MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

1º semestre de 2019

Lista 2

1. Explique, com suas palavras, o significado da seguinte expressão:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

É possível que para alguma f tal equação seja verdadeira e, ao mesma tempo, $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa a seguinte expressão:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \text{ e } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7.$$

Nesta situação é possível que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Explique o significado de cada uma das expressões a seguir:

(a) $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$;

(b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$.

(c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$;

(d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$.

4. Para cada item esboce o gráfico de uma de função f que satisfaça as respectivas condições.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$ e f não está definida em 0;

(b) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e f é ímpar;

(c) $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

5. Esboce um possível gráfico de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(z) = 5$ para todo $z \in \mathbb{Z}$ e que seja ilimitada (isto é, para todo $r > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| > r$). O que podemos afirmar sobre $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

6. Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < -1; \\ x, & \text{se } -1 \leq x < 1; \\ (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

7. Determine os seguintes limites infinitos:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{6}{x-5}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{6}{x-5}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$.

8. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{r^4 - r^2 + 1}{r^5 + r^3 - r}$;

(b) $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{6t^2 + 5t}{(1-t)(2t-3)}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-4x+4}{x-2}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{|x-1|}{x-1}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{|x-1|}{x-1}$;

(i) $\displaystyle\lim_{x\to3^-} \frac{4}{x-3}$;

(j) $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{5}{3-x}$;

(k) $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{1}{(x-3)^3}$;

(l) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{2x+3}{x^2-1}$;

(m) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{|x|}$;

(n) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left[5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right]$;

(o) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$;

(p) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$;

(q) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{3x^2}{x + \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}$;

(r) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-3x+2}$;

(s) $\displaystyle\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{3x-8}-2}$;

(t) $\displaystyle\lim_{x\to0} \operatorname{tg}(3x) \operatorname{cossec}(6x)$;

(u) $\displaystyle\lim_{x\to0} x^3 \cos \frac{1}{x}$;

(v) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$;

(w) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x}$;

(x) $\displaystyle\lim_{x\to p} \frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}$;

(y) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$;

(z) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

9. A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq 1; \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

é contínua em 1? Justifique sua resposta.

10. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -ax - 1, & \text{se } x < 1; \\ 0, & \text{se } x = 1; \\ -x^2 + a^2(2-x)x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f seja contínua? Justifique sua resposta.

11. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto p dado. Justifique suas respostas.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x \neq 2; \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ e $p = 2$;

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $p = 0$.

12. Encontre a constante c para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & \text{se } x \leq 3; \\ cx^2 - 1, & \text{se } x > 3. \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2, & \text{se } x < 4; \\ cx + 20, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$

13. Um estacionamento cobra R\$3,00 pela primeira hora, ou parte dela, e R\$2,00 por hora sucessiva, ou parte, até o máximo de R\$10,00. Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido e analise as descontinuidades dessa função.

14. Se f e g são funções contínuas sobre $\mathbb{R}$, com $f(3) = 5$ e $\displaystyle\lim_{x\to3}(2f(x) - g(x)) = 4$, encontre $g(3)$.

15. Encontre um subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ e esboce o gráfico de uma possível função $f\colon D \to \mathbb{R}$ tal que f seja contínua, existam valores $x, y \in D$ tais que $f(x) < 0$, $f(y) > 0$ e que $f(z) \neq 0$, para todo $z \in D$. D pode ser igual a $\mathbb{R}$? E igual a um intervalo? Justifique suas respostas.

16. Para a função f cujo gráfico é dado na figura **??**, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

    (a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

    (b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

    (c) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

    (d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

    (e) $f(3)$.

    (f) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$.

    (g) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$.

    (h) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

    (i) $f(-2)$.

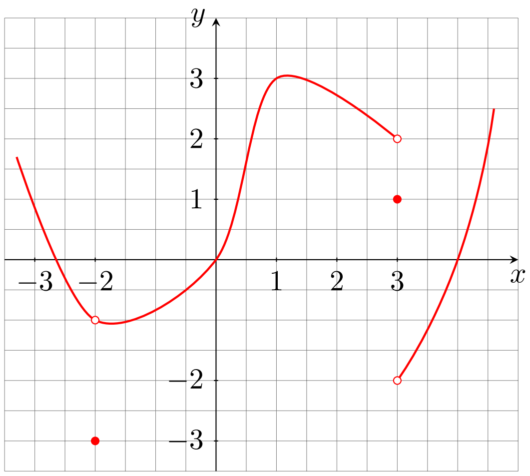

Figura 1

17. Para a função g cujo gráfico é dado na figura **??**, determine:

    (a) $\lim\limits_{x\to -6} g(x)$;

    (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$;

    (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$;

    (d) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$;

    (e) as equações das assíntotas verticais.

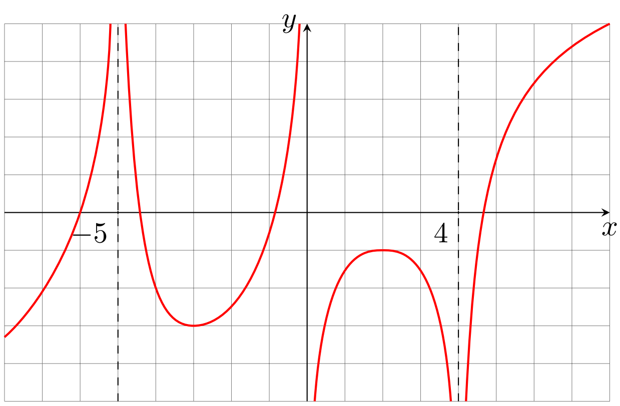

Figura 2

18. Para a função f cujo gráfico é dado na figura **??**, determine:

(a) $\lim_{x\to 3} f(x)$;

(b) $\lim_{x\to 7} f(x)$;

(c) $\lim_{x\to -4} f(x)$;

(d) $\lim_{x\to -9^-} f(x)$;

(e) $\lim_{x\to -9^+} f(x)$;

(f) as equações das assíntotas verticais.

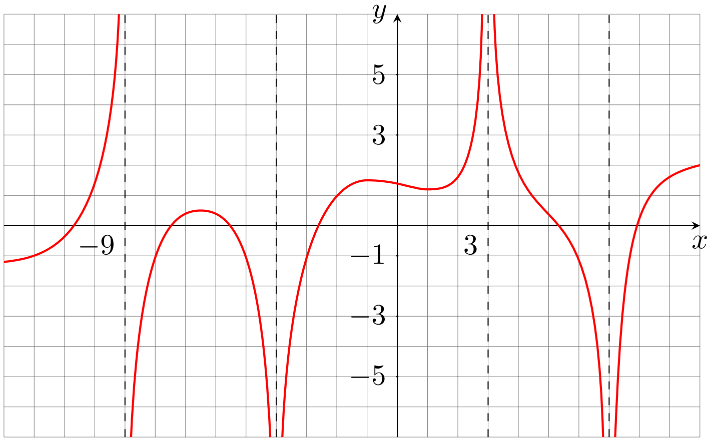

Figura 3

19. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \frac{x^6}{3} + \sqrt{x^2+1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$;

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) \cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right)$.

20. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq 2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x}$.

21. Ler em qualquer um dos livros da bibliografia do curso o texto sobre a definição precisa de limite.