Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

MAP5725 - Tratamento Numérico de Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Dr. Alexandre Megiorin Roma

Verão 2009

Versão de 4 de janeiro de 2009

1. Considere o Problema de Cauchy, também chamado de Problema de Valor Inicial, **(PVI)**:

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

Teorema 1. *Seja $f(x,y)$ uma função contínua definida para todos os pontos (x,y) do conjunto*

$$\Omega = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \ , \ -\infty < y < \infty\}$$

com a e b finitos. Se existir uma constante $L > 0$, tal que, para todo x, y_1 e y_2 e para todo par (x,y_1) e (x,y_2) em Ω,

$$||f(x,y_1) - f(x,y_2)|| \leq L||y_1 - y_2|| \quad (*)$$

então, existe uma única função $y(x)$, com $y(x_0)= y_0$, contínua e diferenciável que é solução do PVI para todo par (x,y) em Ω.
$(*)$ Esta condicão é conhecida como condição de Lipschitz, a constante L é chamada de constante de Lipschitz. Acima, diz-se que a função $f(x,y)$ satisfaz a condição de Lipschitz na variável y.

Considere os seguintes PVI's:

$$\begin{cases} y' & = & ycos(x) \\ y(0) & = & 1 \\ \Omega & = & \{(x,y) \ \mid \ 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' & = & x^2 y \\ y(0) & = & 1 \\ \Omega & = & \{(x,y)) \ \mid \ 0 \leq x \leq 2, -\infty < y < \infty\} \end{cases}$$

a. Mostre, utilizando o teorema anterior, que estes PVI's têm uma única solução.

b. Encontre a solução destes PVI's.

2. Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

Teorema 2. *Seja $f(x,y)$ uma função contínua definida para todos os pontos (x,y) do conjunto convexo* (**)

$$\Omega = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \ , \ -\infty < y < \infty\}$$

com a e b finitos. Se existir uma constante $L > 0$, onde

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \leq L, \quad \text{para todo } (x,y) \in \Omega$$

então f satisfaz a condição de Lipschitz na variável y em Ω e, portanto, existe uma única função $y(x)$, com $y(x_0) = y_0$, contínua e diferenciável que é solução do PVI para todo par (x,y) em Ω.
(**) Diz-se que um conjunto Ω é convexo, se e somente se, dados dois pares (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em Ω, o par $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ pertence a Ω, para todo $\lambda \in [0,1]$.

Considere os seguintes PVI's:

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \\ \Omega &= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= y - x^2 + 1 \\ y(0) &= 0.5 \\ \Omega &= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, -\infty < y < \infty\} \end{cases}$$

a. Mostre, utilizando o teorema anterior, que estes PVI's têm uma única solução.

b. Encontre a solução destes PVI's.

3. Utilizando o Método de Diferenças Finitas, escreva uma discretização com ordem de aproximação $O(h^2)$ e monte o sistema de equações correspondente com o passo $h = 0.2$, para os seguintes Problemas de Valor de Contorno, **PVC**:

a.

$$\begin{cases} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1, \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} y'' + xy' + y &= 2x \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 0, \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

OBS. Não precisa resolver o sistema.

4. Mostre todo o desenvolvimento para a obtenção do Método da Série de Taylor de ordens 1, 2 e 3 para o PVI:

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

5. Seja $y(x)$ uma função que tenha derivadas até ordem $n+1$ em x, sua expansão em série de Taylor é dada por:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h}{2!}y''(x) + ... + \frac{h}{n!}y^{(n)}(x) + \frac{h}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi)$$

com $\xi \in (x, x+h)$.

O último termo da expressão anterior, $\frac{h}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi)$, representa o erro local de aproximação de ordem $n+1$, $O(h^{(n+1)})$, de $y(x+h)$ pelos $n+1$ primeiros termos da série de Taylor.

a. Obtenha as fórmulas avançada, atrasada e centrada para discretizar a derivada de primeira ordem, $y'(x)$, apresentando os respectivos erros locais de aproximação.

b. Obtenha uma fórmula, diferente daquelas obtidas no item anterior, para discretizar a derivada de primeira ordem, $y'(x)$, apresentando, também, o seu erro local de aproximação.

c. Obtenha uma fórmula para discretizar a derivada de segunda ordem, $y''(x)$, apresentando seu o erro local de aproximação.

6. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' &= -y + x + 2 \\ y(0) &= 2, \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

a. Verifique que a solução analítica do PVI é $y(x) = e^{-x} + x + 1$.

b. Utilize o Método da Série de Taylor de ordens 1, 2 e 3, com passo $h = 0.1$, para obter uma aproximação para $y(1)$.

c. Construa uma tabela apresentando, para cada passo de integração, os valores das soluções aproximadas e analítica, bem como o valor absoluto do erro global entre as soluções aproximadas e analítica. Comente os resultados.

d. Plote os gráficos das soluções aproximadas e analítica no mesmo sistema de eixos coordenados para o intervalo $x \in [0,1]$.

7. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = y^2 - 9 \\ y(0) = 0, \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(x) = 3(\frac{1-e^{6x}}{1+e^{6x}})$ e os seguintes métodos numéricos:

Método 1 (Método de Euler)**.**

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \qquad t_{k+1} = t_k + h, \end{cases}$$

com $\Phi(t_k, y_k, h) \doteq \kappa_1$ *e*

$$\{ \; \kappa_1 = f(t_k, y_k)$$

onde $0 \leq k \leq n-1$ *e* $h = \frac{b-a}{n}$

Método 2 (Método de Euler Aprimorado)**.**

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \qquad t_{k+1} = t_k + h, \end{cases}$$

com $\Phi(t_k, y_k, h) \doteq \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ *e*

$$\begin{cases} \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + h, y_k + h\kappa_1) \end{cases}$$

onde $0 \leq k \leq n-1$ *e* $h = \frac{b-a}{n}$

Método 3 (Método do Ponto Médio ou Método de Euler Modificado)**.**

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \qquad t_{k+1} = t_k + h, \end{cases}$$

com $\Phi(t_k, y_k, h) \doteq \kappa_2$ *e*

$$\begin{cases} \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_1) \end{cases}$$

onde $0 \leq k \leq n-1$ *e* $h = \frac{b-a}{n}$

a. Aplique os métodos anteriores com passo $h = 0.1$, para obter uma aproximação para $y(1)$.

b. Construa uma tabela apresentando os valores das soluções aproximadas e analítica, bem como o valor absoluto do erro global entre as soluções aproximadas e analítica. Comente os resultados.

c. Plote os gráficos das soluções aproximadas e analítica, no mesmo sistema de eixos coordenados, para o intervalo $x \in [0, 1]$.

8. Escreva a expressão do erro local e mostre analiticamente que para o PVI:

$$\begin{cases} y' & = & f(t, y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

a. O Método de Euler tem ordem de consistência 1.

b. O Método de Euler Aprimorado tem ordem de consistência 2.

c. O Método do Euler Modificado tem ordem de consistência 2.

9. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \quad x \in [0, 1], \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(x) = e^{-x}$ e os seguintes métodos numéricos implícitos:

Método 4 (Método de Euler Implícito)**.**

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k + h, y_{k+1}, h), \qquad t_{k+1} = t_k + h, \end{cases}$$

com $\Phi(t_k + h, y_{k+1}, h) \doteq \kappa_1$ *e*

$$\begin{cases} \kappa_1 = f(t_k + h, y_{k+1}) \end{cases}$$

onde $0 \leq k \leq n-1$ *e* $h = \frac{b-a}{n}$

Método 5 (Método Implícito do Trapézio)**.**

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h), \qquad t_{k+1} = t_k + h, \end{cases}$$

com $\Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h) \doteq \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ *e*

$$\begin{cases} \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + h, y_{k+1}) \end{cases}$$

onde $0 \leq k \leq n-1$ *e* $h = \frac{b-a}{n}$

a. Obtenha uma aproximação para $y(1)$, utilizando os métodos anteriores com passo $h = 0.1$.

b. Construa uma tabela apresentando, para cada passo de integração, os valores das soluções aproximadas e analítica, bem como, o valor absoluto do erro global entre as soluções aproximadas e analítica. Comente os resultados.

c. Plote os gráficos das soluções aproximadas e analítica e aproximadas, no mesmo sistema de eixos coordenados, para o intervalo $x \in [0, 1]$.

10. Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' + \frac{4}{x}y - x^4 = 0 \\ y(1) = 1, \quad x \in [1, 3]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(x) = \frac{8}{9x^4} + \frac{1}{9}x^5$.

a. Obtenha uma aproximação para $y(3)$, utilizando o Método de Euler Explícito. Utilize como passos $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$, para i = 0, ... ,6 e $h_0 = 0.4$

b. Para cada passo de integração, construa uma tabela contendo o valores absolutos dos erros local e global. Observe o comportamento deste dois tipos erro e comente os resultados.

c. No mesmo sistema de eixos coordenados, plote os gráficos do valor absoluto do erro local para cada passo de integração, para o intervalo $x \in [1, 3]$.

d. No mesmo sistema de eixos coordenados, plote os gráficos dos valor absoluto do erro global para cada passo de integração, para o intervalo $x \in [1, 3]$.

11. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} u_1' = 3u_1 + 2u_2 - (2t^2 + 1)e^{2t}, t \in [0, 1], u_1(0) = 1; \\ u_2' = 4u_1 + u_2 + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, t \in [0, 1], u_2(0) = 1; \end{cases}$$

cuja soluções analíticas são:

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t} \\ u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t} \end{cases}$$

a. Aplique o Método Explícito do Ponto Médio para obter aproximações para $u_1(1)$ e $u_2(1)$, com passo $h = 0.1$.

b. Apresente uma tabela contendo, para cada passo de integração, o valor absoluto do erro global entre as soluções aproximada e analítica.

12. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = \frac{-2xy}{1+x^2} \\ y(2) = -5 \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(x) = \frac{-25}{(x^2+1)}$ e o

Método 6 (Método de Heun)**.**

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \qquad t_{k+1} = t_k + h, \end{cases}$$

com $\Phi(t_k, y_k, h) \doteq \frac{1}{4}(\kappa_1 + 3\kappa_2)$ *e*

$$\begin{cases} \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}h\kappa_1) \end{cases}$$

onde $0 \leq k \leq n - 1$ *e* $h = \frac{b-a}{n}$

a. Calcule o valor exato da solução $y_{exato}(3)$.

b. Calcule as aproximações para $y(3)$, indicando-as por $y^i(3)$, com passos de integração $h_i = \frac{h_{i-1}}{2}$, para $i = 1, ..., 5$. Começe calculando $y^0(3)$, com $h_0 = 0.2$.

c. Obtenha a sequência dada por $R_1^i = \frac{||y^i(1)-y^{i-1}(1)||}{||y^{i+1}(1)-y^i(1)||}$, para $i = 1, ..., 4$.

d. Obtenha a sequência dada por $R_2^i = \frac{||y^i(1)-y_{exato}(1)||}{||y^{i+1}(1)-y_{exato}(1)||}$, para $i = 0, ..., 4$.

e. A sequência R_1^i parece convergir para algum número? Em caso afirmativo, explique a relação existente entre este número e ordem de convergência do Método de Heun.

f. As sequências R_1^i e R_2^i convergem para o mesmo número? Isto era esperado? Justifique sua resposta.

13. Considere o PVI de segunda ordem:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = e^{2t}(-cos3t + \frac{4}{3}sen3t)$.

a. Transforme esta equação diferencial em um sistema de equações diferencias de primeira ordem com suas respectivas condições inicias, escrevendo-o, também, em notação matricial.

b. Implemente e valide o Método Explícito do Trapézio e utilize-o para integrar o PVI acima utilizando o passo $h = 0.01$.

c. Plote os gráficos das soluções aproximada e analítica, no mesmo sistema de eixos coordenados, para o intervalo $t \in [0, 1]$.

d. Plote a curva (y, y') para várias condições iniciais, tudo num mesmo gráfico. Escolha condições iniciais de modo que as curvas plotadas sejam representativas. Discuta isso.

14. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = -ytan(t) - \frac{1}{cos(t)} \\ y(0) = 1, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = cos(t) - sin(t)$.

a. Leia sobre a **Extrapolação de Richardson** em alguma bibliografia indicada no curso. Explique em que condições esta extrapolação pode ser empregada e qual a vantagem de se utilizá-la.

b. Calcule o valor exato da solução $y_{exato}(1)$.

c. Aplique o Método Explícito do Ponto Médio para calcular aproximações para $y(1)$, indicando-as por $y^i(1)$, com passos de integração $h_i = \frac{h_{i-1}}{2}$, para $i = 1, ..., n$, com $n = 5$. Começe calculando $y^0(1)$ com $h_0 = 0.2$.

d. A Extrapolação de Richardson pode ser obtida por intermédio da construção de uma tabela com n linhas e n colunas, cujo elemento da linha i e da coluna j, $N(i, j)$, é assim obtido:
1) Cada elemento da coluna 1 é obtido fazendo-se:

$$N(i, 1) = y^i(1),$$

para $i = 1, ..., n + 1$.
2) Cada elemento da coluna j é obtido fazendo-se:

$$N(i + j - 1, j) = N(i + j - 1, j - 1) + [\frac{N(i + j - 1, j - 1) - N(i + j - 2, j - 1)}{2^{j-1} - 1}],$$

para $j = 2, ..., n + 1$ e $i = 1, ..., n - j + 1$.

e. Calcule o valor absoluto do erro global entre a solução analítica e cada um dos elementos da tabela anterior. Comente os resultados.

