MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

1º semestre de 2019

Lista 4

1. Encontre a derivada da função.

1) $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$;

2) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$;

3) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$;

4) $y = 4\pi^2$;

5) $v = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$;

6) $y = e^{x+1} + 1$;

7) $y = \operatorname{cossec} x \operatorname{tg} x$;

8) $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$;

9) $y = 4\sec 5x$;

10) $y = e^{-5x}\cos 3x$;

11) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2z-1}}$;

12) $y = 5^{-1/x}$;

13) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

14) $y = \operatorname{sen} \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{sen} x}$;

15) $y = 2^{3^{x^2}}$;

16) $f(x) = \log_{10}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$;

17) $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$;

18) $h(y) = \ln(y^3 \operatorname{sen} y)$;

19) $y = \ln|x^3 - x^2|$;

20) $G(u) = \ln\sqrt{\dfrac{3u+2}{3u-2}}$;

21) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$;

22) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

23) $h(x) = \dfrac{2x^3+1}{x+2}$;

24) $y = \ln\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$;

25) $y = x\operatorname{sen}(\sqrt{x^5} - x^2)$;

26) $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{e^x + 1}$;

27) $y = \sqrt{x \operatorname{tg}^2 x}$;

28) $f(\theta) = \dfrac{\sqrt{\theta} + \operatorname{cossec}\theta}{\theta^3 + 3\theta^2}$;

29) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$;

30) $y = \dfrac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sec x}$;

31) $f(z) = z\operatorname{sen} z\cos z$;

32) $f(x) = \dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$;

33) $s(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(t - \operatorname{sen} t)}$;

34) $f(x) = \dfrac{2x}{(x + \sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}$;

35) $h(t) = \operatorname{cotg}(3t^2 + 5)$;

36) $f(u) = \dfrac{u^2}{\operatorname{sen} u \cos u}$;

37) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x}{x^2\cos x^2}$;

38) $g(x) = e^{x^2}\operatorname{sen} 3x$;

39) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$.

2. Em cada caso, verifique se f é derivável no ponto x_0. Decida também (justificando) se f é contínua ou não.

1) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1, \\ 1, & \text{se } x \leq 1. \end{cases} \qquad x_0 = 1.$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x, & \text{se } x > 0, \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & \text{se } x > 1, \\ x^4, & \text{se } x \leq 1. \end{cases} \qquad x_0 = 1.$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

3. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left[(3+x)^2\right] - \operatorname{sen} 9}{x}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável num ponto $a \in [0, +\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

5. Discuta as "soluções" abaixo para o problema: "Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."

"Solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

"Solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo, f não é derivável em $x = 0$.

"Solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim:

$$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$

como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

"Solução" 4. Temos

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x < 0; \\ x^2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja, $f'(0) = 0$.

6. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que $f\left(g(x)\right) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f'(1) = 2$ e $g(0) = 1$, calcule $g'(0)$.

7. Suponha que $F(x) = f(g(x))$ e $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ e $f'(6) = 7$. Encontre $F'(3)$.

8. Suponha que $w = u \circ v$ e $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $u'(0) = 3$, $u'(2) = 4$, $v'(0) = 5$ e $v'(2) = 6$. Encontre $w'(0)$.

9. Use a Regra da Cadeia para provar o que se segue.

1) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

2) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

10. Use a diferenciação logarítmica para achar a derivada da função.

1) $y = (2x+1)^5(x^4-3)^6$;
2) $y = \sqrt{x}e^{x^2}(x^2+1)^{10})$;
3) $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \ \operatorname{tg}^4 x}{(x^2+1)^2}$;
4) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$;
5) $y = x^x$;
6) $y = x^{1/x}$;
7) $y = x^{\operatorname{sen} x}$;
8) $y = (\operatorname{sen} x)^x$;
9) $y = (\ln x)^x$;
10) $y = x^{\ln x}$;
11) $y = x^{e^x}$;
12) $y = (\ln x)^{\cos x}$.

11. Sabe-se que r é uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ e paralela à reta $y = 6x - 1$. Determine r.

12. Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

13. A reta s passa pelo ponto $(3, 0)$ e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b). Determine (a, b) e a equação de s.

14. Sabe-se que r é uma reta que passa pela origem e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. Determine r.

15. Sabe-se que r é uma reta que passa pelo ponto $(0, 2)$ e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$. Determine r.

16. Ache os pontos da curva $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10$ nos quais a reta tangente é horizontal.

17. A reta $x = a$ intercepta a curva $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 3$ num ponto P e a curva $y = 2x^2 + x$ num ponto Q. Para que valor (ou valores) de a as retas tangentes a essas curvas em P e Q são paralelas?

18. A reta x passa pelo ponto $(3, 0)$ e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b). Determine (a, b) e a equação de s.

19. 1) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado com respeito ao comprimento de um dos lados é a metade do perímetro.
2) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação ao seu raio é numericamente igual à área da esfera.

20. Um mancha de óleo se alastra sempre circularmente. Ache a taxa de variação da área A da superfície da mancha em relação ao raio r do círculo para:

1) r arbitrário;
2) $r = 200$m.

21. Uma escada de 13m está apoiada em uma parece. A base da escada está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede a uma taxa constante de 6m/min. Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo, encostado à parede, quando a base da escada está a 5m da parede? (Resposta: 2,5 m/min)

22. Ao meio dia o braco A está 64km a oeste do barco B. O barco A navega para leste a 20km/h e o barco B navega para norte a 25km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às 13h e 12min? (Resp: -1 km/h)

23. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a altura. Sabendo que a areia é despejada a uma taxa de $0,01\text{m}^3$/min, qual a taxa de variação da altura do monte quando esta for de 3 metros? [*Lembrete:* volume do cone $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.] (Resp: $\frac{4}{900\pi} m^3/min$)

24. Uma lâmpada está no alto de um poste de 5m. Um menino de $1,6$m de altura se afasta do poste à velocidade de $1,2$m/s. A que taxa se move a ponta da sua sombra quando ele está a 6m do poste? A que taxa aumenta o comprimento da sua sombra? (Resp: 1,764m/s; 0,564m/s)

25. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1cm/min e sua área aumenta à razão de 2cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10cm e sua área é 100cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo? (Resp.: -1,6cm/min.)

26. Aumentando-se a aresta de um cubo ao longo do tempo, o seu volume cresce a uma taxa de 10cm^3/min num certo instante t_0. No instante t_0, sabendo que a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo? (Resp.: $\frac{4}{3}$ cm^2/min.)