# Introdução sobre cadeias de Markov

André Yoshiaki Kashiwabara[1]

[1]Departamento de Ciência da Computação da Universidade de São Paulo

14 de agosto de 2007

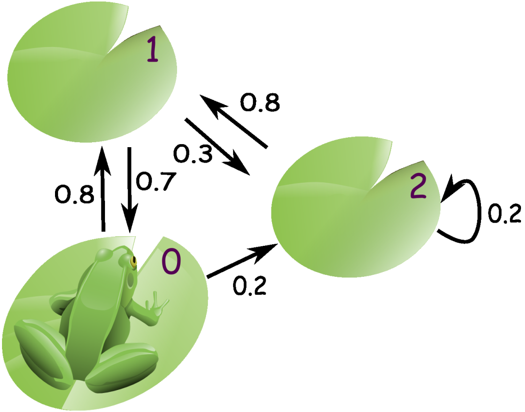
# Conceito de estado

- **Estado:** a situação atual de um sistema pode ser especificada por um conjunto de valores de variáveis que descrevem o sistema.
    - estado de uma aeronave: valores de posição espacial, massa, e velocidade;
    - estado de uma rede genética: valores de expressão dos genes;

# Conceito de transição

- **Transição:** durante a passagem do tempo um sistema passa de estado para estado apresentando um comportamento dinâmico.

# Exemplo do sapo (Howard)




- Cada folha é um estado. $R = \{0, 1, 2\}$
- O rótulo $t$ é o número de pulos e $x(t)$ é a folha ocupada após $t$ pulos, a seqüência $x(0), x(1), x(2), ..., x(t-1), x(t)$ descreve a trajetória do processo.

# Trajetória estocástica

- O comportamento estatístico do processo pode ser especificado em termos de probabilidades:

$$P\{X_t = x(t) | X_0 = x(0), X_1 = x(1), ..., X_{t-1} = x(t-1)\}$$

*Probabilidade de um estado $x(t)$ depois de $t$ transições dado todo o histórico anterior.*

# Propriedade markoviana

- A propriedade markoviana descreve que a predição do estado futuro sabendo todo o histórico é igualmente bom quanto a predição quando sabemos apenas o estado atual.

$$P\{X_t = x(t) | X_0 = x(0), X_1 = x(1), ..., X_{t-1} = x(t-1)\}$$

$$= P\{X_t = x(t) | X_{t-1} = x(t-1)\}$$

- Uma seqüência de variáveis aleatórias $X_0, X_1, X_2, ...$ é dita **cadeia de Markov** se para todo $t \geq 1$ vale a propriedade acima.

# *Matriz de transição*

Uma matriz de transição é uma função $Q : R \times R \to [0, 1]$ em que para todo elemento $x \in R$, $\sum_{y \in R} Q(x, y) = 1$. Em outras palavras, a soma das entradas de cada linha da matriz é um.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

# Cadeia de Markov homogênea

- **cadeia de Markov homogênea:** significa que a probabilidade de transição não depende do tempo.

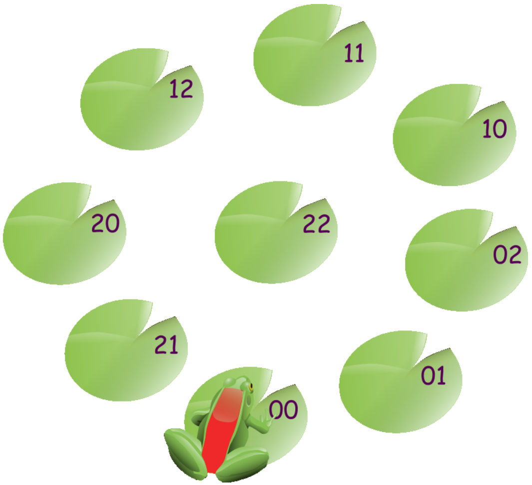
$$P\{X_{t+1} = x | X_t = y\} = P\{X_t = x | X_{t-1} = y\}$$

para todo $t \geq 1$.

# Cadeia de Markov de ordem $m$

Quando o histórico do sistema antes do estado anterior influencia o comportamento futuro, a **propriedade markoviana** ainda pode ser utilizada. Por exemplo, se as $m$ posições anteriores influenciam a transição futura, então definimos um novo processo com $|R|^m$ estados, em que cada estado do novo processo corresponde aos $m$ sucessivos estados anteriores do processo antigo.

# Outro sapo com memória de comprimento 2



# Probabilidade de transição após $n$ passos

O que podemos dizer sobre o estado do processo depois de $n$ passos sabendo o estado inicial ?

- Para todo $t \geq 1$ e todo estado $b \in R$, temos

$$P(X_t = b | X_0 = a) = Q^n(a, b)$$

  Em que $Q^n(a, b)$ é o elemento da linha $a$ e coluna $b$ da matriz $Q^n$.