15. Uma maneira de se analisar a estabilidade de um Método Numérico de Passo Único é aplicá-lo ao Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y \\ y(t_0) & = & y_{0,} \end{cases}$$

com $\lambda < 0$.

Como resultado, se obtêm-se uma seqüência do tipo: $y_{k+1} = \psi(\lambda h)y_k$. A função ψ, depende do método empregado e tem como argumento o produto de λ pelo passo h. A partir disto, se constrõem regiões do plano complexo, com base na seguintes definições:

- **Região de Estabilidade Absoluta** do método é o conjunto definido por

$$\Omega = \{(\lambda h) \in \mathbb{C} \;\; | \;\; ||\psi(\lambda h)|| < 1\}$$

- **Intervalo de Estabilidade Absoluta** do método é o conjunto definido por $\Omega \bigcap \mathbb{R}$.
- Um método é dito ser **A-estável**, se seu intervalo de estabilidade absoluta estiver todo no semiplano negativo, isto é, se a parte parte real de λh for negativa, ou seja, $R_e(\lambda h) < 0$.

a. Com base nestas definições, determine a região e o intervalo de estabilidade do Método de Euler Explícito e conclua se ele é A-estável.

b. Determine a região de estabilidade do Método de Explícito do Trapézio.

c. Utilizando os passos $h = 0.5$ e $h = 0.1$, aplique o Método de Euler Explícito ao Problema de Cauchy, fazendo $\lambda = -4$, $y(0) = 1$ e $t \in [0, 1]$, para obter aproximações para $y(1)$. Comente os resultados obtidos.

16. Para o Método de Heun:

a. Calcular o erro local de discretização.

b. Verificar se o método é consistente.

c. Verificar se o método é convergente. Em caso afirmativo, determine a ordem de convergência, a constante de erro e a região de estabilidade do método.

17. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) & = & -y(x)\tan(x) - 1/\cos(x) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

cuja solução exata é $y(x) = \cos(x) - \sin(x)$. Verifique numericamente a ordem do Método de Euler (devidamente validado) ponto x=1.292695719373. Faça a mesma coisa para x=1. O que aconteceu? Comente e justifique analiticamente os resultados obtidos.

Agora considere outro problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) & = & -xy(x)/(1 - x^2) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

cuja solução exata é $y(x) = sqrt(1 - x^2)$. Repita os testes numéricos do exercício anterior nos pontos x=1 e no ponto x = 0.5. Novamente, comente e justifique analiticamente os resultados.

Dica: Leia a sessão 214 do Butcher (páginas 63 a 66).

18. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 1 + \frac{y}{t} \\ y(1) = 2, \quad t \in [1, 2]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = tln(t) + 2t$ e os seguintes métodos numéricos:

Método 7 (Runge-Kutta de 2 Estágios e Ordem 2).

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}(\kappa_1 + 3\kappa_2), \, onde \\ \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}h\kappa_1) \end{cases}$$

Método 8 (Runge-Kutta de 3 Estágios e Ordem 3).

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}(\kappa_1 + 3\kappa_3), \textit{ onde} \\ \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}h\kappa_1) \\ \kappa_3 = f(t_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}h\kappa_2) \end{cases}$$

Método 9 (Runge-Kutta de 4 Estágios e Ordem 4).

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4), \textit{ onde} \\ \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\kappa_1) \\ \kappa_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\kappa_2) \\ \kappa_4 = f(t_k + h, y_k + h\kappa_3) \end{cases}$$

a. Obtenha, para cada um dos métodos, uma aproximação para $y(2)$ com $h = 0.1$ e apresente, também, uma tabela contendo o valor absoluto do erro local entre soluções aproximadas e analítica.

b. Plote os gráficos das soluções aproximadas e analítica, no mesmo sistema de eixos coordenados, para o intervalo $t \in [1, 2]$.

19. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 1 + (t - y)^2 \\ y(2) = 1, \quad t \in [2, 3]. \end{cases}$$

cuja solução real é dada por, $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$ e os métodos numéricos:

Método 10 (Runge-Kutta de 6 Estágios e Ordem 5).

