lipschitz na variável y , então Φ também será, pois θ_k não depende de y .

Para constatar a falta de consistência, basta verificar que $\Phi(t, y, 0) \neq f(t, y)$ para algum $t \in [0, 1]$. Como

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y) + 2^{\frac{t-1}{h}},$$

para $t = 1$ tem-se que

$$\Phi(1, y, h) = f(1, y) + 1.$$

Logo,

$$\Phi(1, y, 0) = f(1, y) + 1 \neq f(1, y)$$

e, portanto, o método não é consistente com a equação diferencial ordinária.

Pode-se também verificar a falta de consistência com o erro local de truncamento, supondo que a solução é suficientemente diferenciável. Usando a Série de Taylor de $y(t_{k+1})$ ao redor de $y(t_k)$, o erro local de truncamento em t_k será dado por

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \Phi(t_k, y(t_k), h) \\ &= \frac{y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(\tilde{t}_k) - y(t_k)}{h} - f(t_k, y(t_k)) - 2^{k-n} \\ &= \frac{h}{2}y''(\tilde{t}_k) - 2^{k-n},\end{aligned}$$

para algum $\tilde{t}_k \in [0, 1]$. Em $k = n - 1$,

$$|\alpha_{n-1}| = \left| \frac{h}{2}y''(\tilde{t}_{n-1}) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} |hy''(\tilde{t}_{n-1}) - 1|.$$

Considerando-se n suficientemente grande (h suficientemente pequeno), tal que

$$h < \max_{t \in [0, 1]} \frac{1}{2y''(t)},$$

obtém-se

$$\max_k |\alpha_k| \geq \frac{1}{4}.$$

Assim, o método (2.7.40) não é consistente.

Para mostrar que o método (2.7.40) é convergente, emprega-se a Série de Taylor de $y(t_{k+1})$ ao redor de $y(t_k)$. O erro global de discretização no tempo t_{k+1} será tal que

$$\begin{aligned}|e_{k+1}| &= |y_{k+1} - y(t_{k+1})| \\ &= |y_k + hf(t_k, y_k) + h\theta_k - y(t_k) - hy'(t_k) + O(h^2)| \\ &= |y_k + hf(t_k, y_k) + h\theta_k - y(t_k) - hf(t_k, y(t_k)) + O(h^2)| \\ &= |e_k + h\theta_k + h(f(t_k, y_k) - f(t_k, y(t_k))) + O(h^2)| \\ &\leq |e_k| + h\theta_k + h|f(t_k, y_k) - f(t_k, y(t_k))| + O(h^2) \\ &\leq |e_k| + h\theta_k + hL|e_k| + O(h^2) \\ &\leq (1 + Lh)|e_k| + h\theta_k + O(h^2),\end{aligned}$$

supondo-se f de Lipschitz em y com constante L .

Observa-se que

$$\begin{aligned}|e_0| &= 0, \\ |e_1| &\leq h\theta_1 + O(h^2), \\ |e_2| &\leq (1 + Lh)\theta_1 + h\theta_2 + O(h^2),\end{aligned}$$

e, por fim, que

$$|e_{k+1}| \leq \sum_{j=0}^k (1 + Lh)^{k-j} h \theta_{j+1} + O(h^2).$$

Portanto, o erro global máximo pode ser majorado pelo erro do final da integração numérica. Assim,

$$e(t_n) = \max_{k=1,\dots,n} |e_k| \leq |e_n| \leq h\beta_n + O(h^2)$$

com

$$\begin{aligned} \beta_n &= \sum_{j=0}^n \left(1 + \frac{L}{n}\right)^{n-j} 2^{j+1-n} &= \sum_{j=0}^n \left(1 + \frac{L}{n}\right)^{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j-1} \\ &= 2 \sum_{j=0}^n \left(\frac{1 + \frac{L}{n}}{2}\right)^{n-j}. \end{aligned} \quad (2.7.42)$$

Logo, β_n é duas vezes a soma de uma progressão geométrica de razão

$$q = \frac{1 + \frac{L}{n}}{2} = \frac{1 + hL}{2}.$$

A série (2.7.42) tem somente termos positivos e, para $n > 2L$, $q \in (0, 1)$. Portanto, existe uma constante positiva C tal que $\beta_n < C$ para todo $n > 2L$. Consequentemente, para $h > 0$ pequeno,

$$e(t_n) \leq h\beta_n + O(h^2) \leq Ch + O(h^2),$$

e o método (2.7.40) é convergente.