Algoritmos para Processamento de Áudio, Imagem e Vídeo

Notas de aula sobre processamento de sinais aleatórios

Estas notas de aula correspondem a uma parte da matéria do curso que não está no livro "Discrete Fourier Analysis and Wavelets: Applications to Signal and Image Processing" de S. Allen Broughton e Kurt M. Bryan, e estão baseadas nos capítulos 26 a 31 do livro *Signal processing: a mathematical approach* de Charles Byrne. O autor tem uma versão pre-print deste livro em seu site, no endereço `http://faculty.uml.edu/cbyrne/master.pdf`.

Preâmbulo e Advertência: Aleatoriedade e Ruído

Ruído pode significar...

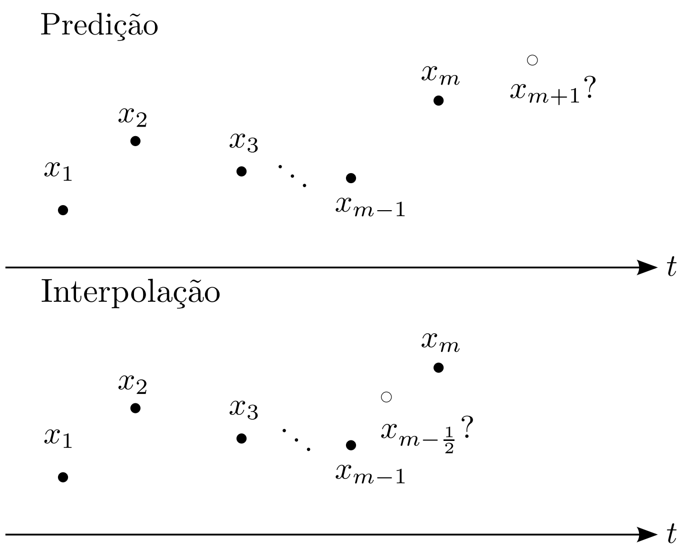
- ... algo que atrapalha a comunicação
- ... sons de máquinas, trovões, acidentes
- ... uma sonoridade complexa, sem alturas musicais definidas
- ... entre muitas outras coisas.

Aleatoriedade pode significar...

- ... que não compreendemos bem um processo (a ponto de prever seu resultado)
- ... que não conhecemos todas as variáveis relevantes do problema
- ... que um modelo completo de predição não é observável ou não seria computacionalmente tratável
- ... entre muitas outras coisas.

1 Predição e interpolação

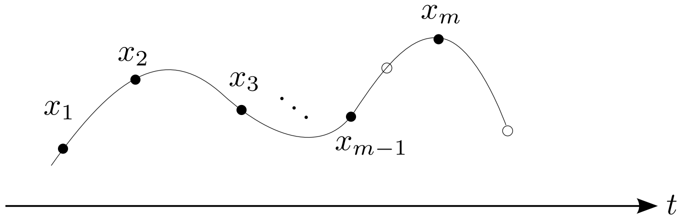
inferindo informação futura ou informação ausente



1.1 Modelos polinomiais

Predição através de interpolação: construindo um modelo do sinal

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$



Ajuste de modelos: estimando os coeficientes do polinômio

Método "difícil": usar a base canônica (dos polinômios)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k, \ t = 1, \dots, m$$

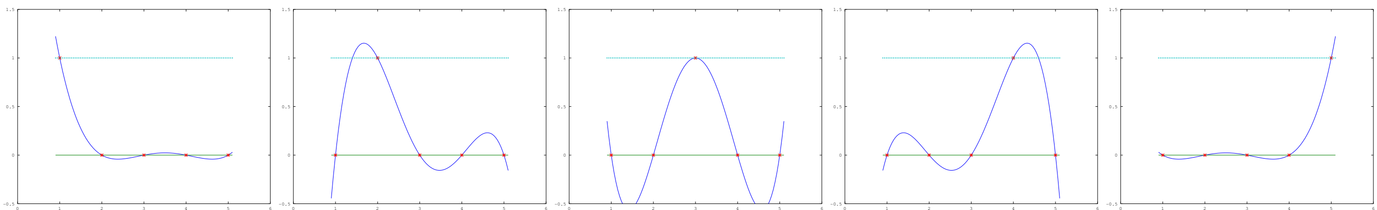
e resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{m-1} \\ 1 & 3 & 9 & \cdots & 3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & m & m^2 & \cdots & m^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Ajuste de modelos: Método de Lagrange