# Exemplo

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.04 & 0.40 \\ 0.00 & 0.62 & 0.38 \\ 0.14 & 0.16 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.528 & 0.444 \\ 0.434 & 0.076 & 0.490 \\ 0.112 & 0.252 & 0.636 \end{bmatrix}$$

$$Q^\infty = \begin{bmatrix} 0.1794871 & 0.2564103 & 0.5641026 \\ 0.1794872 & 0.2564102 & 0.5641026 \\ 0.1794872 & 0.2564103 & 0.5641026 \end{bmatrix}$$

# Processo periódico

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^4 = Q$$

$$Q^5 = Q^2$$

$$Q^6 = Q^3$$

# Probabilidade de estados

Qual é a probabilidade de um certo estado depois de $t$ transições sem incluir na notação o estado inicial em que o processo começou ?
A probabilidade que o estado $i$ é ocupado no tempo $t$ será dado pelo símbolo $\pi_i(t)$ e definido por:

$$\pi_i(t) = P\{X_t = i\}$$

Em que $\sum_i \pi_i(t) = 1$ para todo $t \in \{0, 1, 2, ...\}$

# Cálculo da probabilidade de estados

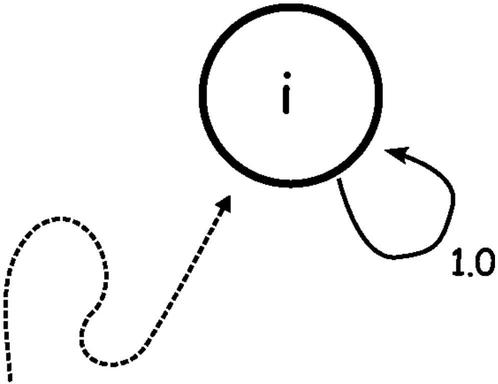
A probabilidade de estado pode ser calculada usando a seguinte equação:

$$\pi(t) = \pi(0)P^t, t = 0, 1, 2, ...$$

# Classificação de estados e cadeias

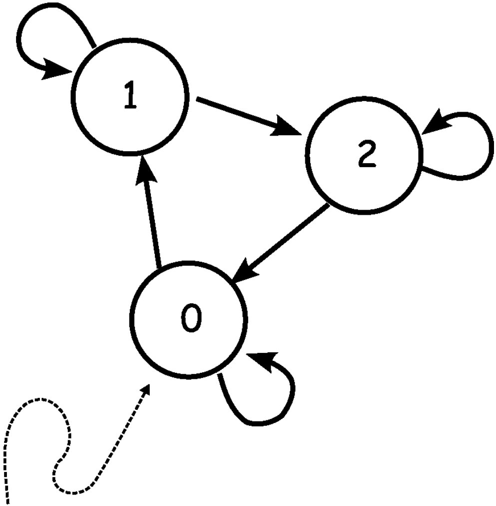
- Estado absorvente.
- Estado recorrente.
- Estado periódico.
- Estado transiente.
- Estado ergódico.
- Cadeia irredutível.
- Cadeia absorvente.
- Cadeia ergódica.

# Estado absorvente



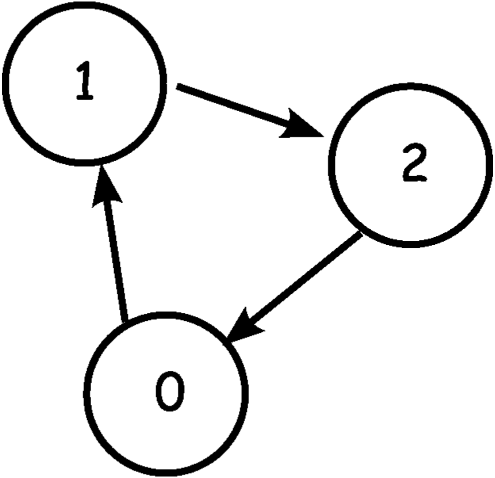

Uma vez que se entra no estado absorvente, nunca mais o deixa.

# Estado recorrente



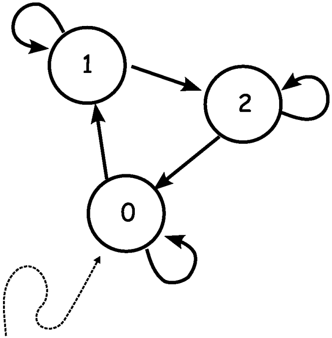

Uma vez que se entra no estado recorrente, o retorno é assegurado.

# Estado periódico



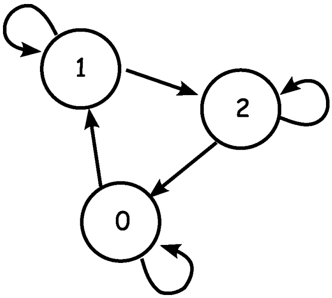

Estado que pode ser alcançado nos passos $k$, $2k$, $3k$, ..., em que $k > 1$.

# Estado ergódico



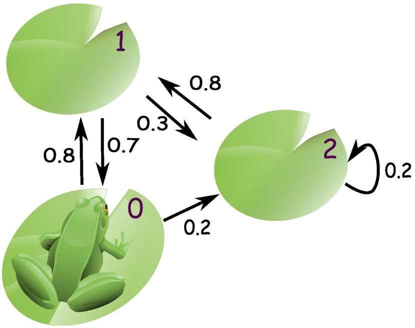

Uma vez que se entra no estado ergódico, o retorno é assegurado dentro de um número finito de passos, porém o estado não é periódico e pode retornar em qualquer passo $t$.
Estado ergódico é um estado aperiódico e recorrente positivo.

# Cadeia ergódica




Uma cadeia ergódica é uma cadeia em que todos os estados são ergódicos.

# Cadeia irredutível




Para cada par de estado $x$ e $y$ existe um número $n = n(x, y)$, tal que $Q^n(x, y) > 0$.

# FIM