MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

1º semestre de 2019

Lista 5

1. Calcule:

(a) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(b) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$;

(c) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

(d) $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{-4\pi}{3}\right)\right)$.

2. Mostre que a função $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa.

3. Responda, justificando.

(a) Qual a inversa da função $\dfrac{1}{x}$?

(b) E da função $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$?

4. Seja $f(x) = x + e^x$.

(a) Mostre que f admite função inversa g.

(b) Prove que o domínio e a imagem de f são iguais ao conjunto $\mathbb{R}$.

(c) Supondo que g é contínua, mostre que g é derivável e que $g'(x) = \dfrac{1}{1+e^{g(x)}}$.

(d) Calcule $g'(1)$.

5. Seja $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

(a) Mostre que f admite função inversa g.

(b) Supondo g é contínua, mostre que g é derivável e que $g'(x) = \dfrac{g(x)}{1+g(x)}$.

(c) Calcule $g'(1)$.

6. Calcule a equação da reta tangente a $f(x)$ no ponto dado:

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, em $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, em $x = -1$.

7. Calcule as derivadas.

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(1-x^2)$;

(b) $f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$;

(c) $f(x) = x\operatorname{arcsen}(1-x)$;

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3}{x}\right)$;

(e) $f(x) = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

(f) $f(x) = (1+\operatorname{arctg}x)^2$.

(g) $y = \operatorname{arctg}x$;

(h) $f(x) = \operatorname{arcsen}3x$;

(i) $g(x) = \operatorname{arcsen}x^3$;

(j) $f(x) = \operatorname{arctg}x^2$;

(k) $y = 3\operatorname{arctg}(2x+3)$;

(l) $y = \operatorname{arcsen}e^x$;

(m) $y = e^{3x}\operatorname{arcsen}2x$;

(n) $y = \dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{arctg}4x}$;

(o) $y = x^2 e^{\operatorname{arctg}2x}$;

(p) $y = \dfrac{x\operatorname{arctg}x}{\cos 2x}$;

(q) $y = e^{-3x} + \ln(\operatorname{arctg}x)$;

(r) $f(x) = \dfrac{e^{-x}\operatorname{arctg}e^x}{\operatorname{tg}x}$.

8. Seja $f(x) = |x-1|$. Mostre que não existe valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

9. Seja $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Mostre que não existe valor c tal que $f(2) - f(0) = f'(c)(2-0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

10. Suponha que f seja uma função ímpar e diferenciável em toda parte. Prove que para todo número positivo b, existe um número c em $]-b, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)}{b}$.

11. Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a-b|$, para quaisquer a e b reais.

12. Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum instante durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

Sugestão: Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, onde g e h são as funções posição dos dois corredores.

13. Suponha que f tenha derivada contínua no intervalo I e que f' nunca se anula em I. Prove que f é estritamente crescente em I ou estritamente decrescente em I.

14. Sejam f e g funções definidas em $]a, b[$ tais que $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in]a, b[$. Suponha que exista $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = g(c)$. Prove que $f(x) < g(x)$ para $x > c$ e que $f(x) > g(x)$ para $x < c$.

15. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.

16. Prove que a equação $x^3 - \dfrac{1}{1+x^4} = 0$ admite ao menos uma raiz real.

17. Mostre que a equação $x^5 + 10x + 3 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

18. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

19. Determine a para que a equação $x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$ admita uma única raiz real.

20. Seja f contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a) < f(b)$. Suponha que quaisquer que sejam s e t em $[a, b]$, $s \neq t$ implica $f(s) \neq f(t)$. Prove que que f é estritamente crescente em $[a, b]$.

21. Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que, para todo x em $[0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$. Prove que existe c em $[0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Sugestão: Considere a função $h(x) = f(x) - x$.

22. Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$;

(i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$;

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$;

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 - \cos x) \ln x$;

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$;

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$;

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec^3 x}{1-\cos x}$;

(p) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-4x}$;

(q) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - x}\right)$;

(r) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x-1}$;

(s) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos 3x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$;

(t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$;

(u) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(v) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x^2}$.

23. Sejam $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x$. Verifique que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ não existe. Há alguma contradição com a primeira regra de L'Hospital?

24. Estude as funções abaixo com relação ao crescimento, decrescimento e concavidade, determinando os pontos de inflexão (se existirem):

(a) $f(x) = x^4 - x^3$;

(b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

(c) $f(x) = xe^{-2x}$;

(d) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

(e) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$;

(f) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

(g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

(h) $f(x) = x \ln x$.

25. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$.

26. Esboce os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$;

(b) $f(x) = -x^3 + 3x + 4$;

(c) $f(x) = x^4 - 4x^3$;

(d) $f(x) = x^4 - 16x^2 + 48$;

(e) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

(f) $f(x) = x^{\frac{7}{3}}$;

(g) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$;

(h) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$;

(i) $f(x) = \cos^2 x$;

(j) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;

(k) $f(x) = \left(3 - \dfrac{6}{x}\right) e^{\frac{2}{x}}$;

(l) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$;

(m) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$;

(n) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$;

(o) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+4}$;

(p) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$;

(q) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$;

(r) $f(x) = e^{-x^2}$;

(s) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

(t) $f(x) = e^x - e^{3x}$;

(u) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$;

(v) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

(w) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$.

Execícios Extras

1. Suponha f derivável no intervalo aberto I. Prove que que se f for estritamente crescente em I então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Vale a volta?

2. Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número positivo c tal que seu quadrado é igual a 2. Note que isso prova a existência do número $\sqrt{2}$.