MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

1º semestre de 2019

Lista 3

1. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

2. Mostre que $x^3 - 4x + 2$ tem pelo menos três raízes reais distintas.

3. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$;

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$;

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x+\sqrt{3-x})$;

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1})$;

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+9}+x+3)$;

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3+2x^2-3}{9x^4+x-8}$;

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}$;

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^{x+1}$;

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$;

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (2^x-3^x)$;

   (k) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{1-2^x}{1-3^x}$;

   (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+2x)^x$;

   (m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

   (n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{1-x^3}\right)$;

   (o) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;

   (p) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}$;

   (q) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (\ln(2x+1)-\ln(x+3))$;

   (r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;

   (s) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$;

   (t) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$;

   (u) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$;

   (v) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$.

4. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+2x)^x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

5. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to\infty}(x\cdot 0) = 0\,.$$

6. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função limitada e positiva e se $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função tal que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ então $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=\infty$.

   (b) Se $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função limitada e $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função tal que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ então $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (f(x)+g(x))=\infty$.

7. Dê exemplos de funções f e g tais que

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0}(f(x) - g(x)) = 1$.

   (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0}(f(x) - g(x)) \neq 0$.

8. Sejam $n > 0$ um número natural e $x > 0$ um número real.

   (a) Mostre que $n \leq x < n + 1$ implica que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} > \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n}$.

   (b) Usando (a), o Teorema do Confronto e que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$, mostre que $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$.