Método fácil: método de Lagrange

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} x_k L_k(t) \quad \text{onde} \quad L_k(t) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,m \\ j \neq k}} (t-j)}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,m \\ j \neq k}} (k-j)}$$



Note que

$$L_k(t) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,m \\ j \neq k}} (t-j)}{\prod\limits_{\substack{j=1,\dots,m \\ j \neq k}} (k-j)} = \begin{cases} 1, & \text{se } t = k \\ 0, & \text{se } t \in \{1, 2, \dots, m\}, \ t \neq k \end{cases}$$

Para a predição, $\hat{x}_{m+1} = f(m+1) = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$, com $a_k = L_k(m+1)$, ou ainda,

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^{m} a_k x_{n-k}$$

com $a_k = L_{m-k}(m+1)$ (filtro LIT/FIR, depende apenas de m).

Exemplo de Aplicação: Compactação de áudio e ADPCM

Estimadores:

1. $\boxed{\hat{x}_n = x_{n-1}}$
2. $\hat{x}_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} \Longrightarrow \boxed{\hat{x}_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}}$
3. $(\hat{x}_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2}) = (x_{n-1} - x_{n-2}) - (x_{n-2} - x_{n-3})$
   $\Longrightarrow \boxed{\hat{x}_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3}}$
4. $(\hat{x}_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2}) - ((x_{n-1} - x_{n-2}) - (x_{n-2} - x_{n-3})) = (x_{n-1} - x_{n-2}) - (x_{n-2} - x_{n-3}) - ((x_{n-2} - x_{n-3}) - (x_{n-3} - x_{n-4}))$
   $\Longrightarrow \boxed{\hat{x}_n = 4x_{n-1} - 6x_{n-2} + 4x_{n-3} - x_{n-4}}$

ADPCM usa melhor estimador por bloco e guarda resíduo da predição.

2 Predição e otimização

2.1 Modelos lineares

Predição Linear: encontrando predições com erro mínimo

Ideia: procurar estimadores do sinal

$$x = (\ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots)$$

da forma

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^{m} a_k x_{n-k}$$

e que minimizem o erro

$$\|x - \hat{x}\|$$

em um horizonte finito $n = K, \ldots, L$.
Ou seja, encontrar $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ que resolve

$$\min \|b - Ra\|$$

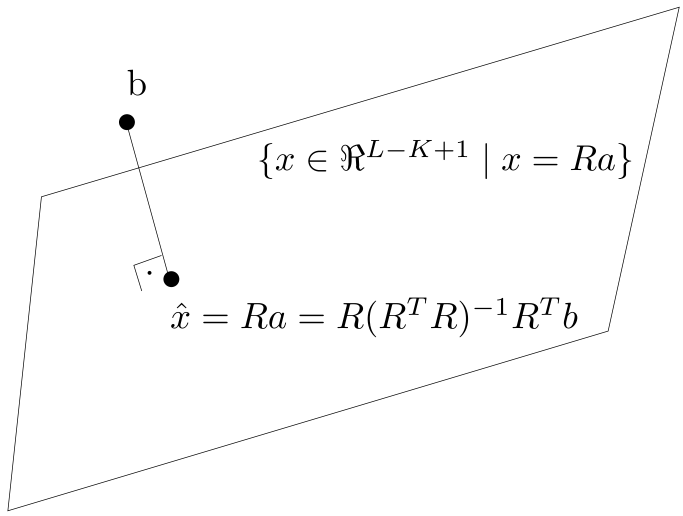
conhecendo-se $b = (x_K, x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_L)^T$ e

$$R = \begin{bmatrix} x_{K-1} & x_{K-2} & x_{K-3} & \cdots & x_{K-m} \\ x_K & x_{K-1} & x_{K-2} & \cdots & x_{K-m+1} \\ x_{K+1} & x_K & x_{K-1} & \cdots & x_{K-m+2} \\ x_{K+2} & x_{K+1} & x_K & \cdots & x_{K-m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_{L-2} & x_{L-3} & \cdots & x_{L-m} \end{bmatrix} \quad \text{(Toeplitz)}$$

