MAT1351 - Licenciatura -IME (D) - 2019
Limites infinitos e indeterminações

Sabemos que *infinito* não é número. Entretanto na literatura, vemos muitas vezes expressões do tipo $(+\infty)+(+\infty)$ ou $0.\infty$. É importante ficar claro que nesse caso, apenas parece que estamos fazendo uma operação com *infinito*, mas não estamos! As expressões como as colocadas acima são apenas uma maneira de abreviar uma frase mais longa, que fala sobre algum cálculo de limite que estamos tentando fazer.

O objetivo desse trabalho é justamento trabalhar com essas expressões, deixando claro os seus significados (note que elas não têm significado em $\mathbb{R}$). Podemos dividí-las em dois grupos: as indeterminações e as propriedades dos limites infinitos.

Para facilitar a exposição, vamos convencionar que, durante todo o texto, o símbolo ∞ pode ser $+\infty$ ou $-\infty$.

Observamos também que tudo que estiver sendo dito abaixo para limites com $x \to p$, também vale para $x \to \infty$ ou para os limites laterais.

As Indeterminações

Em vários livros, encontramos a seguinte lista de expressões que são chamadas de *indeterminações*:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ +\infty-(+\infty),\ -\infty-(-\infty).$$

O que se quer dizer com isso é o seguinte. Suponhamos que estamos tentando calcular o limite de uma expressão dada, e ao calcularmos os limites das funções separadamente, percebemos que ele tende a uma dessas *expressões*. Então temos uma *indeterminação*, ou seja, *a priori*, não somos capazes de dizer, diretamente, qual o valor do limite em questão. *Mas*, isso *não* quer dizer que *o limite* seja indeterminado, um liminte nunca é indeterminado! Podemos apenas concluir que só olhando esta expressão não se pode dizer quem é o limite, ou seja, que o caminho que estamos tentando não nos leva a conclusão nenhuma. Temos então que procurar outra forma de calcular o limite.

Para deixar mais claro, vamos explicar com mais detalhes o caso da expressão $\frac{0}{0}$.

Dizer que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação significa dizer que se $\lim\limits_{x\to p} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to p} g(x)=0$, então não podemos concluir, baseado apenas nesses cálculos, qual o valor de $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Esta afirmação pode ser mostrada usando-se exemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3}=+\infty$

Observe que se calcularmos os limites de cada função separadamente, obtemos sempre a mesma forma *indeterminada* $\frac{0}{0}$. Mas, para cada uma das expressões envolvidas, é evidente que o limite é diferente.

Exercício 1. Para cada uma das outras expressões de *indeterminação* citadas acima, encontre exemplos, como feito no caso $\frac{0}{0}$, que mostram que realmente se tratam de indeterminações, ou seja, que você não é capaz de prever o resultado do limite em questão apenas olhando a expressão obtida. Em cada caso dê pelo menos 3 exemplos: um que o limite é 0, um que o limite é um número diferente de 0 e um que o limite é infinito.

Observação: 1^∞, 0^0 e ∞^0 também são indeterminações.

Propriedades de limites infinitos

Em outros casos, quando se lida com limites infinitos, chegamos em situações em que se percebe que seria possível fazer algumas "operações" com o infinito, e aí podem aparecer "expressões" do tipo: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(+\infty)(+\infty) = (+\infty)$, etc.

De novo, não estamos fazendo operação com limite! Estamos apenas abreviando uma afirmação sobre limites, que seria longa de escrever sempre.

Explicaremos o caso $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$. Quando escrevemos $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$, estamos na verdade querendo dizer que:

$$\text{“se } \lim_{x\to p} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to p} g(x) = +\infty, \text{ então } \lim_{x\to p}[f(x) + g(x)] = +\infty \text{ “ .}$$

Este seria o enunciado "correto".

Exercício 2. Explique, usando a definição intuitiva de limite, porque a afirmação acima é verdadeira.

Exercício 3. Decida, justificando intuitivamente, quando é possível determinar os limites $\lim_{x\to p}[f(x) + g(x)]$ e $\lim_{x\to p}[f(x)g(x)]$, dizendo se são $+\infty$ ou $-\infty$, nos diferentes casos onde $\lim_{x\to p} f(x)$ e $\lim_{x\to p} g(x)$ são ambos ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) ou, um deles, é um número L e o outro é $+\infty$ ou $-\infty$. Observe que os casos em que não é possível decidir alguma coisa, são exatamente os casos de indeterminação, discutidos acima.

Exercício 4. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty}[5x^3 - 2x^2 + 1]$

(b) $\lim_{x\to+\infty}[x - \sqrt{x+1}]$