Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais

Notas de aula em construção

Texto original de 2014

Alexandre Megiorin Roma
roma@ime.usp.br
Joyce da Silva Bevilacqua
joyce@ime.usp.br

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Rudimar Luiz Nós
rudimarnos@utfpr.edu.br

Departamento Acadêmico de Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Edição de 2019

Pedro da Silva Peixoto
pedrosp@ime.usp.br
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

"... que a importância de uma coisa não se mede com fita métrica nem com balanças nem com barômetros etc. Que a importância de uma coisa há que ser medida pelo encantamento que a coisa produza em nós."

Manoel de Barros.
Memórias Inventadas, 2006.

Agradecimentos

Aos monitores e aos alunos da disciplina *MAP5725 - Tratamento Numérico de Equações Diferenciais*, disciplina anualmente ministrada dentro do Programa de Verão do IME-USP para a qual tais notas foram escritas, por seu contínuo questionamento, por suas críticas e por sua constante demanda por exemplos e por exercícios resolvidos sem os quais o texto não estaria completo. À CAPES pela bolsa de pós-doutorado para um dos autores durante o período em que o texto foi reorganizado na versão de 2014.

Conteúdo

Prefácio **1**

1 O Problema de Cauchy **3**
1.1 Definição do Problema de Cauchy 5
1.2 Existência e unicidade de solução 6
1.3 Solução do Problema de Cauchy 7
1.3.1 Exercícios 9
1.4 Discretização do Problema de Cauchy 9
1.4.1 Exercícios 15
1.5 Suplemento teórico 15
1.5.1 Fórmula de Taylor de uma função de uma variável 17
1.5.2 Fórmula de Taylor de uma função de duas variáveis 18
1.6 Exercícios resolvidos 18

2 Métodos de passo único **23**
2.1 Erro de discretização local 23
2.2 Consistência 25
2.2.1 Exercícios 27
2.3 Erro de discretização global 27
2.4 Convergência 27
2.5 Expansão do erro de discretização global 30
2.5.1 Estimativa do erro de discretização global 31
2.5.2 Estimativa da ordem de convergência 31
2.5.3 Depuração do código computacional 32
2.5.4 Exercícios 34
2.6 Suplemento teórico 35
2.7 Exercícios resolvidos 36

3 Métodos de passo único de altas ordens **41**
3.1 Métodos da Série de Taylor 41
3.2 Métodos de Runge-Kutta explícitos 42
3.2.1 Métodos de Runge-Kutta explícitos de 2-estágios 43
3.2.2 Métodos de Runge-Kutta explícitos de R-estágios 44
3.2.3 Métodos de Runge-Kutta de ordens mais elevadas 46
3.2.4 Exercícios 48
3.3 Controle automático do passo de integração 48
3.3.1 Exercícios 51
3.4 Suplemento teórico 52
3.5 Exercícios resolvidos 52

4 Estabilidade absoluta dos métodos de passo único **61**
4.1 Estabilidade absoluta 62
4.1.1 Exercícios 64
4.2 Suplemento teórico 66
4.2.1 Instabilidade inerente 66
4.3 Exercícios resolvidos 66

5 Métodos de passo múltiplo lineares **71**
5.1 Caracterização dos métodos de passo múltiplo 71
5.2 Dedução de métodos de passo múltiplo 72
5.3 Erro de discretização local 73
5.4 Consistência 75
5.5 Inicialização 77
5.6 Convergência 79
5.6.1 Exercícios 81
5.7 Exercícios resolvidos 81

6 Zero-estabilidade e convergência dos métodos de passo múltiplo lineares **87**
6.1 Equações de diferenças lineares 87
6.1.1 Exercícios 93
6.2 Exemplo de divergência 94
6.2.1 Consistência e divergência 94
6.2.2 Exercícios 97
6.2.3 Relação com as raízes do polinômio característico 97
6.3 Primeiro e segundo polinômios característicos 99
6.4 Zero-estabilidade 100
6.5 Ordem de convergência 103
6.5.1 Exercícios 104
6.6 Erro de discretização global 105
6.7 Estabilidade absoluta 107
6.7.1 Exercícios 110
6.8 Exercícios resolvidos 111

7 Métodos preditores-corretores **123**
7.0.1 Exercícios 124
7.1 Erro de discretização local 126
7.2 Estratégia de Milne 129
7.3 Estabilidade absoluta 130
7.3.1 Exercícios 133
7.4 Controle do passo de integração 133
7.4.1 Exercícios 134
7.5 Suplemento teórico 135
7.6 Exercícios resolvidos 135

A Exercícios complementares **139**

B Exercícios computacionais **143**

Índice **148**

Prefácio

Por intermédio de equações diferenciais ordinárias, é possível construir relações entre grandezas e suas respectivas variações em relação a um parâmetro independente (e.g. o tempo). Obter tais relações é uma tarefa de modelagem matemática e está fora do escopo destas notas. Aqui, parte-se diretamente de modelos matemáticos já estabelecidos, representados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com valor inicial. A partir das equações discretizadas, estudam-se os erros de discretização local e global, a consistência de tais discretizações com o modelo matemático, sua estabilidade e a convergência da solução numérica para a solução exata do problema colocado.

Pressupõe-se que o aluno saiba programar em alguma linguagem de alto nível aprendida numa disciplina introdutória de programação científica e que tenha cursado ao menos duas disciplinas de cálculo diferencial e integral. Intimidade com equações diferenciais ordinárias é desejável mas não essencial para o aprendizado. Para uma "leitura suave" dos temas abordados, recomendam-se fortemente revisões prévias de alguns resultados teóricos tais como o desenvolvimento em série de Taylor de uma função de uma e de várias variáveis e de teoremas primeiros como o do confronto e o do valor médio [12]. Os conceitos de limite e de convergência são fundamentais. Há uma grande influência na maneira de como se conduziu o fluxo do texto de excelentes livros na temática abordada, como o de Lambert [16], e de outros, de caráter mais geral, como os de Burden e Faires [3], Stoer e Bulirsch [24], Schwarz [21], dentre muitos outros.

Este texto compreende grande parte das notas de aula revisadas da disciplina *Tratamento Numérico de Equações Diferenciais*, oferecida pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) em seus programas de Verão há mais de dez anos. Embora tal disciplina tenha como público alvo candidatos ao programa de pós-graduação em Matemática Aplicada, não é incomum alunos de iniciação científica cursarem a disciplina devido à abordagem introdutória dada ao tema. Além disso, ao longo dos anos, o texto original mostrou-se um excelente material de apoio a disciplinas de graduação com foco em métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias, oferecidas no IME-USP a alunos do Bacharelado em Matemática Aplicada e Matemática Aplicada e Computacional. Esperam-se resultados ainda melhores com o presente texto.