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(\frac{16}{135}\kappa_1 + 0\kappa_2 + \frac{6656}{12825}\kappa_3 + \frac{28561}{56430}\kappa_4 - \frac{9}{50}\kappa_5 + \frac{2}{55}\kappa_6), \textit{ onde} \\ \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}h\kappa_1) \\ \kappa_3 = f(t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}h\kappa_1 + \frac{9}{32}h\kappa_2) \\ \kappa_4 = f(t_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}h\kappa_1 - \frac{7200}{2197}h\kappa_2 + \frac{7296}{2197}h\kappa_3) \\ \kappa_5 = f(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}h\kappa_1 - 8h\kappa_2 + \frac{3680}{513}h\kappa_3 - \frac{845}{4104}h\kappa_4) \\ \kappa_6 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k - \frac{8}{27}h\kappa_1 + 2h\kappa_2 - \frac{3544}{2565}h\kappa_3 + \frac{1859}{4104}h\kappa_4 - \frac{11}{40}h\kappa_5) \end{cases}$$

Método 11 (Runge-Kutta de 5 Estágios e Ordem 4).

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h(\frac{25}{216}\kappa_1 + 0\kappa_2 + \frac{1408}{2565}\kappa_3 + \frac{2197}{4104}\kappa_4 - \frac{1}{5}\kappa_5), \textit{ onde} \\ \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}h\kappa_1) \\ \kappa_3 = f(t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}h\kappa_1 + \frac{9}{32}h\kappa_2) \\ \kappa_4 = f(t_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}h\kappa_1 - \frac{7200}{2197}h\kappa_2 + \frac{7296}{2197}h\kappa_3) \\ \kappa_5 = f(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}h\kappa_1 - 8h\kappa_2 + \frac{3680}{513}h\kappa_3 - \frac{845}{4104}h\kappa_4) \end{cases}$$

a. Implemente e valide os dois métodos acima.

b. Leia sobre o **Método de Runge-Kutta-Fehlbergh** em alguma bibliografia indicada no curso. Utilize o Método de Runge-Kutta de 6 Estágios e Ordem 5 para estimar o erro local do Método de Runge-Kutta de 5 Estágios e Ordem 4. Note que κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 e κ_5 são iguais em ambos os métodos. Obtenha uma aproximação para $y(3)$, com erro de tolerância igual a 10^{-6}.

c. Construa uma tabela contendo todos os valores dos passos h utilizados.

d. Plote, num mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos das soluções aproximada e analítica, para o intervalo $t \in [2, 3]$.

20. Leia o que o Butcher fala do problema de Lotka-Volterra (páginas de 18 a 21). Utilize o Método de Euler explícito e o Método de Runge-Kutta Clássico (4 estágios e ordem 4) para o modelo descrito pelas equações (107a-b) da página 18. Para cada um dos métodos, tente obter um retrato de fase semelhante àquele da figura (107) da página 20. Comente com detalhes os resultados obtidos.

21.

Definição 3. *Um Método Linear de Passo Múltiplo, **MLPM**, também chamado de Método de $k-$Passos, para resolução de um PVI, é definido pela seguinte relação:*

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}$$

onde α_i e βi, são constante arbitrárias independentes de n, com $\alpha_k \neq 0$ e α_0 e β_0 não são ambos nulos. Suponho-se que $\alpha_k = 1$. Diz-se que o MLPM é explícito se $\beta_k = 0$ e implícito se $\beta_k \neq 0$.

a. Obtenha, a partir do Método de Taylor, o Método Explícito de 2-Passos, que é também chamado de Método do Ponto Médio.

b. Obtenha, a partir das Fórmulas de Integração Numérica, o Método Implícito de 2-Passos, que é também chamado de Método de Simpson.

22. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(0) = 0 \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = tg(t)$ e os seguintes métodos lineares de passo múltiplo:

Método 12 (Método de Nystron)**.**

$$\{ \; y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_n$$

Método 13 (Método de Adams-Bashforth de 2 passos)**.**

$$\{ \; y_{n+2} = y_{n+1} + \tfrac{h}{2}[-f_n + 3f_{n+1}],$$

a. Estes métodos são explícitos ou impliíctos. Justifique sua resposta.

b. Utilizando este dois métodos, obtenha uma aproximação para $y(1)$ com passo $h = 0.1$. Use o Metódo de Euler Aprimorado para obter os valores iniciais necessários.

c. Plote, num mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos das soluções aproximadas e analítica, para o intervalo $t \in [0, 1]$.

23. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 4x\sqrt{y} \\ y(0) = 1 \quad x \in [0,2] \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(x) = (1 + x^2)^2$ e os seguintes métodos lineares de dois passos:

Método 14 (Método 1)**.**

$$\begin{cases} y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{3}[3f_{n+1} - 2f_n], \end{cases}$$

Método 15 (Método 2)**.**

$$\begin{cases} y_{n+2} = (1+a)y_{n+1} - ay_n + \frac{h}{2}[(3-a)f_{n+1} - (1+a)f_n], \end{cases}$$

a. Mostre que o Método 1 é zero-estável, mas não é consistente.

b. Mostre que o Método 2 é consistente para todo valor de a; zero-estável e de ordem 2 se $a = 0$ e não é zero-estável e de ordem 3 se $a = -5$.

c. Aplique o Método 1 ao PVI para obter uma aproximação para $y(2)$, utilizando os passos de integração: $h = 0.1$, $h = 0.05$ e $h = 0.025$. Construa uma tabela contendo o erro absoluto entre as soluções aproximadas e analítica para cada passo de integração. Analise os resultados obtidos. Use o valor da solução analítica para obter os valores iniciais necessários.

d. Aplique o Método 2 ao PVI, para $a = 0$ e $a = -5$ e obtenha uma aproximação para $y(2)$, utilizando os passos de integração: $h = 0.1$, $h = 0.05$ e $h = 0.025$. Construa uma tabela contendo o erro absoluto entre as soluções aproximadas e analítica para cada passo de integração. Analise os resultados obtidos. Use o valor da solução analítica para obter os valores iniciais necessários.

24. Para os seguintes Métodos Lineares de Passos Múltiplos, determine a ordem do método, a constante de erro, o erro de truncamento local e indique, também, quais deles são explicitos e quais são implícitos:

Método 16 (Euler)**.**

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

Método 17 (Ponto Médio)**.**

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_n$$

Método 18 (Simpson)**.**

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}],$$

Método 19 (Adams-Moulton de 2 passos)**.**

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12}[-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}],$$

Método 20 (Adams-Bashforth de 2 passos).

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}[-f_n + 3f_{n+1}],$$

Método 21 ($\frac{3}{8}$ de Simpson).

$$y_{n+3} = y_n + \frac{3h}{8}[f_n + 3f_{n+1} + 3f_{n+2} + f_{n+3}],$$

Método 22 (Quade).

$$y_{n+4} = y_n - \frac{8}{19}y_{n+1} + \frac{8}{19}y_{n+3} + \frac{6h}{19}[f_n + 4f_{n+1} + 4f_{n+3} + f_{n+4}],$$

25. Considere o seguinte método linear de passo múltiplo:

Método 23.

$$y_{n+2} = 5y_n - 4y_{n+1} + h[b_0 f_n + b_1 f_{n+1}]$$

a. Mostre que b_0 e b_1 podem ser determinado se a ordem do método for 3.

b. Na hipótese do item a), calcule a constante de erro deste método.

26.

Definição 4. *Um Método Linear de Passo Múltiplo é estável, se nenhuma raiz do polinômio característico:*

$$\rho(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i$$

tiver módulo maior do que 1 e todas as raízes com módulo 1 serem simples.

Definição 5. *Um Método Linear de Passo Múltiplo é consistente se tem ordem* $q \geq 1$

Teorema 6. *Um Método Linear de Passo Múltiplo é convergente de ordem q se e somente se é estável e consistente de ordem q.*

Tanto a consistência, quanto com a estabilidade de um Método Linear de Passo Múltiplo são importantes para garantir a convergência. Enquanto a consistência controla o erro local em cada passo, a estabilidade controla a forma pela qual o erro se propaga na medida em que o número de passos aumenta. É importante ressaltar que quanto maior for a ordem de consistência do método, mais rapidamente se obterá a solução.

Com base nesta informações, analise a consistência, a estabilidade e a convergência dos seguintes métodos:

a. Euler.

b. Ponto Médio.

c. Simpson.

d. Adams-Moulton de 2 passos.

e. Adams-Bashforth de 2 passos.

f. $\frac{3}{8}$ de Simpson.

g. Quade.

27. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é dada por $y(t) = e^t$.