Solução LPC (Linear Predictive Coding): método dos mínimos quadrados

$\min \|b - Ra\| \equiv \min f(a) = \frac{1}{2}\|b - Ra\|^2$, cuja solução precisa satisfazer

$$\nabla f(\hat{a}) = 0 \iff -R^T(b - R\hat{a}) = 0 \iff \hat{a} = (R^T R)^{-1} R^T b$$



Predição linear estocástica: a mesma coisa, só que diferente

O método de predição linear pode ser interpretado em termos de informação estatística do sinal. Na solução $\hat{a} = (R^T R)^{-1} R^T b$ a matriz $R^T R$ possui entradas

$$(R^T R)_{ij} = \sum_{l=0}^{L-K} x_{K-i+l} x_{K-j+l} \qquad r_x(j-i)$$

que estão associadas à *auto-correlação* de x com atraso $j-i$, enquanto o vetor $R^T b$ possui entradas

$$(R^T b)_j = \sum_{l=0}^{L-K} x_{K-j+l} x_{K+l} \qquad r_x(j)$$

associadas à *auto-correlação* de x com atraso j.

Os coeficientes LPC podem ser obtidos alternativamente considerando a equação de filtro recursiva

$$y(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{M} b_i y(n-i)$$

cuja função de transferência $H(z) = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{M} b_i z^{-i}}$ satisfaz o

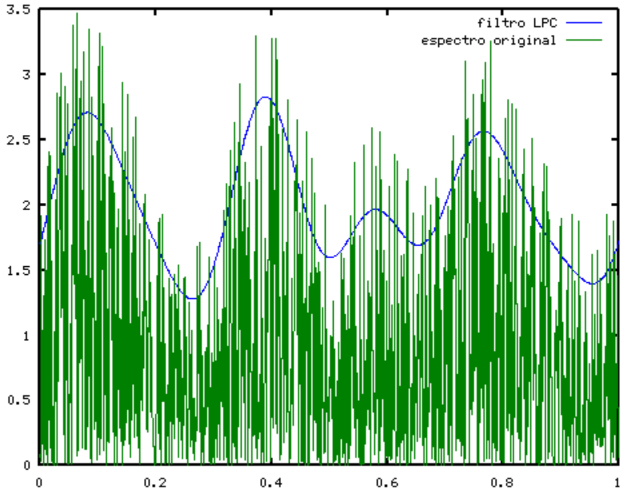
$$\text{Teorema de Wiener-Kinchin:} \qquad \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^{M} b_i z^{-i}\right)} \approx \sum_{d=-M}^{M} r_x(d) z^d$$

O teorema de Wiener-Khinchin fornece um sistema linear do tipo

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) & \cdots & r_x(M) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(M-1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(M) & r_x(M-1) & r_x(M-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(caso particular das *Equações de Wiener-Hopf*)

Exemplo de Aplicação: Estimação de envoltória espectral e *morphing*
Coeficientes LPC definem um filtro recursivo (computacionalmente eficiente) com resposta em frequência próxima da do sinal original x:



Usar este filtro em um segundo sinal y permite a impressão de características espectrais de x em y. No caso de áudio está impressão empresta características timbrísticas de um som ao outro, sendo denominada *morphing* (em imagens esse termo se refere a outro tipo de processamento).

3 Processos aleatórios

3.1 Definições básicas

Processos aleatórios discretos: sequências de variáveis aleatórias
Considere a sequência $(\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots)$ onde X_n é uma variável aleatória real com função de densidade de probabilidade $f_n(x)$, de tal modo que $\text{Prob}[X_n \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_n(x)dx$.
A *esperança* de X_n é definida como $E(X_n) = \int x f_n(x)dx$. Vamos supor deste ponto em diante que $E(X_n) = 0,\ \forall n$.
A *função de auto-correlação* é definida como

$$r_x(m, n) = E(X_m X_n),$$

e a *variância* de X_n é definida como $Var(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = E(X_n^2) = r_x(n, n)$.
O processo $\{X_n\}$ é dito *estacionário em sentido amplo* quando valem as propriedades

1. $E(X_n)$ independe de n;
2. $r_x(m, n)$ só depende de $|m - n| \Longrightarrow Var(X_n)$ independe de n;

Processos aleatórios discretos: matriz de autocorrelação de processos estacionários

