MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

$1^{\underline{o}}$ semestre de 2019

Lista 6

1. Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem nem máximo nem mínimo locais.

2. Determine as dimensões do retângulo de área máxima cujo perímetro é $2p$.

3. Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.

4. Qual é o retângulo de maior área que pode ser inscrito num círculo de raio r?

5. (a) Mostre que entre os retângulos de uma certa área dada, o de menor perímetro é o quadrado.

(b) Mostre que entre os retângulos de um certo perímetro dado, o de maior área é o quadrado.

6. Um arame de comprimento L deve ser cortado em dois pedaços, um para formar um quadrado e outro para formar um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas por estes dois pedaços seja máxima? E para que seja mínima? Mostre que no segundo caso, o lado do quadrado é $\dfrac{2}{3}$ da altura do triângulo.

7. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é equilátero.

8. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

9. Um triângulo isósceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

10. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

11. Um fazendeiro tem 24 metros de cerca e quer cercar um campo retangular que tem fronteira com um rio (ou seja, só precisa cercar três lados). Quais são as dimensões do campo para que a área seja máxima?

12. Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de 1m^3 de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa R$ 10 o metro quadrado e na tampa, material de R$ 20 o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.

13. Duas partículas P e Q movem-se, respectivamente, sobre os eixos x e y. A função de posição de P é $x = \sqrt{t}$ e a de Q, $y = t^2 - \frac{3}{4}$. Determine o instante em que a distância entre P e Q seja a menor possível.

14. Um retângulo tem sua base no eixo x e seus vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$. Desses retângulos, quais as dimensões do que tem maior área?

15. Qual o ponto P da curva $y = x^2$ que se encontra mais próximo de $(3, 0)$? Seja $P = (a, b)$ tal ponto; mostre que a reta que passa por $(3, 0)$ e (a, b) é normal à curva em (a, b).

16. Seja (x_0, y_0), $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$ um ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 1$. Seja T a reta tangente à elipse no ponto (x_0, y_0).

(a) Verifique que T tem por equação $x_0x + 4y_0y = 1$.

(b) Determine x_0 de modo que a área do triângulo determinado por T e pelos eixos coordenados seja mínima.

17. Encontre o ponto da curva $y = \dfrac{2}{x}$, $x > 0$, que está mais próximo da origem.

18. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

19. Seja g definida e positiva no intervalo I. Seja $p \in I$. Prove: p será ponto de máximo (ou de mínimo) de $h(x) = \sqrt{g(x)}$ em I se, e somente se, p for ponto de máximo (ou de mínimo) de g em I.

20. Se f tiver um valor mínimo em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

21. Determine os valores máximos e mínimos (caso existam) da função dada, no intervalo dado.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ em $[-2, 3]$;

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 1]$;

(c) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$ em $[0, 3]$;

(d) $f(x) = x - 3\ln x$ em $[1, 4]$;

(e) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$ em $[0, 1]$;

(f) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ em $[0, \pi]$;

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ em $[-1, 2]$;

(h) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2}$ em $]0, 2[$.

22. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $f''(a)$ existe. Se a é um ponto de mínimo de f, mostre que $f''(a) \geq 0$. Pode-se melhorar o resultado para $f''(a) > 0$? E se a for um ponto de máximo, o que se pode dizer?

23. Suponha que f é diferenciável em $[a, b]$.

(a) Mostre que se o mínimo de f em $[a, b]$ for em a, então $f'(a) \geq 0$ e que, se for em b, então $f'(b) \leq 0$.

(b) Suponha que $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$. Mostre que $f'(x) = 0$ para algum $x \in\,]a, b[$.
Dica: f tem mínimo em $[a, b]$?

(c) Mostre que se $f'(a) < c < f'(b)$, então $f'(x) = c$ para algum $x \in]a, b[$.
Dica: Encontre uma função adequada e aplique o item anterior.

(d) Mostre que se f é derivável em $[a, b]$ e f' não se anula em $[a, b]$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$ ou estritamente decrescente em $[a, b]$.