

Computação Musical - Áudio Digital

*slides do curso MAC0337/5900 – Computação Musical,
baseados no capítulo 2 do livro de F. Richard Moore
Elements of Computer Music*

Marcelo Queiroz

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

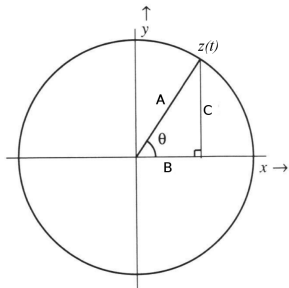
Versão de 25/09/2019

Conteúdo

- Representações sonoras
- Digitalização de som
- Mensuração do espectro
- Filtros digitais

Propriedades de funções trigonométricas

Uma função senoidal pode ser vista como a projeção de um movimento circular uniforme:



$$z(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} A \cos(\omega t + \varphi) \\ A \sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas cartesianas}} \equiv \overbrace{\begin{bmatrix} \text{magnitude} = A \\ \text{fase}(\theta) = \omega t + \varphi \end{bmatrix}}^{\text{coordenadas polares}}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{A} \quad \sin \theta = \frac{C}{A} \quad \tan \theta = \frac{C}{B}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2} \\ &= \frac{B^2 + C^2}{A^2} \\ &= 1 \text{ (Pitágoras)} \end{aligned}$$

Representação de funções trigonométricas

- Lembrando da propriedade:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

temos

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t) \cos(\varphi) + A \cos(\omega t) \sin(\varphi)$$

ou ainda

$$A \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

onde $a = A \cos(\varphi)$ e $b = A \sin(\varphi)$.

- Ou seja, qualquer senoide dada por uma amplitude A e uma fase inicial φ pode ser expressa como uma combinação de um seno e um cosseno (de mesma frequência e fase 0).

Representação de funções trigonométricas

- Por outro lado, se $x(t) = a \operatorname{sen}(\omega t) + b \operatorname{cos}(\omega t)$ para a, b arbitrários, podemos encontrar uma representação em amplitude (A) e fase (φ) resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a = A \operatorname{cos}(\varphi) \\ b = A \operatorname{sen}(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = A^2 (\operatorname{cos}(\varphi)^2 + \operatorname{sen}(\varphi)^2) \\ \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\operatorname{cos}(\varphi)} = \tan(\varphi) \end{cases}$$

Ou seja, $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ se definirmos

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),$$

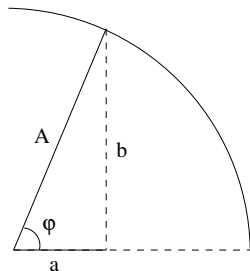
Coordenadas Polares e Cartesianas

- Isso mostra que as representações de senoides em coordenadas *polares* (A, φ) ou *cartesianas* (a, b) são equivalentes:

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = a \operatorname{sen}(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

onde

$$\begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \operatorname{sen} \varphi \end{cases} \iff \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{cases}$$



Números complexos

- A unidade complexa é definida a partir da equação $x^2 + 1 = 0$, que não admite solução em \mathbb{R} , porém a hipótese de existência de uma solução fora da reta real não é inconsistente (não gera contradição).
- Postula-se assim uma solução denotada por i que satisfaz $i^2 = -1$ (de onde segue também que $(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$).
- Números complexos têm a forma $x = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, e obedecem aos mesmos axiomas que os números reais em relação às operações elementares.

Relação de Euler

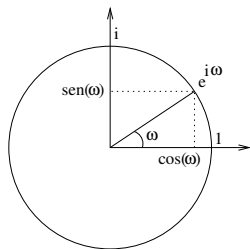
A Relação de Euler

$$e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\text{sen}(\omega)$$

explicita a representação Cartesiana do número complexo $e^{i\omega}$, que em coordenadas polares é dado por

$$|e^{i\omega}| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \text{sen}^2(\omega)} = 1$$

$$\angle e^{i\omega} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{sen}(\omega)}{\cos(\omega)} \right) = \tan^{-1} \tan(\omega) = \omega$$