Considere os dois métodos lineares de passos múltiplos:

Método 24.

$$\{ \; y_{n+2} + 3y_n - 4y_{n+1} = -2hf_n$$

Método 25.

$$\{ \; y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3}[-2f_n + 3f_{n+1}]$$

a. Análise a ordem e a consistência destes dois métodos.

b. Análise a estabilidade deste dois métodos.

c. Estes métodos podem ser utilizados para resolver um PVI com garantia de convergência. Justifique sua resposta.

d. Aplique este dois métodos ao PVI para obter uma aproximação para $y(1)$ com $h = 0.1$. Utilize o Método de Heun, para obter os valores iniciais necessários.

e. Para cada um deste métodos, elabore uma tabela contendo o valores das soluções aproximada e analítica. Comente os resultados.

28. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y' = y - t \\ y(0) = 2, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = e^t + t + 1$, utilizando o par Previsor-Corretor de Ordem 2, no modo $P(EC)^2E$:

Método 26 (Método de Nystron)**.**

$$Preditor : \{ \; y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_k$$

Método 27 (Método Implícito do Trapézio)**.**

$$Corretor : \{ \; y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f_k + f_{k+1}]$$

Inicialize os valores, utilizando o método explícito de segunda ordem: **Método de Euler Aprimorado**

Método 28 (Método de Euler Aprimorado).

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_k + h; y_k + hf(x_k, y_k))] \end{cases}$$

a. Utilize $h = 0.1$ para obter uma aproximação para $y(1)$.

b. Plote, no mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos das soluções analítica e aproximada.

29. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(0) = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = tg(t)$, e o Método Preditor-Corretor conhecido como:

Método 29 (Método de Milne de Quarta Ordem).

$$Preditor : \begin{cases} y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}[2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}] \end{cases}$$

$$Corretor : \begin{cases} y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}[f_{k+1} + 4f_k + 4f_{k-1}] \end{cases}$$

Inicialize os valores, utilizando o Método Explícito de Ruge-Kutta de 4 Estágio e Ordem 4:

Método 30 (Método Explícito de Ruge-Kutta de 4 Estágio e Ordem 4).

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4), \, onde \\ \kappa_1 = f(t_k, y_k) \\ \kappa_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\kappa_1) \\ \kappa_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\kappa_2) \\ \kappa_4 = f(t_k + h, y_k + h\kappa_3) \end{cases}$$

a. Utilize o Método de Milne de Quarta Ordem, no modo $P(EC)^2E$, para obter uma aproximação para $y(1)$ com passo $h = 0.1$

b. Plote, no mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos das soluções analítica e aproximada.

30.

Teorema 7. *Seja o método Preditor-Corretor, PC, para o qual o Preditor, tem orderm p^* e o Corretor, tem ordem p, aplicado no modo $P(EC)^mE$ ou $P(EC)^m$, onde p^*, p e m são inteiros e $p^* \geq 0$, $p \geq 1$ e $m \geq 1$. Então: 1) Se $p^* \geq p$, o erro de truncamento local principal do Método Preditor-Corretor será o mesmo do Corretor.*
2) Se $p^* = p - q$; $0 < q \leq p$, o erro de truncamento local principal do Método Preditor-Corretor séra:
2.1) o mesmo do Corretor, quando $m \geq q + 1$,
2.2) da mesma ordem do Corretor, mas diferente dele, quando $m = q$,
2.3) da forma $kh^{p-q+m+1} + O(h^{p-q+m+2})$, se $m \leq q - 1$.
Note que o erro de truncamento local principal do Método Preditor-Corretor será o do Corretor, independente da ordem do Preditor.

Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} - (\frac{y}{t})^2 \\ y(1) = 1, \quad t \in [1, 4]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = \frac{t}{(1+ln(t))}$ e Método Preditor-Corretor conhecido como:

Método 31 (Método de Hamming de Quarta Ordem)**.**

$$Preditor : \left\{ \; y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}[2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}] \right.$$

$$Corretor : \left\{ \; y_{k+1} = \frac{1}{8}[9y_k - y_{k-2}] + \frac{3h}{8}[f_{k+1} + 2f_k - f_{k-1}] \right.$$

a. Com base no teorema acima, determine a ordem do erro de truncamento do Método de Hamming de Quarta Ordem, quando aplicado no modo $P(EC)$.

b. Calcule aproximações para $y(4)$, indicando-as por $y^i(4)$, com passos de integração $h_i = \frac{h_{i-1}}{2^i}$, para $i = 1, ..., 5$. Começe calculando $y^0(4)$, com $h_0 = 0.4$. Obtenha a sequência $R_1^i = \frac{||y^{i+1}(1)-y^i(1)||}{||y^i(1)-y^{i-1}(1)||}$, para $i = 1, ..., 4$; e finalmente conclua sobre a ordem de convergência do Método de Hamming, quando aplicado no modo $P(EC)$. Utilize o Método de Euler Aperfeiçoado, para obter os valores iniciais necessários.