São Paulo, 30 de setembro de 2014.

Alexandre Megiorin Roma
Joyce da Silva Bevilacqua
Rudimar Luiz Nós

Capítulo 1

O Problema de Cauchy

O corpo humano utiliza a glicose como principal fonte de energia. A glicose é um tipo de açúcar cuja concentração sanguínea deve estar entre 70 e 110 mg/dl em indivíduos normais. A insulina e o glucagon, hormônios produzidos no pâncreas, são liberados sempre que a concentração de glicose aumenta, como ocorre após a ingestão de alimentos.

Quando os níveis de glicose estão acima de 110 ml/dl (hiperglicemia) por um período prolongado, o indivíduo é diagnosticado com *diabetes mellitus*, doença do sistema regulatório da glicose-insulina. Os sintomas do diabetes são sede excessiva (polidipsia), exacerbada produção urinária (poliuria), desidratação, cansaço e perda de peso. O diabetes é classificado em dois tipos: o Tipo I ou juvenil, que é insulino-dependente, e o Tipo II, mais comum em adultos, tratado em casos mais críticos com drogas ou insulina. Independentemente do tipo, o controle da concentração da glicose no sangue é imprescindível para evitar, ou no mínimo retardar, a evolução da doença a qual compromete a microcirculação podendo ocorrer retinopatia, neuropatias e nefropatia, entre outras complicações.

Estudos mostram que a liberação da insulina pelo pâncreas ocorre em diferentes escalas de tempo. As taxas mais rápidas duram em torno de dezenas de segundos e estão vinculadas à concentração de íons de cálcio $\left(Ca^2+\right)$. As taxas médias ocorrem entre 5 e 15 minutos e as liberações lentas entre 50 e 120 minutos. O diagnóstico do diabetes é feito pelo Teste de Tolerância a Glicose (GTT). Neste, o indivíduo ingere em jejum uma dose elevada de glicose e por um período de três a cinco horas colhem-se amostras sucessivas de sangue as quais são utilizadas para avaliar a variação da concentração de glicose no tempo.

Vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para representar o mecanismo do sistema regulatório glicose-insulina. Segundo Bergman [1, 19], o modelo que contém o menor número de parâmetros, denominado *modelo mínimo*, é representado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}G(t) = -\left[b_1 + X(t)\right]G(t) + b_1 G_b \\ \dfrac{d}{dt}X(t) = -b_2 X(t) + b_3\left[I(t) - I_b\right] \\ \dfrac{d}{dt}I(t) = b_4\left[G(t) - b_5\right]^+ t - b_6\left[I(t) - I_b\right] \end{cases}, \tag{1.0.1}$$

com condições iniciais $G(0) = b_0$, $X(0) = 0$ e $I(0) = b_7 + I_b$, nas quais $G(t)$ e $I(t)$ representam a concentração de glicose e de insulina no sangue, respectivamente,

$X(t)$ é uma função auxiliar que modela o tempo de retardo do consumo da insulina em relação ao consumo de glicose e

$$[G(t) - b_5]^+ = \begin{cases} G(t) - b_5, & \text{se } G(t) > b_5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Os parâmetros b_i, $i = 1, \ldots, 7$, são constantes positivas asim como os valores basais de glicose G_b de insulina I_b.

Discutir a modelagem matemática deste processo está fora do escopo deste texto. No caso do mecanismo regulatória glicose-insulina, modelos mais realistas devem incluir as variações das taxas de produção de insulina e do consumo de glicose. O modelo (1.0.1) é aceito como uma boa aproximação para a área médica. Contudo, para uma primeira abordagem, é possível utilizar modelos ainda mais simples. Sejam $G(t)$ e $I(t)$ funções contínuas e definidas num intervalo $[0, T_f]$ que representam a concentração de glicose e de insulina no sangue, respectivamente. O intervalo $[0, T_f]$ representa o tempo de duração do teste que tem inínicio em $t = 0$, após 12 horas de jejum, com a tomada de medidas $G(0)$ e $I(0)$ as quais correspondem a valores de equilíbrio para o paciente. Uma dose de glicose é administrada no paciente e os valores $G(t)$ e $I(t)$ são medidos em vários momentos do tempo até o término do teste em $t = T_f$, que dura aproximadamente 5 horas. As dinâmicas de $G(t)$ e $I(t)$ podem ser representadas pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d}{dt}G(t) = -k_1 G(t) - k_2 I(t) \tag{1.0.2}$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = +k_3 G(t) - k_4 I(t) \tag{1.0.3}$$

com condição inicial $G(0) = G_0$ e $I(0) = I_0$, $t \in [0, T_f]$, onde $k_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 4$ são constantes positivas.

Quando um aumento na concentração desvia a glicose de seu nível de equilíbrio, parte dela é absorvida pelos tecidos e parte é armazenada no fígado, forçando assim um decréscimo em sua concentração no sangue. Similarmente, um aumento na concentração de insulina também acarreta um decréscimo nos níveis da glicose sanguínea pois o hormônio facilita seu armazenamento nos tecidos e no fígado. Este processo é descrito pela primeira equação, (1.0.2). Por outro lado, um aumento na concentração de glicose faz com que mais insulina seja secretada, aumentando a concentração desta na corrente sanguínea. O organismo, ao identificar este aumento na concentração hormonal, tende a fazê-la baixar novamente. Este mecanismo de autorregulação é descrito pela segunda equação, (1.0.3).

Na prática, elimina-se a função $I(t)$ do modelo matemático derivando-se (1.0.2) e substituindo-se o resultado em (1.0.3). Chega-se assim à equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea

$$\frac{d^2}{dt^2}G(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}G(t) + \omega^2 G(t) = 0, \tag{1.0.4}$$

onde $\alpha = \dfrac{k_1 + k_4}{2}$ e $\omega^2 = k_1 k_4 + k_2 k_3$ são parâmetros a serem determinados com o auxílio das medidas efetuadas no teste GTT. Neste caso, as condições iniciais passam a ser dadas por $G(0) = G_0$ e $\dfrac{d}{dt}G(0) = \dot{G}_0$, onde $G(0)$ e $\dfrac{d}{dt}G(0)$ são, respectivamente, a concentração de glicose no início do teste e a velocidade com que esta concentração se modifica.

1.1 Definição do Problema de Cauchy

Um problema de valor inicial (p.v.i.) definido por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com condição inicial é chamado *Problema de Cauchy* [5, 10, 16, 22].

Definição 1.1 (Problema de Cauchy)**.**

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \\ \\ y(t_0) = y(a) = y_0 \end{cases} . \tag{1.1.5}$$

Considerando f uma função contínua em ambas variáveis ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), desejamos encontrar soluções (clássicas) do p.v.i., que são funções continuamente diferenciáveis no tempo ($y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$). Para abreviar a notação, consideramos $y'(t) = \dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}y(t)$.