Outras relações entre expoentes complexos, senos e cossenos

$$\begin{aligned}e^{-i\omega} &= e^{i(-\omega)} \\ &= \cos(-\omega) + i\text{sen}(-\omega) \\ &= \cos(\omega) - i\text{sen}(\omega)\end{aligned}$$

ou ainda, $e^{-i\omega} = (e^{i\omega})^*$ (* denota a operação de conjugação, definida por $(a + ib)^* = a - ib$). A partir das expressões $e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i\text{sen}(\omega)$ e $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\text{sen}(\omega)$ podemos obter:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}$$

$$\text{sen}(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

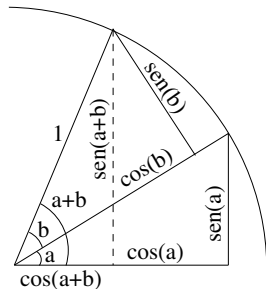
Relações trigonométricas

Usando a relação de Euler todas as relações trigonométricas clássicas são facilmente dedutíveis. Por exemplo, a relação $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$ pode ser verificada assim:

$$\begin{aligned}
 \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} + \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\
 &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})(e^{ib} - e^{-ib}) + (e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib})}{4i} \\
 &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})e^{ib} - e^{-ia}e^{ib} - (e^{ia} + e^{-ia})e^{-ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{-ib} - e^{ia}e^{-ib}}{4i} \\
 &= \frac{e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib} + e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}}{4i} \\
 &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} \\
 &= \sin(a + b)
 \end{aligned}$$

Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

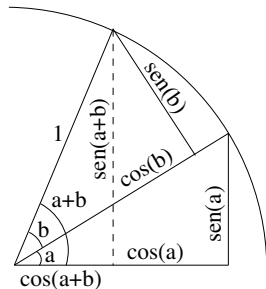


Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{(e^{ia} + e^{-ia})}{2} \frac{(e^{ib} + e^{-ib})}{2}$$

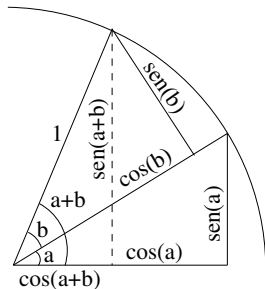


Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\begin{aligned} \cos(a) \cos(b) &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})}{2} \frac{(e^{ib} + e^{-ib})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})}{2} \end{aligned}$$

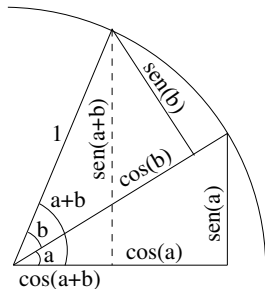


Relações trigonométricas

Exercício sugerido: tentar provar a mesma expressão a partir dessa figura:

Outro exemplo de dedução facilitada:

$$\begin{aligned} \cos(a) \cos(b) &= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})}{2} \frac{(e^{ib} + e^{-ib})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \end{aligned}$$

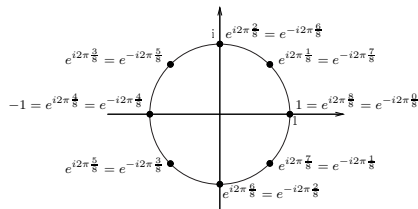


Raízes Complexas da Unidade

Dado $N \in \mathbb{N}$, considere a família de números complexos

$$\left\{ e^{i2\pi q \frac{1}{N}} \mid q = 0, 1, \dots, N-1 \right\},$$

que divide o círculo unitário em N partes iguais:



Exponenciais Complexas Discretas

Vamos verificar que a família de funções

$$f_q(k) = e^{i2\pi q \frac{k}{N}}, \quad q, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

é ortogonal em relação ao produto interno em \mathbb{C}^N definido por

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*.$$

Para simplificar a notação, vamos utilizar o símbolo $W = e^{i2\pi \frac{1}{N}}$ de tal forma que

$$(W^q)^k = W^{qk} = e^{i2\pi q \frac{k}{N}} = f_q(k).$$

Relações de Ortogonalidade

$$f_q(\cdot) \perp f_r(\cdot), \quad \forall q \neq r$$

e

$$\|f_q\|^2 = N.$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* = \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq r \\ N, & \text{se } q = r. \end{cases}$$