Se $\{X_n\}$ é estacionário em sentido amplo, denotamos por $r_x(k) = E(X_{n+k}X_n)$, e podemos construir a *matriz de auto-correlação* de ordem $N \times N$ com as entradas

$$R_{mn} = r_x(m-n) = E(X_m X_n),$$

sendo que esta matriz pode ser representada de forma compacta como

$$R = E(XX^T),$$

onde $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)^T$.
Evidentemente esta matriz é aleatória, e possui propriedades matemáticas relevantes, como por exemplo o fato de ser *simétrica* e *positiva semi-definida*, já que para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$ temos

$$y^T R y = y^T E(XX^T) y = E(y^T X X^T y) = E(\|X^T y\|^2) \geq 0.$$

Processos aleatórios discretos: estimando a matriz de autocorrelação em processos realizados

Conhecendo a realização de uma parte do processo $\{X_n\}$, por exemplo, $X_k = x_k, X_{k+1} = x_{k+1}, \ldots,$ $X_l = x_l$ (com $l - k + 1 \gg N$) podemos estimar a matriz de covariância de ordem N como

$$\hat{R} = \frac{1}{l-k-N+2} \sum_{i=0}^{l-k-N+1} Y_i Y_i^T,$$

onde

$$Y_i = \begin{bmatrix} x_{k+i} \\ x_{k+i+1} \\ \vdots \\ x_{k+i+N-1} \end{bmatrix}.$$

4 Predição estocástica

4.1 Modelos lineares

Predição estocástica: estimação linear $\hat{X}_n$ de X_n

Suponha que queiramos estimar X_n a partir de N termos anteriores através da expressão

$$\hat{X}_n = \sum_{k=1}^{N} a_k X_{n-k}.$$

Multiplicando os dois lados por X_{n-m} (para $m = 1, \ldots, N$) e tomando a esperança, teremos

$$E(\hat{X}_n X_{n-m}) = \sum_{k=1}^{N} a_k E(X_{n-k} X_{n-m}),\ m = 1, \ldots, N.$$

Supondo o processo estacionário em sentido amplo, teremos

$$E(\hat{X}_n X_{n-m}) = \sum_{k=1}^{N} a_k R_{mk},\ m = 1, \ldots, N,$$

que corresponde a um sistema linear da forma $Ra = b$, onde R é a matriz de autocorrelação e $b_m = E(\hat{X}_n X_{n-m})$.
Vemos que o método LPC é aparentado ao método acima, porém usa estimativas finitas da matriz de covariância e sujeita-se à hipótese adicional $E(\hat{X}_n X_{n-m}) = E(X_n X_{n-m})$.

5 Filtragem estocástica

5.1 Hipóteses

Filtragem estocástica: separando sinal de ruído

Hipóteses:

1. o sinal $x \in \mathbb{R}^N$ é desconhecido, porém possui média zero e matriz de covariância $E(xx^T) = \sigma^2 I$ com σ conhecido;
2. o sinal passa por um processamento linear conhecido $H \in \mathbb{R}^{M\times N}$, e sofre adição de um ruído aleatório $v \in \mathbb{R}^M$, antes de ser observado como $z = (Hx)+v = s+v \in \mathbb{R}^M$ ($s \in \mathbb{R}^M$ é chamado de *componente do sinal*);
3. v possui média 0, matriz de covariância conhecida $Q = E(vv^T)$, e é independente de x;
4. o estimador procurado para a componente do sinal $s = Hx$ é linear nas observações z, ou seja, $\hat{s} = B^T z$ para alguma matriz $B \in \mathbb{R}^{M\times M}$ (a ser determinada).

Exemplo de Aplicação: Registro de sinais em ambientes ruidosos

Uma sala pode ser modelada como um sistema linear: dado um sinal x produzido por uma fonte sonora em uma sala, o que escutamos na realidade é Hx, onde H é a matriz circulante da resposta impulsiva de um modelo FIR.
Considerando ruídos de ar-condicionado, lâmpadas, pássaros e aviões, o sinal acústico registrado em um ponto da sala pode ser modelado como $z = Hx + v$, como no cenário acima.
O problema da filtragem estocástica consiste em obter o sinal "limpo" (por exemplo, o discurso de uma pessoa) a partir do registro "sujo" obtido por um microfone em uma sala ruidosa.
O mesmo problema poderia ser formulado a partir da recuperação de uma imagem projetada em uma sala, a partir de uma registro em vídeo desta projeção, e sujeito à interferência de insetos, fumaça, etc.