No modelo glicose-insulina (1.0.2)-(1.0.3),

$$y(t) = \begin{bmatrix} G(t) \\ I(t) \end{bmatrix},$$

$$f(t, y(t)) = f(t, G(t), I(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t, G(t), I(t)) \\ f_2(t, G(t), I(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 G(t) - k_2 I(t) \\ +k_3 G(t) - k_4 I(t) \end{bmatrix}.$$

Além dos modelos descritos por sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, um equação diferencial ordinária de ordem $m > 1$ pode ser reescrita como um sistema de m equações diferenciais ordinárias de primeira ordem quando tal equação puder ser colocada na forma

$$y^{(m)}(t) = f\big(t, y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)\big)$$

com condição inicial dada por $\big(y(t_0), y^{(1)}(t_0), y^{(2)}(t_0), \ldots, y^{(m-1)}(t_0)\big)$. Para isto, faz-se a substituição de variáveis definida por

$$\begin{aligned} &x_1(t) = y(t) \\ &x_1'(t) = x_2(t) = y'(t) \\ &x_2'(t) = x_3(t) = y''(t) \\ &\vdots \\ &x_m'(t) = f\big(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}\big) \end{aligned}$$

e colocam-se $x_1(t_0) = y(t_0)$, $x_2(t_0) = y_2^{(1)}(t_0)$, $\ldots$ $x_m(t_0) = y^{(m-1)}(t_0)$. Como se vê, nas condições anteriores, a definição (1.1.5) é válida para um sistema de equações.

Da teoria de equações diferenciais [2, 8, 22] sabe-se que para uma equação diferencial ordinária de ordem m ou para um sistema de m equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são necessárias exatamente m condições para garantir a unicidade de solução. No caso do Problema de Cauchy para sistemas de equações diferenciais, são necessárias m condições iniciais.

1.2 Existência e unicidade de solução

As condições para a existência e unicidade de solução do Problema de Cauchy (1.1.5) são dadas pelo Teorema (1.1), abaixo. Entre tais condições, encontra-se o conceito *condição de Lipschitz*.

Definição 1.2 (Condição de Lipschitz)**.** *Uma função $f(t, y)$ satisfaz a Condição de Lipschitz na variável y, $(t, y) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, se e somente se existir uma constante $L > 0$ tal que*

$$||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq L||y_1 - y_2|| \tag{1.2.6}$$

para quaisquer par de pontos (t, y_1) e (t, y_2) em Ω e $\|\cdot\|$ é uma norma do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1 (Existência e unicidade)**.** *Seja o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)) \\ \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \tag{1.2.7}$$

onde $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua em t e satisfaz a Condição de Lipschitz em y. Nestas condições, existe uma única solução para o p.v.i. (1.2.7).

A demonstração do teorema de existência e unicidade de solução do Problema de Cauchy pode ser encontrada em Butcher [5]. Note que verificar as condições que garantem a existência e unicidade de solução não implica em encontrar a solução exata propriamente dita. Pode-se, em alguns casos, mostrar a desigualdade de Lipschitz (1.2.6) empregando-se do Teorema do Valor Médio [14], mas isto apenas determina um valor para L, a constante de Lipschitz, como ilustra o Exemplo (1.1).

Exemplo 1.1 (Constante de Lipschitz)**.** *Sejam*

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(t, y);\ 1 \leq t \leq 2,\ y \in \mathbb{R}\} e \\ f(t, y) &= t|y|. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} ||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| &= ||\, t|y_1| - t|y_2|\, || \\ &= |t|\ ||\, |y_1| - |y_2|\, || \\ &\leq 2||y_1 - y_2||. \end{aligned}$$

Portanto, $f(t, y)$ satisfaz a Condição de Lipschitz com constante $L = 2$.

Quando $f\,(t, y(t))$ é contínua, o Problema de Cauchy (1.1.5) também pode ser colocado em uma *forma integral*, ou seja,

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{1.2.8}$$

A forma (1.2.8) é obtida aplicando-se o Teorema Fundamental do Cálculo a (1.1.5).

Outro resultado importante, que pode ser encontrados em livros clássicos de equações diferenciais (e.g. [10]), diz respeito à dependência contínua da solução em relação a condição inicial. Mais precisamente, considerando o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b] \\ y(a) = s \end{cases}, \tag{1.2.9}$$

sob as mesmas hipóteses para f do teorema de existência e unicidade, e portanto com solução única denotada por $y(t; s)$, temos que

$$\|y(t; s_1) - y(t, s_2)\| \leq e^{L(t-a)} \|s_1 - s_2\|, \tag{1.2.10}$$

para $t \in [a, b]$. Consequentemente, as soluções dos p.v.i., únicas para cada s, variam continuamente com as condições iniciais (s).

1.3 Solução do Problema de Cauchy

Em algumas situações especiais é possível determinar a solução exata da equação diferencial sendo considerada. Existem várias técnicas para tal como a *separação de variáveis* e o uso de *fatores de integração*, dentre outras. Contudo são pouquíssimas as equações para as quais se sabe que tais técnicas podem ser empregadas.

Exemplo 1.2. *Solucione o p.v.i.*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) = 3ty(t), \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}. \tag{1.3.11}$$

Em (1.3.11), tem-se uma equação diferencial ordinária linear, de primeira ordem, homogênea.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= 3ty(t) \\ \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} y(t) &= 3t \\ \int \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} y(t) dt &= \int 3t dt \\ ln|y(t)| &= \frac{3}{2} t^2 + C_1 \\ y(t) &= C e^{\frac{3}{2} t^2} \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Usando a condição inicial em (1.3.12), tem-se que

$$y(0) = C \Rightarrow C = 1.$$

Logo,

$$\boxed{y(t) = e^{\frac{3}{2} t^2}.} \tag{1.3.13}$$

Exemplo 1.3. *Analise a existência e unicidade do p.v.i.*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = 3(y(t))^{2/3}, \quad t > 0 \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}. \tag{1.3.14}$$

Primeiro note que $y(t) = 0$ é solução do p.v.i. Além disso, o p.v.i. (1.3.14) pode ser resolvido pelo método da separação de variáveis para obtermos que $y(t) = t^3$ também é solução do problema. Verifique que $f(t, y) = 3(y(t))^{2/3}$ não é Lipschitz na variável y em $t = 0$, e portanto não podemos usar o Teorema da Existência e Unicidade 1.1.

