**MAP 2110 - Modelagem e Matemática**
**4ª Lista**

1º Semestre de 2018

GRUPO A

**Exercício 1** Considere o triângulo cujos vértices s ao $A = (1, 2),\ B = (3, 1)$ e $C = (2, -2)$.

(a) Use projeções convenientemente para calcular a área desse triângulo.

(b) Use determinante convenientemente para calcular a área desse triângulo.

**Exercício 2** Considere o triângulo cujos vértices s ao $A = (1, 2, 3),\ B = (3, 1, 5)$ e $C = (2, -2, 1)$.
Use projeções convenientemente para calcular a área desse triângulo.

**Exercício 3** Considere o paralelepípedo que tem um vértice na origem de $\mathbf{R}^3$ e cujas três arestas incidentes nesse vértice são determinadas pelos vetores $\vec{a} = (1, 2, 1),\ \vec{b} = (3, 1, 1)$ e $\vec{c} = (1, -2, 1)$.

(a) Calcule o vértice desse paralelepípedo que é oposto à origem.

(b) Calcule o volume desse paralelepípedo.

**Exercício 4** Considere o hiperparalelepípedo de $\mathbf{R}^4$ que tem um vértice na origem, e cujas quatro arestas incidentes nesse vértice são determinadas pelos vetores $\vec{a} = (1, 2, 1, 3),\ \vec{b} = (3, 1, 1, -2),\ \vec{c} = (3, 1, 2, 1)$ e $\vec{d} = (1, -2, 1, 2)$.

(a) Calcule o vértice desse hiperparalelepípedo que é oposto à origem.

(b) Calcule o volume desse hiperparalelepípedo.

GRUPO B

**Exercício 5** Seja $E = \mathbf{R}^3$. Neste exercício, $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ representará o vetor $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$.
Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in E$ considere o vetor $u \times v \in E$ definido por

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Note que podemos escrever formalmente

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$

Para $u, v, w \in E$, justifique as seguintes afirmações (a), (b), (c) e (d) e resolva o item (e):

(a) $u \times v = (0, 0, 0)$ se $u$ é múltiplo de $v$.

(b) $u \times v$ é ortogonal a $u$ e a $v$.

(c) $\langle\ u \times v \mid w\ \rangle = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$.

(d) $\|u \times v\| =$ área do paralelogramo de vértice na origem e arestas incidentes nesse vértice determinadas pelos vetores $u$ e $v$.

(e) Use as informações anteriores para obter um vetor $\vec{a}$ que seja ortogonal ao plano de equação

$$X = (1, 3, -4) + t(2, 3, 1) + s(4, -3, 0), t, s \in \mathbf{R}$$

e seja unitário.

**Exercício 6** Considere o plano $\pi$ de equação $3x + 4y - 4z = 12$.

(a) Escreva a equação do plano $\pi$ na forma vetorial.

(b) Determine dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^3$ que sejam paralelos ao plano $\pi$, sejam ortogonais e tenham norma igual a 1.

(c) Determine um vetor $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$ que seja ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e tenha norma igual a 1.

**Exercício 7** Considere o plano $\pi$ que passa pelos pontos $A = (0, 1, -1), B = (0, 1, 2)$ e $C = (1, -1, 3)$. Considere também o ponto $P = (2, 3, 4)$.

(a) Mostre que o vetor $v = (1, 1/2, 0)$ é ortogonal ao plano $\pi$.

(b) Encontre a reta que passa por $P$ e é perpendicular ao plano $\pi$.

(c) Encontre o plano que passa por $Q = (2, 1, 1)$ e é paralelo ao plano $\pi$.

GRUPO C

**Lembrete:**

Kernel ou Núcleo de uma transformação linear $T : V \to W$:
$$Ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = O\}.$$

Imagem de uma transformação linear $T : V \to W$:
$$Im(T) = \{y \in W \mid \exists x \in V \text{ tal que } T(x) = y\}.$$

**Exercício 8** Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}^3$ definida por
$$T(A) = (a_{11} + 2a_{12}, 3a_{22}, a_{11} - a_{21}).$$

(a) Mostre que $T$ é linear.

(b) Quem é o kernel de $T$?

(c) $T$ é injetora?

**Exercício 9** Seja $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 1) = (1, 2, 3) \quad \text{e} \quad T(2, 1) = (3, -1, 1). \tag{1}$$

(a) Calcule $T(\vec{v})$ para $\vec{v} = (5, 4)$.

(b) Quantas transformações lineares satisfazendo (1) existem? Justifique sua resposta.

**Exercício 10** Seja $T : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ uma transformação linear.

(a) Mostre que o kernel de $T$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^m$.

(b) Mostre que a imagem de $T$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^p$.

**Exercício 11** Prove a afirmação abaixo:

(a) Se $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ é transformação linear e $u, v \in \mathbf{R}^n$ são vetores linearmente dependentes, então $T(u)$ e $T(v)$ são linearmente dependentes.

(b) Se $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ e $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ são transformações lineares e $S$ não é injetora, então $T \circ S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ não é injetora.

(c) Se $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ é linear e $\ker T = \{\vec{O}\}$ então $T$ é injetora.

**Exercício 12** Sejam $V, W$ espaços vetoriais sobre $\mathbf{R}$. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que $T$ é injetora se e somente se $Ker(T) = \{O\}$.

**Exercício 13** *(Transformação linear preserva dependência linear)* Sejam $V, W$ espaços vetoriais sobre $\mathbf{R}$. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é l.d. então $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\} \subset W$ é l.d.

**Exercício 14** *(Transformação linear* **injetora** *preserva independência linear)* Sejam $V, W$ espaços vetoriais sobre $\mathbf{R}$. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que $T$ é injetora se e somente se para qualquer subconjunto l.i. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ tem-se $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\} \subset W$ também l.i.

**Exercício 15** Em cada item abaixo, dê um exemplo do que se pede:

(a) Exemplo de transformação linear $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ e vetores $u, v \in \mathbf{R}^n$ linearmente independentes tais que $T(u)$ e $T(v)$ são linearmente dependentes.

(b) Exemplo de transformações lineares $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ e $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ com $T$ injetora mas com $T \circ S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ não injetora.

(c) Exemplo de transformação linear $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ sobrejetora mas não injetora.

$\boxed{\text{GRUPO D}}$

**Proposição 1** *Se $V$ e $W$ são espaços vetoriais de dimensão finita, e $T : V \to W$ é uma transformação linear, então as dimensões de $V, Ker(T) \subset V$ e $Im(T) \subset W$ satisfazem:*

$$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim V.$$

**Exercício 16** Responda cada um dos itens abaixo, e justifique.

(a) Existe transformação linear sobrejetora $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ ?

(b)Existe transformação linear injetora $G : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ ?

(c) Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ definida para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ por

$T(A) = (a_{11} - a_{22})t^5 + 3a_{12}t^4 - 3a_{21}t^3 + (2a_{11} - 2a_{22} + 3a_{12} - 3a_{21})$.

Qual a dimensão da imagem de $T$?

(d) A transformação linear $T$ do item anterior é injetora? É sobrejetora?