5.2 Filtro de Wiener

Filtro de Wiener: o caso mais simples (impondo estrutura forte)

Suponha que a componente do sinal s é da forma $s = au$, onde a é um escalar desconhecido e u é um vetor *conhecido.*
Suponha ainda que o ruído também tem a forma $v = bw$, onde b é um escalar desconhecido e w é um vetor *conhecido.*
Se o número de observações for $N \geq 2$, seremos capazes de determinar a e b de forma unívoca a partir do conhecimento de z, já que $z = s + v = au + bw$ e portanto a e b satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z^T u &=& a(u^T u) + b(w^T u) \\ z^T w &=& a(u^T w) + b(w^T w) \end{array} \right.$$

O sistema acima terá solução única sempre que u e w forem linearmente independentes (do contrário sinal e ruído possuem precisamente a mesma estrutura e não faz sentido tentar separá-los).

Um caso mais geral: impondo estrutura flexível

Considere que a componente do sinal possui a forma

$$s = \sum_{n=1}^{K} a_n u^n,$$

onde a_n são escalares desconhecidos e u^n são vetores conhecidos (por exemplo, componentes senoidais de frequências diversas).
Considere também que o ruído possui a forma

$$v = \sum_{m=1}^{L} b_m w^m,$$

onde b_m são escalares desconhecidos e w^m são vetores conhecidos.
Se $N \geq K + L$ o problema tem solução única. Normalmente $K, L \approx N$.

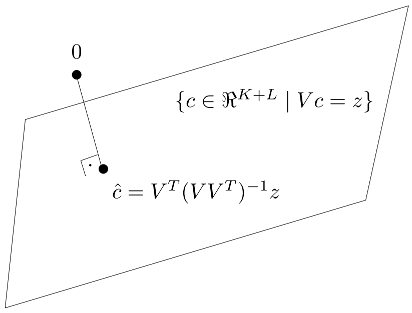
Um caso mais geral: formulação matricial

Sejam $U \in \mathbb{R}^{N\times K}$ e $W \in \mathbb{R}^{N\times L}$ as matrizes

$$U = \left[\begin{array}{c|c|c|c} u^1 & u^2 & \cdots & u^K \end{array}\right] \quad \text{e} \quad W = \left[\begin{array}{c|c|c|c} w^1 & w^2 & \cdots & w^L \end{array}\right]$$

Seja ainda $V = [U \quad W] \in \mathbb{R}^{N\times(K+L)}$ e $c = (a_1, \dots, a_K, b_1, \dots, b_L)^T$.
Queremos encontrar uma solução do sistema $z = Vc$, que possui muito mais variáveis do que restrições. Uma ideia é buscar uma solução de norma mínima:

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2}\|c\|^2 \\ \text{s.a} & Vc = z. \end{cases}$$



Um caso mais geral: solução do sistema $z = Vc$

Este problema de otimização admite como solução o estimador

$$\hat{c} = V^T(VV^T)^{-1}z,$$

de onde obtemos o estimador da componente do sinal

$$\hat{s} = U\hat{c}_{[1,\dots,K]} = UU^T(VV^T)^{-1}z.$$

Observe que $VV^T = (UU^T + WW^T)$ envolve a *matriz de correlação do sinal* UU^T e a *matriz de correlação do ruído* WW^T, que neste caso correspondem a estimadores a partir de espaços amostrais finitos (os conjuntos $\{u^1, u^2, \dots, u^K\}$ e $\{w^1, w^2, \dots, w^L\}$).

A formulação estocástica: flexibilizando a estrutura de s e v

Considere agora que os vetores de coeficientes

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_K)^T \text{ e } b = (b_1, b_2, \ldots, b_L)^T$$

são vetores aleatórios independentes, com distribuição uniforme e matrizes de covariância

$$E(aa^T) = I \text{ e } E(bb^T) = I.$$

Então

$$\begin{aligned} UU^T &= E(ss^T) \\ &= E(Hx(Hx)^T) \\ &= E(Hxx^TH^T) \\ &= HE(xx^T)H^T \\ &= \sigma^2 HH^T \end{aligned}$$

e

$$WW^T = E(vv^T) = Q.$$

O filtro de Wiener vetorial: reaproveitando a solução do caso anterior

Lembrando que anteriormente obtivemos

$$\hat{s} = UU^T(UU^T + WW^T)^{-1}z$$

e adotando a informação do modelo estatístico

$$UU^T = \sigma^2 HH^T \quad \text{e} \quad WW^T = Q,$$

temos a solução do filtro de Wiener estocástico, que é dado por

$$\begin{aligned} \hat{s} &= UU^T(UU^T + WW^T)^{-1}z \\ &= \sigma^2 HH^T(\sigma^2 HH^T + Q)^{-1}z \\ &= HH^T(HH^T + \sigma^{-2}Q)^{-1}z \end{aligned}$$