Exemplo 1.4. *Solucione o p.v.i.*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = 2y(t) + e^{3t}, \quad t > 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}. \tag{1.3.15}$$

Em (1.3.15), tem-se uma equação diferencial ordinária linear, de primeira ordem, não homogênea.
Fator integrante: $e^{\int -2dt} = e^{-2t}$

$$\begin{aligned} e^{-2t}\left[\frac{d}{dt}y(t) - 2y(t)\right] &= e^{-2t}e^{3t} \\ e^{-2t}\frac{d}{dt}y(t) - 2e^{-2t}y(t) &= e^{t} \\ \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}y(t)\right] &= e^{t} \\ \int \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}y(t)\right]dt &= \int e^{t}dt \\ e^{-2t}y(t) &= e^{t} + C \\ y(t) &= e^{3t} + Ce^{2t} \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Usando a condição inicial em (1.3.16), tem-se que

$$y(0) = 1 + C \Rightarrow C = 0.$$

Logo,

$$\boxed{y(t) = e^{3t}.} \tag{1.3.17}$$

Exemplo 1.5. *Reescreva o p.v.i.*

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0, \quad t > 0 \\ y(0) = k_1 \\ y'(0) = k_2 \end{cases} \tag{1.3.18}$$

como um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.
Convenções:

$$y(t) = y_1(t); \quad y'(t) = y_1'(t) = y_2(t); \quad y''(t) = y_2'(t). \tag{1.3.19}$$

Substituindo (1.3.19) em (1.3.18), tem-se que:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -2y_2(t) + 3y_1(t) \\ y_1(0) = k_1 \\ y_2(0) = k_2 \end{cases}.$$

1.3.1 Exercícios

Exercício 1.1. *Verifique que a solução (1.3.13) satisfaz de fato o p.v.i. (1.3.11).*

Exercício 1.2. *Verifique que a solução (1.3.17) satisfaz de fato o p.v.i. (1.3.15).*

Exercício 1.3. *Obtenha (1.0.4) a partir de (1.0.2) e (1.0.3).*

Exercício 1.4. *Reescreva o modelo (1.0.4) como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.*
Sugestão: Use $y_1(t) = g(t)$ *e* $y_2(t) = \dfrac{d}{dt}g(t)$.

1.4 Discretização do Problema de Cauchy

Com as técnicas matemáticas conhecidas, pode-se determinar a solução exata de um pequeno número de equações diferenciais. Para a esmagadora maioria é possível apenas calcular soluções aproximadas. Contudo, estas não podem ser determinadas em todos os pontos do domínio. Isto é fácil de entender quando se pensa nas restrições impostas pelo uso do computador, tais como aritmética de ponto flutuante e limitações de tempo e memória.

Ao solucionar numericamente o Problema de Cauchy (1.1.5), objetiva-se determinar uma aproximação da solução exata em um *conjunto discreto finito de pontos* definido por

$$a = t_0,\, t_1 = t_0 + \Delta t_1,\, t_2 = t_1 + \Delta t_2, \cdots, b = t_n = t_{n-1} + \Delta t_n,$$

onde cada Δt_k, $1 \leq k \leq n$, denota o *passo de integração* necessário para ir de t_{k-1} a t_k. A menos de menção em contrário, adotar-se-á neste texto um passo de integração uniforme, isto é,

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \cdots = \Delta t_n = \Delta t = h = \frac{b-a}{n},$$
$$t_k = a + k\Delta t = a + kh,$$

onde n é o número de partições uniformes efetuadas no intervalo $[a, b]$. Uma vez obtida a solução aproximada nos pontos t_k, pode-se utilizar as técnicas de interpolação polinomial, aproximação de funções por splines ou pelo método dos mínimos quadrados [3, 11, 21, 24, 25, 26] para se obter uma aproximação contínua válida em todo o intervalo de estudo.

A discretização do Problema de Cauchy não é única, podendo ser obtida pela expansão da solução exata $y(t)$ em Série de Taylor, pela integração numérica da equação integral, por extrapolação e por interpolação. Para ilustrar a primeira dessas abordagens para a discretização do Problema de Cauchy, considere sua forma diferencial (1.1.5) com $y : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supondo que a solução $y(t)$ seja única e que tenha pelo menos m derivadas contínuas, pode-se escrever seu polinômio de Taylor com resto de Lagrange

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hy^{(1)}(t_k) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(t_k) + \cdots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(\xi), \tag{1.4.20}$$

para algum ponto ξ, $t_k < \xi < t_{k+1}$. Lembrando que $y(t_k+h) = y(t_{k+1})$, reescreve-se (1.4.20) como

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = y^{(1)}(t_k) + \frac{h}{2!}y^{(2)}(t_k) + \cdots + \frac{h^{m-1}}{m!}y^{(m)}(\xi)\,. \tag{1.4.21}$$

Para valores de h suficientemente pequenos, é razoável truncar a expansão (1.4.21) no primeiro termo do lado direito da igualdade. A aproximação que se obtém define o Método de Euler:

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} \approx y^{(1)}(t_k) = f(t_k, y(t_k))\,. \tag{1.4.22}$$

Método 1.1 (Euler Explícito)**.**

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h\,\Phi(t_k, y_k, h) \end{cases} \tag{1.4.23}$$

com $t_{k+1} = t_k + h, \quad 0 \le k \le n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n} \quad e \quad \Phi(t_k, y_k, h) = f\,(t_k, y_k).$

No Método de Euler, calcula-se a aproximação y_{k+1} da solução no instante t_{k+1} conhecendo-se apenas o valor da aproximação no instante de tempo t_k imediatamente anterior. Métodos numéricos com esta propriedade são denominados de *métodos de passo único* ou *métodos de um passo*, traduções livres dos termos *single step methods* e *one step methods*, respectivamente. Além disso, o Método de Euler é um *método explícito*, isto é, não é necessário solucionar qualquer tipo de equação algébrica para se determinar a aproximação y_{k+1}. Tal aproximação, neste caso, pode ser calculada diretamente pela soma das parcelas do lado direito de (1.4.23).

Geometricamente, o Método de Euler (1.4.23) fornece a aproximação y_{k+1} por meio da reta tangente à curva que define a solução exata. A equação da reta tangente ao gráfico da solução exata no ponto (t_0, y_0) é dada por

$$r(t) - y_0 = (t - t_0)y'(t_0) = (t - t_0)f(t_0, y_0).$$

Quando $t = t_0 + h = t_1$, tem-se que $r(t_0 + h) = y_0 + h\,f(t_0, y_0) = y_1$. A Figura (1.1) ilustra a interpretação geométrica.

Outros exemplos que se enquadram na classe dos métodos de passo único são o Método de Euler Implícito, o Método de Euler Aprimorado e o Método do Trapézio, descritos a seguir.