31.

Teorema 8. *Considere um método Preditor-Corretor aplicado ao PVI:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em x e y no intervalo fechado $[a,b]$ e se $\frac{\partial f}{\partial y}$ não se anular neste intervalo, o Método Preditor-Corretor convergirá, desde que o passo h seja escolhido de modo a satisfazer:

$$h < \frac{2}{||\frac{\partial f}{\partial y}||}$$

Observação. A experiência mostra que aplicação de uma ou duas interações do Corretor são suficientes para se obter a precisão desejada, desde que a amplitude do intervalo h, tenha sido escolhida adequadamente. Caso esta interações não sejam suficientes, é melhor reduzir a amplitude do intervalo h, ao invés de aumentar o número de interações, isto é, na prática, não se utiliza $m > 2$.

Considere o seguinte PVI:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = xy \\ y(1) = 1, \quad t \in [1,4]. \end{array} \right.$$

cuja solução analítica é $y(t) = e^{\frac{x^2-1}{2}}$ e o Método Preditor-Corretor conhecido como:

Método 32 (Método de Milne de Sexta Ordem)**.**

$$Preditor : \left\{ \; y_{k+1} = y_{k-5} + \frac{3h}{10}[11f_k - 14f_{k-1} + 26f_{k-2} - 14f_{k-3} + 11f_{k-4}] \right.$$

$$Corretor : \left\{ \; y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{2h}{45}[7f_{k+1} + 32f_k + 12f_{k-1} + 32f_{k-2} + 7f_{k-3}] \right.$$

a. Verifique que a função $y' = f(x,y) = xy$, satisfaz as condições do Teorema.

b. Com base no Teorema, escolha um valor de h adequado para que o Método de Milne de Sexta Ordem convirga.

c. Com o valor de h escolhido no item anterior, utilize o Método de Milne de Sexta Ordem, no modo $P(EC)E$, para obter uma aproximação para $y(4)$. Utilize o Método de Euler Aperfeiçoado, para obter os valores iniciais necessários.

d. Tome um valor de h maior do que o recomendado pelo Teorema e utilize o Método de Milne de Sexta Ordem, no modo $P(EC)E$, para obter uma aproximação para $y(4)$. Utilize o Método de Euler Aperfeiçoado, para obter os valores iniciais necessários. O Método Convergiu? Comente o resultado.

32. Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2 \\ y(1) = 1, \quad x \in [1,4]. \end{cases}$$

cuja solução analítica é $y(t) = \frac{t}{1+lnt}$.

a. Leia sobre o **Método Preditor-Corretor com Tamanho Variável de Passo de Adams** em alguma bibliografia indicada no curso.

b. Aplique o Método Preditor-Corretor com Tamanho Variável de Passo de Adams, com erro de tolerância $TOL = 10^{-6}$, $h_{max} = 0.5$ (passo máximo) e $h_{min} = 0.02$ (passo mínimo) para aproximar $y(4)$.

c. Elabore uma tabela exibindo o tamanho de todos os passos de integração utilizados e os respectivos valores das soluções aproximada e analítica para cada passo de integração.

33. Considere o seguinte sistema de PVI:

$$\begin{cases} u_1' = 32u_1 + 66u_2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}, \quad u_1(0) = \frac{1}{3}, \quad t \in [0, 0.5] \\ u_2' = -66u_1 - 133u_2 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}, \quad u_2(0) = \frac{1}{3}, \quad t \in [0, 0.5] \end{cases}$$

cuja solução analítica é:

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-100t} \\ u_2(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-100t} \end{cases}$$

a. Leia sobre **Equações Diferenciais Rígidas** em alguma bibliografia indicada no curso.

b. Aplique o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, para resolver o sistema de PVI Rígido, utilizando os passos $h = 0.1$ e $h = 0.025$ e compare os resultados com a solução analítica.

34. Exercício 10.1 do Butcher.

35. Exercício 10.2 do Butcher.

36. Exercício 10.5 do Butcher.

37. Exercício 12.3 do Butcher.

38. Exercício 22.2 do Butcher.

39. Exercício 24.1 do Butcher.

40. Exercício 24.2 do Butcher.

41. Exercício 24.3 do Butcher.

42. Exercício 24.4 do Butcher.

43. Exercício 25.1 do Butcher.

44. Exercício 25.2 do Butcher.

45. Exercício 25.3 do Butcher.