Lembrando ainda que B era o estimador tal que

$$\hat{s} = B^T z \quad \text{e} \quad s = Hx,$$

segue que

$$\begin{aligned} B &= \left(HH^T(HH^T + \sigma^{-2}Q)^{-1}\right)^T \\ &= (HH^T + \sigma^{-2}Q)^{-1}HH^T \end{aligned}$$

e portanto

$$\boxed{\hat{x}_{\text{VWF}} = H^T(HH^T + \sigma^{-2}Q)^{-1}z}$$

5.3 Filtro de Kalman

Filtro de Kalman: contexto de aplicação

Sistema dinâmico:

$$x^k = A^{k-1}x^{k-1} + m^{k-1}$$

onde

1. $x^k \in \mathbb{R}^N$ é um vetor de estado do sistema no instante k;
2. $A^k \in \mathbb{R}^{N\times N}$ representa as transformações do sistema (em geral de acordo com algum modelo físico);
3. m^k representa o erro do modelo físico, que satisfaz $E(m^k) = 0\ \forall k$, e a matriz de covariância $E(m^k(m^k)^T) = M^k$ é conhecida;
4. no instante k obtemos a medida/observação $z^k = H^k x^k + v^k$, onde H^k é conhecida, e v^k possui média zero e variância conhecida $E(v^k(v^k)^T) = Q^k$.

Filtro de Kalman: uso de estimadores a priori

Considere conhecido um estimador $\hat{x}^{k-1}$ do sistema no instante $k-1$, e suponha que este estimador é não-enviesado, ou seja, que

$$E(\hat{x}^{k-1}) = E(x^{k-1}).$$

De acordo com o modelo físico podemos estimar a evolução do sistema como

$$y^k = A^{k-1}\hat{x}^{k-1}.$$

Este estimador y^k também é não-enviesado, já que

$$\begin{aligned} E(y^k - x^k) &= E(A^{k-1}\hat{x}^{k-1} - x^k) \\ &= A^{k-1}E(\hat{x}^{k-1}) - E(x^k) \\ &= A^{k-1}E(x^{k-1}) - E(x^k) \\ &= E(A^{k-1}x^{k-1} - x^k) \\ &= E(m^k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Filtro de Kalman: estimadores a posteriori

Consideraremos estimadores do sinal $\hat{x}^k$ lineares nas observações z^k *e nos estimadores* y^k *obtidos a priori*:

$$\hat{x}^k = (C^k)^T z^k + (D^k)^T y^k,$$

onde as matrizes $C^k, D^k \in \mathbb{R}^{N\times N}$ devem ser estimadas.
A ideia é resolver o sistema de equações lineares (estocásticas)

$$\left\{ \begin{aligned} z^k &= H^k x^k + v^k \\ y^k &= x^k + w^k \end{aligned} \right.$$

usando a informação das matrizes de covariância dos resíduos v^k (ruído da medição) e w^k (erro da predição a priori).

Filtro de Kalman: solução do sistema

Fazendo muitas (...) contas o estimador de Kalman é dado pela expressão

$$\hat{x}^k = y^k + G^k(z^k - H^k y^k), \qquad \text{(preditor-corretor)}$$

onde

- $G^k = R^k(H^k)^T\left(Q^k + H^k R^k (H^k)^T\right)^{-1}$,
- Q^k é a matriz de correlação de w^k,
- R^k é a matriz de covariância de $w^k = y^k - x^k$, dada por $R^k = M^{k-1} + A^{k-1}P^{k-1}(A^{k-1})^T$

A covariância de $\hat{x}^k - x^k$ será dada por $P^k = (I - G^k H^k)R^k$
e será usada no passo $k+1$ para determinar R^{k+1}.