Método 1.2 (Euler Implícito)**.**

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h\,\Phi(t_k, y_{k+1}, h) \end{cases} \tag{1.4.24}$$

com $t_{k+1} = t_k + h, \quad 0 \le k \le n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n} \quad e$

$$\Phi(t_k, y_{k+1}, h) = f(t_k + h, y_{k+1}).$$

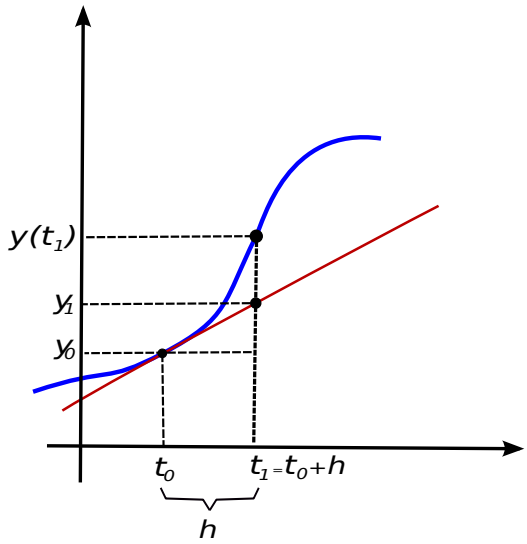

Figura 1.1: Interpretação geométrica do Método de Euler: solução exata (curva) e solução aproximada (reta).

Método 1.3 (Euler Aprimorado, do Trapézio explícito ou de Heun)**.**

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h\,\Phi(t_k, y_k, h) \end{cases} \tag{1.4.25}$$

com $t_{k+1} = t_k + h, \quad 0 \le k \le n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \quad \Phi(t_k, y_k, h) = \dfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ *e*

$$\begin{cases} \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + h, y_k + h\,\kappa_1) \end{cases}.$$

Método 1.4 (Trapézio Implícito)**.**

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0) \\ y_{k+1} &= y_k + h\,\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) \end{cases} \tag{1.4.26}$$

com $t_{k+1} = t_k + h, \quad 0 \le k \le n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}$ *e*

$$\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) = \frac{1}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_{k+1})\right).$$

O Método de Euler Aprimorado (1.4.25), assim como o Método de Euler (1.4.23), é um método explícito. Já nos Métodos de Euler Implícito (1.4.24) e do Trapézio

(1.4.26), para avançar a solução no tempo, é necessário solucionar uma equação algébrica cuja incógnita é y_{k+1}. Por exemplo, se $f(t,y) = \sin(y + \pi t)$, reescreve-se o Método do Trapézio (1.4.26) como

$$y_{k+1} - \frac{h}{2}\sin(y_{k+1} + \pi t_{k+1}) \quad = \quad y_k + \frac{h}{2}\sin(y_k + \pi t_k). \tag{1.4.27}$$

Em (1.4.27), para cada instante de tempo é necessário empregar um método como o de Newton [3, 11, 21, 24] para determinar a raiz y_{k+1}. Um método como o Método de Euler Implícito ou o Método do Trapézio é chamado *método implícito*.

Exemplo 1.6. *Considere o Problema de Cauchy dado por*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = e^{2t}y(t), \quad t \in [0,1], \\ \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1.4.28}$$

Pedem-se:

1. *Discretize-o usando o Método de Euler;*
2. *Calcule a solução aproximada para a partição $h_1 = 1/2$;*
3. *Sabendo que a solução exata é*

$$y(t) = e^{\frac{e^{2t}-1}{2}}$$

calcule o erro absoluto, $E_A(t) = y(t) - y_2$, em $t = 1$.

<u>*Solução:*</u>

1.

$$\begin{cases} y(0) & = & 1 \\ y_{k+1} & = & y_k + h\,\Phi(t_k, y_k, h) \end{cases}$$

$t_{k+1} = t_k + h$, $0 \le k \le n-1$, $h = 1/n$ *e* $\Phi(t_k, y_k, h) = e^{2t_k}y_k$. *Aplicação:*

$$k = 0 \Rightarrow y_1 = \left(1 + he^{2t_0}\right) y_0$$

$$k = 1 \Rightarrow y_2 = \left(1 + he^{2t_1}\right) y_1$$

$$k = 2 \Rightarrow y_3 = \left(1 + he^{2t_2}\right) y_2$$

$$\vdots$$

$$y_{k+1} = \left(1 + he^{2t_k}\right) y_k$$

2. *Para $h = 1/2$, tem-se*

$$k = 0 \Rightarrow y_1 \quad = \quad \left(1 + \frac{1}{2}e^0\right)(1) = \frac{3}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow y_2 \quad = \quad \left(1 + \frac{1}{2}e^1\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}(e+2) \approx 3,539$$

3. $E_A(1) = y(1) - y_2 = e^{\frac{e^2-1}{2}} - 3,539 = 24,399 - 3,539.$

Em uma outra abordagem, empregam-se na discretização do Problema de Cauchy técnicas de quadratura numérica ao invés de expansões em Série de Taylor. Essa abordagem é uma das formas naturais de se obter *métodos de passo múltiplo* (*multistep methods*). Nestes, para determinar y_{k+1}, devem-se conhecer aproximações da solução em p instantes anteriores y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, ..., y_{k-p+1}. São por este motivo conhecidos também como *métodos de p-passos*. Como exemplo, apresentam-se a seguir os Métodos de Adams-Bashforth e de Adams-Moulton de quatro passos.

Método 1.5 (Adams-Bashforth)**.**

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0)\,, \quad y_p \ \textit{pré-determinado}\,, \ 1 \le p \le 3 \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) \end{cases} \tag{1.4.29}$$

com $3 \le k \le n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \quad f_{k-m} = f(t_{k-m}, y_{k-m}) \quad e \quad 0 \le m \le 3.$

Método 1.6 (Adams-Moulton)**.**

$$\begin{cases} y_0 &= y(t_0)\,, \quad y_p \ \textit{pré-determinado}\,, \ 1 \le p \le 3 \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{720}(251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3}) \end{cases} \tag{1.4.30}$$

com $3 \le k \le n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \quad f_{k-m} = f(t_{k-m}, y_{k-m}) \quad e \quad -1 \le m \le 3.$

O método (1.4.29) é apenas um dos muitos métodos pertencentes à classe dos métodos de Adams-Bashforth. Todos eles são explícitos e envolvem um número maior ou menor de passos no tempo. O mesmo se pode dizer do método (1.4.30), com a diferença de que é um método implícito.

Nos métodos de passo múltiplo são necessárias as aproximações da solução em alguns dos instantes iniciais. Por exemplo, para empregar (1.4.29) tem que se conhecer as aproximações y_1, y_2 e y_3, além da condição inicial y_0. Estas aproximações podem ser determinadas aplicando-se um método de passo único.