Exemplo:

Considere $N = 5$, $q = 2$ e $r = 3$. Então, para os vetores

$$a = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^2 \\ W^4 \\ W^6 \\ W^8 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^3 \\ W^6 \\ W^9 \\ W^{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{temos } \langle a, b \rangle = W^0 W^0 + W^2 W^{-3} + W^4 W^{-6} + W^6 W^{-9} + W^8 W^{-12} = \\ 1 + W^{-1} + W^{-2} + W^{-3} + W^{-4} = 0$$

$$e \\ \langle a, a \rangle = W^0 W^0 + W^2 W^{-2} + W^4 W^{-4} + W^6 W^{-6} + W^8 W^{-8} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Prova das Relações de Ortogonalidade

Se $q \neq r$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{rk})^* &= \sum_{k=0}^{N-1} (W^{(q-r)})^k = \frac{1 - (W^{(q-r)})^N}{1 - W^{(q-r)}} \\ &= \frac{1 - (W^N)^{(q-r)}}{1 - W^{(q-r)}} = \frac{1 - 1}{1 - W^{(q-r)}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{qk} (W^{qk})^* = \sum_{k=0}^{N-1} (W^0)^k = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N. \quad \blacksquare$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Seja $f = (f_0, \dots, f_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$. Vamos tentar encontrar um vetor $F = (F_0, \dots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ tal que

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}.$$

Usando as relações de ortogonalidade, podemos obter os valores de F_n tomando o produto interno de f pela exponencial complexa $f_q(\cdot)$.

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Multiplicando $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ por $e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$ e somando em relação à variável k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \right) e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi n \frac{k}{N}} e^{-i2\pi m \frac{k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} F_m N. \end{aligned}$$

ou seja, para $n = 0, \dots, N-1$, $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$.

Síntese e Análise

As equações $f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$ e $F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$ são

chamadas de **equação de síntese** e **equação de análise**, respectivamente. Representamos esta relação por $(f_0, \dots, f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_0, \dots, F_{N-1})$ ou simplesmente $f \longleftrightarrow F$.

Utilizamos as notações $F_n = A_n + iB_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ para as representações Cartesiana e polar de F_n .

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Linearidade: se $f \longleftrightarrow F$, $g \longleftrightarrow G$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\beta f + \gamma g \longleftrightarrow \beta F + \gamma G.$$

- Periodicidade:

As funções $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas pelas

$$\text{expressões } f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \text{ e } F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$$

são periódicas com período N .

- Propriedade da Média: $\sum_{k=0}^{N-1} f_k = F_0$ e $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n = f_0$.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Conjugação: $F_{-n} = F_n^*$.

- Simetria:

$$A_n \text{ e } \alpha_n \text{ são funções pares.} \quad f_{\text{par}} \longleftrightarrow A_n.$$

$$B_n \text{ e } \varphi_n \text{ são funções ímpares.} \quad f_{\text{ímpar}} \longleftrightarrow iB_n.$$

$$f(t) \text{ é par} \iff F_n \text{ é real e par.}$$

$$f(t) \text{ é ímpar} \iff F_n \text{ é imaginária e ímpar.}$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier

- Dualidade: Se $f \longleftrightarrow F$ então

$$F \longleftrightarrow N(f_0, f_{-1}, f_{-2}, \dots, f_{-(N-1)}).$$

- Deslocamento no Tempo: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(f_{-m}, f_{1-m}, \dots, f_{N-1-m}) \longleftrightarrow (W^0 F_0, W^m F_1, W^{2m} F_2, \dots, W^{(N-1)m} F_{N-1}).$$

- Deslocamento na Frequência: Se $f \longleftrightarrow F$ e $m \in \mathbb{Z}$ então

$$(W^0 f_0, W^m f_1, W^{2m} f_2, \dots, W^{(N-1)m} f_{N-1}) \longleftrightarrow (F_m, f_{1+m}, \dots, f_{N-1+m}).$$

Custo Computacional da DFT

O método direto de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{-kn}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$.

O método FFT (Fast Fourier Transform) permite obter o mesmo resultado em tempo $\mathcal{O}(N \log N)$.

Método Recursivo para a DFT

A ideia simples do cálculo da DFT por recursão reside em considerar $N = 2^B$ e particionar o vetor $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ em duas partes:

$$f_{\text{par}} = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$$

e

$$f_{\text{ímpar}} = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$$

e calcular separadamente as DFTs de cada um destes vetores, combinando os resultados.

Divisão e Conquista

$$\begin{aligned}
 \text{Note que } F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k \text{ par}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} + \sum_{k \text{ ímpar}} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-i2\pi n \frac{2k}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-i2\pi n \frac{2k+1}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{par } k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{\text{ímpar } k} e^{-i2\pi n \frac{k}{N/2}} \\
 &= \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{ímpar}})_n
 \end{aligned}$$

Custo Computacional

Note ainda que na expressão

$$F_n = \text{FFT}(f_{\text{par}})_n + e^{-i2\pi n \frac{1}{N}} \text{FFT}(f_{\text{impar}})_n$$

as duas FFTs são periódicas com período $\frac{N}{2}$ (ainda que $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$). Temos

$$\begin{aligned} C(N) &= 2C(N/2) + \alpha N \\ &= 2(2C(N/4) + \alpha N/2) + \alpha N = 4C(N/4) + 2\alpha N \\ &= 4(2C(N/8) + \alpha N/4) + 2\alpha N = 8C(N/8) + 3\alpha N \\ &= 2^3 C(N/2^3) + 3\alpha N \\ &= 2^4 C(N/2^4) + 4\alpha N \\ &= \dots \\ &= 2^B C(N/2^B) + B\alpha N \\ &= NC(1) + B\alpha N \\ &= \mathcal{O}(N \log N) \end{aligned}$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Retomando a equação de síntese $f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k}$

vemos que as funções elementares são dadas por

$$g_n[k] = e^{i2\pi \frac{n}{N} k},$$

ou seja, uma exponencial complexa com frequência $\hat{\omega}_n = 2\pi \frac{n}{N}$ radianos por amostra.

“Bins” da DFT e frequências reais

Para relacionar isso com o tempo, temos 1 amostra = $\frac{1}{R}$ segundos, de onde as frequências equivalentes em rad/seg e em Hz serão

$$\omega_n = R\hat{\omega}_n = 2\pi R \frac{n}{N} \text{ rad/seg}$$

$$\mathcal{F}_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = R \frac{n}{N} \text{ Hz}$$

“Bins” da DFT e frequências reais

Cada vetor DFT representa então coeficientes associados às frequências (em Hz)

$$0, \frac{R}{N}, 2\frac{R}{N}, 3\frac{R}{N}, \dots, \frac{N}{2}\frac{R}{N} = \frac{R}{2} \text{ (Nyquist)},$$

$$\left(\frac{N}{2} + 1\right)\frac{R}{N} = \left(-\frac{N}{2} + 1\right)\frac{R}{N}, \dots, (N - 1)\frac{R}{N} = -\frac{R}{N}.$$

DFT e componentes senoidais

Podemos escrever equivalentemente

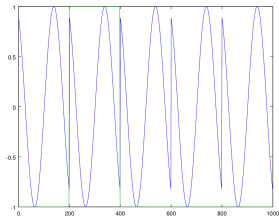
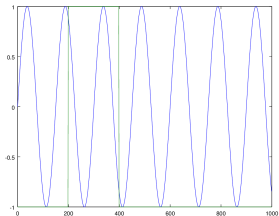
$$f[k] = \frac{1}{N} \left[F_0 + F_{N/2} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overbrace{F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_{N-n} e^{i2\pi \frac{N-n}{N} k}}^{h_n[k]} \right]$$

onde $F_n = \alpha_n e^{i\varphi_n}$ e

$$\begin{aligned} h_n[k] &= F_n e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + F_n^* e^{i2\pi \frac{-n}{N} k} = \alpha_n e^{i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{n}{N} k} + \alpha_n e^{-i\varphi_n} e^{i2\pi \frac{-n}{N} k} \\ &= \alpha_n \left(e^{i(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n)} + e^{-i(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n)} \right) = 2\alpha_n \cos\left(2\pi \frac{n}{N} k + \varphi_n\right). \end{aligned}$$