O Método de Simpson, outro método de passo múltiplo, pode ser obtido através da forma integral (1.2.8) do Problema de Cauchy. Considerando o intervalo de tempo $t_{k-1} \le t \le t_{k+1}$, chega-se a

$$y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{d}{ds} y(s)\, ds = \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f(s, y(s))\, ds. \tag{1.4.31}$$

Aplicando-se quadratura numérica [3, 11, 21, 24], aproxima-se a integral em (1.4.31) pelo Método de Simpson. Dessa maneira, integra-se o polinômio de segundo grau $p_2(s)$ que interpola $f(s, y(s))$ nos pontos s_{n-1}, s_n e s_{n+1}. O polinômio $p_2(s)$ é escrito na forma de Lagrange como

$$\begin{aligned} p_2(s) &= f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))L_{k+1}(s) \\ &\quad + f(t_k, y(t_k))L_k(s) + f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))L_{k-1}(s), \end{aligned} \tag{1.4.32}$$

onde $L_j(s)$ são os polinômios de Lagrange

$$L_j(s) \quad = \quad \Pi_{i=k-1}^{k+1} \frac{s-t_i}{t_j-t_i}\,, \quad i \neq j\,, \tag{1.4.33}$$

para $j = k-1$, k e $k+1$.

Substituindo-se (1.4.33) em (1.4.32) e admitindo-se um passo de integração constante no tempo, chega-se a

$$\begin{aligned} p_2(s) \quad &= \quad f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))\,\frac{(s-t_{k-1})(s-t_k)}{2h^2} - f(t_k, y(t_k))\,\frac{(s-t_{k-1})(s-t_{k+1})}{h^2} \\ &+ \quad f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))\,\frac{(s-t_k)(s-t_{k+1})}{2h^2}, \end{aligned} \tag{1.4.34}$$

o qual é integrado no intervalo $[t_{k-1}, t_{k+1}]$. Como resultado, tem-se o Método de Simpson

$$y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}) \quad \approx \quad \frac{h}{3}\left[f(t_{k+1}, y(t_{k+1})) + 4f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))\right], \tag{1.4.35}$$

um método de dois passos implícito.

Método 1.7 (Simpson Implícito)**.**

$$\begin{cases} y_0 \quad = \quad y(t_0)\,, \quad y_1 \ \textit{pré-determinado} \\ y_{k+1} \quad = \quad y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}) \end{cases} \tag{1.4.36}$$

com $\quad 1 \leq k \leq n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \quad f_{k-m} = f(t_{k-m}, y_{k-m}) \quad$ *e* $\quad -1 \leq m \leq 1.$

Exemplo 1.7. *Discretize o Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = \sin(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando:

1. *o Método de Euler Aprimorado (1.4.25);*

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[\sin(y_k) + \sin\left(y_k + h\sin(y_k)\right)\right] \end{cases}$$

2. *o Método do Trapézio (1.4.26).*

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(\sin(y_k) + \sin(y_{k+1})\right) \end{cases}$$

1.4.1 Exercícios

Exercício 1.5. *Discretize o p.v.i.* $y' = y\,, y(0) = 1$, *com* $t \in [0,1]$ *e* $y(t) \in \mathbb{R}$, *usando o Método de Euler e o Euler Aprimorado. Escreva um algoritmo (ou um programa em linguagem C [15, 20, 25] ou Fortran [26]) que forneça a solução aproximada* y_{k+1} *dados* t_0, t_{final}, n *e* $y(t_0)$. *Prepare um arquivo de saída do tipo*

$$\begin{array}{ll} t_0 & y_0 \\ t_1 & y_1 \\ \vdots & \\ t_n & y_n \end{array}$$

que será utilizado para traçar o gráfico da solução aproximada.

Exercício 1.6. *Discretize o problema do exercício anterior utilizando o Método de Adams-Bashforth (1.4.29).*

Exercício 1.7. *Empregue o Método do Trapézio*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_0 & = & y(t_0) \\ y_{k+1} & = & y_k + h\,\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) \end{array} \right.$$

com $t_{k+1} = t_k + h, \quad 0 \le k \le n-1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}, \quad$ *e*

$$\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) = \frac{1}{2}\left(f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_k + h, y_{k+1}\right)\right)$$

para discretizar o modelo biológico presa-predador definido por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 1,2x - x^2 - \dfrac{xy}{x+0,2} \\ \dot{y} & = & \dfrac{1,5xy}{x+0,2} - y \end{array} \right. .$$

1.5 Suplemento teórico

Apresentamos aqui alguns resultados clássicos de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais facilmente encontrados na maioria dos livros texto do assunto (e.g. [12, 22, 10]).

Teorema 1.2 (Teorema do Valor Médio)**.** *Se* $f(t)$ *for uma função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* $]a,b[$ *então existirá pelo menos um* c *em* $]a,b[$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Definição 1.3 (Conjunto convexo)**.** *Um conjunto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *é convexo se e somente se para quaisquer pontos* (t_1, y_1) *e* (t_2, y_2) *pertencentes a* D *o ponto*

$$\left((1-\lambda)\,t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)\,y_1 + \lambda y_2\right)$$

também pertence a D *para todo* $\lambda \in [0,1]$.

Teorema 1.3. *Se $f(t,y)$ for definida em um conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$ e se existir uma constante $L > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\right| \leq L \ \forall \ (t,y) \in D,$$

então $f(t,y)$ satisfaz a Condição de Lipschitz em D na variável y com constante de Lipschitz L.

Definição 1.4. *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a,b] \\ \\ y(a) = \alpha \end{cases} \tag{1.5.37}$$

é dito bem posto se e somente se:

1. *Existir uma única solução $y(t)$;*
2. *$\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ \kappa(\epsilon) > 0$ com a propriedade de que, sempre que $|\epsilon_0| < \epsilon$ e $\delta(t)$ for contínua com $|\delta(t)| < \epsilon$ em $[a,b]$, a solução única $z(t)$ para o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z(t) = f(t, z(t)) + \delta(t), \quad t \in [a,b] \\ \\ z(a) = \alpha + \epsilon_0 \end{cases} \tag{1.5.38}$$

existe com

$$|z(t) - y(t)| < \kappa(\epsilon)\epsilon, \ \forall \ t \in [a,b].$$

O problema de valor inicial (1.5.38) é chamado *problema perturbado* associado ao problema de valor inicial original (1.5.37).

Teorema 1.4 (Problema de valor inicial bem posto)**.** *Seja $D = \{(t,y) | \, a \leq t \leq b$ e $y \in (-\infty, \infty)\}$. Se $f(t,y)$ for uma função contínua que satisfaz a Condição de Lipschitz na variável y em D então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) = f(t, y(t)) \\ \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

é bem posto.