DFT e enjanelamento

É importante entender o que acontece quando computamos o espectro de um “recorte” de uma função senoidal. Pelas equações de análise e síntese o recorte será “interpretado” como um período de uma função que se repete a cada N amostras:



DFT e enjanelamento

Assim o espectro mostrará uma combinação de componentes que represente o sinal $z[k] = x[k] \cdot w[k]$ onde

$$w[k] = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq k \leq N - 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Teorema da Convolução: $xy \longleftrightarrow \frac{1}{N}X * Y$ onde

$$(X * Y)_n = \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_{n-m}.$$

Enjanelamento e convolução

Seja $z[k] = x[k] \cdot y[k]$. Então $Z[n]$ será dado por

$$\begin{aligned} Z[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} z[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{i2\pi k \frac{m}{N}} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y_l e^{i2\pi k \frac{l}{N}} \right) e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_m Y_l e^{i2\pi k \frac{m+l-n}{N}} \end{aligned}$$

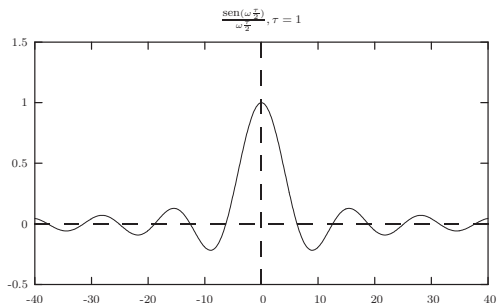
Enjanelamento e convolução

$$\begin{aligned}
 Z[n] &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_m Y_l \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k \frac{m+l-n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m Y_{n-m}
 \end{aligned}$$

Uma verificação bem parecida vale para os espectros de sinais $x[k]$ e $y[k]$ em tempo infinito.

Enjanelamento e convolução

No caso da janela quadrada, o espectro do sinal desejado é convoluído pela função sinc:



Exemplos em Pd.

Dualidade e teorema da convolução

Pela dualidade da transformada de Fourier, devemos esperar um resultado análogo para a convolução de sinais no domínio do tempo:

Teorema da Convolução (2): $x * y \longleftrightarrow XY$.

Seja $z[k] = (x * y)[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{k-m}$. Então $Z[n]$ será dado por

$$\begin{aligned} Z[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} z[k] e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{k-m} \right) e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-i2\pi n \frac{m}{N}} \right) \left(\sum_{l=-m}^{N-1-m} y_l e^{-i2\pi n \frac{l}{N}} \right) \\ &= X[n] \left(\sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{-i2\pi n \frac{l}{N}} \right) = X[n] \cdot Y[n]. \end{aligned}$$

Convoluções circular e linear

A expressão $(x * y)[k] = \sum_m x_m y_{k-m}$ pode ser interpretada de duas maneiras diferentes e úteis:

- No contexto de sinais discretos e de tempo finito, onde os vetores representando sinal e espectro são implicitamente periódicos, a expressão acima é computada como

$$(x * y)[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{(k-m) \bmod N}$$

e é chamada de convolução *circular*, para a qual vale o teorema da convolução recém-demonstrado.

Convoluções circular e linear

- No contexto de sinais de tempo infinito ($x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$), a convolução, chamada *linear*, admite a forma

$$(x * y)[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m},$$

e satisfaz um teorema similar:

$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega), \quad \forall \omega.$$

- Sinais de tempo finito podem ser interpretados como sinais de tempo infinito (com $y[k] = 0$, $\forall k \neq 0, 1, \dots, N-1$). Essa interpretação é útil para estudar filtros aplicados a fluxos de áudio ($x[k]$ é um sinal de duração indeterminada e $y[k]$ é um vetor finito de coeficientes do filtro).