Teorema 1.5 (Teorema de Picard). *Se $f(t,y)$ for contínua e de Lipschitz em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t-t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{y; |y-y_0| \leq b\}$, e se satisfizer $||f(t,y)|| \leq M$ em Ω então existe uma única solução de*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

em I_α, onde $\alpha = min\{a, \frac{b}{M}\}$.

A demonstração do Teorema de Picard pode ser encontrada em Doering [8] e em Sotomayor [22].

Teorema 1.6 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se $f(x)$ for contínua em $[a,b]$ então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, isto é, $F(x)$ é uma função tal que $F^{'}(x) = f(x)$.

1.5.1 Fórmula de Taylor de uma função de uma variável

Seja f derivável até ordem n no intervalo I e seja $t_0 \in I$. O polinômio

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k \tag{1.5.39}$$

denomina-se polinômio de Taylor de ordem n, de f, em torno de t_0. Se f tiver $n+1$ derivadas então

$$f(t) = p_n(t) + R_n(t), \tag{1.5.40}$$

onde $R_n(t)$ é o resto (de Lagrange) o qual tem a forma

$$R_n(t) = f(t) - p_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1},$$

com ε pertencente ao intervalo formado por t_0 e t.

Considerando-se $n = 0$ em (1.5.40), tem-se que

$$f(t) = f(t_0) + R_0(t) = f(t_0) + f'(\varepsilon)(t-t_0), \tag{1.5.41}$$

ou seja,

$$f(t) - f(t_0) \quad = \quad f'(\varepsilon)(t-t_0), \tag{1.5.42}$$

que é exatamente o que afirma o Teorema do Valor Médio.

1.5.2 Fórmula de Taylor de uma função de duas variáveis

Seja $f(t,y)$ uma função de classe C^{n+1} definida num conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$ a valores reais e sejam (t_0, y_0) e (t_0+h, y_0+k), $h \neq 0$, $k \neq 0$, pontos tais que o segmento que os une esteja completamente contido em Ω. Nestas condições,

$$\begin{aligned} f(t_0+h, y_0+k) &= f(t_0,y_0) + \\ &+ \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!}\Big[\sum_{p=0}^{r} \frac{r!}{p!(r-p)!}\frac{\partial^r f}{\partial t^{(r-p)}\partial y^p}(t_0,y_0)\, h^{(r-p)}k^p\Big] + \\ &+ R_n(h,k), \end{aligned} \tag{1.5.43}$$

onde

$$R_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{p=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\frac{\partial^{(n+1)} f}{\partial t^{(n+1-p)}\partial y^p}(\zeta,\eta)\, h^{(n+1-p)}k^p$$

para algum $\zeta \in [t_0, t_0+h]$ e $\eta \in [y_0, y_0+k]$.

Corriqueiramente, será necessário o desenvolvimento acima para $n=2$ na teoria a ser apresentada nos capítulos a seguir. Em tal caso, a Fórmula de Taylor assume a forma

$$\begin{aligned} f(t_0+h, y_0+k) &= f(t_0,y_0) + \Big[\frac{\partial}{\partial t}f(t_0,y_0)\,h + \frac{\partial}{\partial y}f(t_0,y_0)\,k\Big] + \\ &+ \Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t_0,y_0)\,\frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^2}{\partial t\partial y}f(t_0,y_0)\,hk + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(t_0,y_0)\,\frac{k^2}{2!}\Big] + \\ &+ R_2(\zeta,\eta). \end{aligned}$$

1.6 Exercícios resolvidos

Exercício Resolvido 1.1. *Mostre que o Método de Euler é um método linear explícito e de passo único.*

Solução:

O Método de Euler pode ser reescrito como

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k,y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + hf_k \Rightarrow \underbrace{y_{k+1} - y_k - hf_k}_{F(y_k, y_{k+1}, f_k)} = 0,$$

com

$$F(y_k, y_{k+1}, f_k) = y_{k+1} - y_k - hf_k.$$

O operador F, acima, define o Método de Euler. Para mostrar que o método é linear, basta mostrar que o operador F é linear. Assim sendo, deve-se verificar que

$$F(y_k + \alpha\tilde{y}_k, y_{k+1} + \alpha\tilde{y}_{k+1}, f_k + \alpha\tilde{f}_k) = F(y_k, y_{k+1}, f_k) + \alpha F(\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{f}_k).$$

$$
\begin{aligned}
F(y_k + \alpha\tilde{y}_k, y_{k+1} + \alpha\tilde{y}_{k+1}, f_k + \alpha\tilde{f}_k) &= \\
&= y_{k+1} + \alpha\tilde{y}_{k+1} - y_k - \alpha\tilde{y}_k - hf_k - \alpha h\tilde{f}_k \\
&= y_{k+1} - y_k - hf_k + \alpha\tilde{y}_{k+1} - \alpha\tilde{y}_k - \alpha h\tilde{f}_k \\
&= y_{k+1} - y_k - hf_k + \alpha(\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k - h\tilde{f}_k) \\
&= F(y_k, y_{k+1}, f_k) + \alpha F(\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{f}_k).
\end{aligned}
$$

Portanto, o Método de Euler é linear. Tem-se ainda que:

- *O método é explícito porque Φ, sua função de discretização, não depende de y_{k+1};*
- *Ele é de passo único pois para calcular a aproximação no instante t_{k+1} são necessárias somente as informações do instante imediatamente anterior, t_k.*

Exercício Resolvido 1.2. *Seja*

$$\ddot{x}(t) + 0,12\dot{x}(t) + 2x(t) = 0 \tag{1.6.44}$$

com condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

(a) Reescreva (1.6.44) como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem;

(b) Discretize o sistema obtido no item (a) usando o Método de Euler.

Solução:

(a) Convenções adotadas:

$$y_1(t) = x(t) \Rightarrow \dot{y}_1(t) = \dot{x}(t), \tag{1.6.45}$$

$$y_2(t) = \dot{y}_1(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{y}_2(t) = \ddot{x}(t). \tag{1.6.46}$$

Substituindo-se (1.6.45) e (1.6.46) em (1.6.44), obtém-se:

$$\dot{y}_2(t) + 0,12y_2(t) + 2y_1(t) = 0 \Rightarrow \dot{y}_2(t) = -0,12y_2(t) - 2y_1(t). \tag{1.6.47}$$

Assim, tem-se o sistema de EDOs a seguir.

$$\boxed{\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -0,12y_2(t) - 2y_1(t) \end{cases}} \tag{1.6.48}$$

Como

$$x(0) = 1 \Rightarrow y_1(0) = 1 \ \text{ e } \ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow y_2(0) = 0, \tag{1.6.49}$$

os dados iniciais do sistema (1.6.48) são

$$\boxed{\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}}. \tag{1.6.50}$$

(b) Discretização do sistema de EDOs pelo Método de Euler.

$$\begin{bmatrix} y_1^{k+1} \\ y_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{k} \\ y_2^{k} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_2^{k} \\ -0,12y_2^{k} - 2y_1^{k} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} y_{1,k+1} \\ y_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_{2,k} \\ -0,12y_{2,k} - 2y_{1,k} \end{bmatrix}.$$

Exercício Resolvido 1.3. *Obtenha o Método do Trapézio*

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), \\ y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h), \quad t_{k+1} = t_k + h, \quad 0 \le k \le n-1, \end{cases}$$

$$\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) = \frac{1}{2}\left(f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_{k+1}, y_{k+1}\right)\right),$$

usando quadratura numérica partindo da forma integral do Problema de Cauchy.
Solução:

Da forma integral do Problema de Cauchy,

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,y)ds, \tag{1.6.51}$$

inicialmente aproxima-se $f(s,y)$ pelo polinômio interpolador de Lagrange de primeiro grau nos pontos t_k e t_{k+1}. Depois disso, integra-se esse polinômio no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Para simplificar, denota-se $f(t_k, y(t_k))$ por f_k.

Pontos de interpolação: (t_k, f_k), (t_{k+1}, f_{k+1}).

$$\begin{aligned} p_1(s) &= f_k L_k(s) + f_{k+1} L_{k+1}(s) \\ &= f_k \frac{s - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} + f_{k+1} \frac{s - t_k}{t_{k+1} - t_k} \\ &= -\frac{f_k}{h}(s - t_{k+1}) + \frac{f_{k+1}}{h}(s - t_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_1(s)ds &= -\frac{f_k}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k+1})ds + \frac{f_{k+1}}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k)ds \\ &= -\frac{f_k}{h}\left[\frac{s^2 - 2st_{k+1}}{2}\right]_{t_k}^{t_{k+1}} + \frac{f_{k+1}}{h}\left[\frac{s^2 - 2st_k}{2}\right]_{t_k}^{t_{k+1}} \\ &= \frac{f_k}{h}\left[\frac{t_{k+1}^2 - 2t_k t_{k+1} + t_k^2}{2}\right] + \frac{f_{k+1}}{h}\left[\frac{t_{k+1}^2 - 2t_k t_{k+1} + t_k^2}{2}\right] \\ &= \frac{f_k}{2h}(t_{k+1} - t_k)^2 + \frac{f_{k+1}}{2h}(t_{k+1} - t_k)^2 \\ &= \frac{f_k}{2h}h^2 + \frac{f_{k+1}}{2h}h^2 \\ &= h\left[\frac{1}{2}\left(f_k + f_{k+1}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.6.52}$$

Substituindo-se (1.6.52) em (1.6.51), tem-se que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\left[\frac{1}{2}\left(f_k + f_{k+1}\right)\right] \\ &= y_k + h\underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right)\right]}_{\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h)} \\ &= y_k + h\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h). \end{aligned}$$

Portanto, o método do Trapézio é definido por

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h)$$

onde

$$\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) = \frac{1}{2}\left(f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_{k+1}, y_{k+1}\right)\right).$$

Note que o nome do método é herdado da técnica de quadratura empregada, o Método do Trapézio.

Exercício Resolvido 1.4. *Obtenha o Método de Simpson*

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), \\ y_{k+2} = y_k + \dfrac{h}{3}(f_{k+2} + 4f_{k+1} + f_k), \quad t_{k+1} = t_k + h, \quad 0 \le k \le n-1, \end{cases}$$

$$f_{k+i} = f(t_{k+i}, y_{k+i}), \quad i = 0, 1, 2,$$

usando quadratura numérica partindo da forma integral do Problema de Cauchy.
Solução:

Da forma integral do Problema de Cauchy,

$$y_{k+2} - y_k = \int_{t_k}^{t_{k+2}} f(s, y)ds. \tag{1.6.53}$$

Aproxima-se $f(s, y)$ em (1.6.53) pelo polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 nos pontos t_k, t_{k+1} e t_{k+2}, sendo estes igualmente espaçados. Feito isso, integra-se no intervalo $[t_k, t_{k+2}]$ o polinômio obtido.

Pontos de interpolação: (t_k, f_k), (t_{k+1}, f_{k+1}), (t_{k+2}, f_{k+2}).

$$\begin{aligned} p_2(s) &= f_k L_k(s) + f_{k+1}L_{k+1}(s) + f_{k+2}L_{k+2}(s) \\ &= f_k \frac{(s - t_{k+1})(s - t_{k+2})}{(t_k - t_{k+1})(t_k - t_{k+2})} + \\ &+ f_{k+1}\frac{(s - t_k)(s - t_{k+2})}{(t_{k+1} - t_k)(t_{k+1} - t_{k+2})} + \\ &+ f_{k+2}\frac{(s - t_k)(s - t_{k+1})}{(t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} - t_{k+1})} \\ &= \frac{f_k}{2h^2}(s - t_{k+1})(s - t_{k+2}) + \\ &- \frac{f_{k+1}}{h^2}(s - t_k)(s - t_{k+2}) + \\ &+ \frac{f_{k+2}}{2h^2}(s - t_k)(s - t_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+2}} p_2(s)ds &= \frac{f_k}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+2}}(s-t_{k+1})(s-t_{k+2})ds + \\
&- \frac{f_{k+1}}{h^2}\int_{t_k}^{t_{k+2}}(s-t_k)(s-t_{k+2})ds + \\
&+ \frac{f_{k+2}}{2h^2}\int_{t_k}^{t_{k+2}}(s-t_k)(s-t_{k+1})ds \qquad (1.6.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+2}} p_2(s)ds &= \frac{f_k}{2h^2}\frac{2h^3}{3} + \frac{f_{k+1}}{h^2}\frac{4h^3}{3} + \frac{f_{k+2}}{2h^2}\frac{2h^3}{3} \qquad (1.6.55) \\
&= \frac{f_k h}{3} + \frac{4f_{k+1}h}{3} + \frac{f_{k+2}h}{3} \\
&= \frac{h}{3}\left(f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}\right) \qquad (1.6.56)
\end{aligned}$$

Observação: *A passagem de (1.6.54) para (1.6.55) não é trivial. Ela exige considerável manipulação algébrica. Você consegue propor uma substituição adequada que simplifique essa manipulação algébrica?*

Substituindo-se (1.6.56) em (1.6.53), obtém-se o Método de Simpson

$$\boxed{y_{k+2} = y_k + \frac{h}{3}\left(f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}\right)}.$$