MAP2110 Modelagem e Matemática

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2018

$3^{\underline{a}}$ Lista

Parte A: Ortogonalidade, Projeções

Exercício 1 Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \quad | \quad \rangle$. Seja V_0 o subespaço vetorial de V gerado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, isto é,

$$\begin{aligned} V_0 &= L(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}) \\ &:= \{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Mostre que u é ortogonal a V_0 se e só se u é ortogonal a v_j para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Exercício 2 Considere os pontos $A = (1, 2, 1)$ e $B = (1, 4, 3)$ de $\mathbf{R}^3$, e os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 2, 3)$ de $\mathbf{R}^3$.

Determine:

(a) a equação vetorial do plano Γ que passa por A e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) a equação vetorial da reta que passa por A e por B.

(c) a equação vetorial da reta que passa por B e é perpendicular ao plano Γ.

Exercício 3 Considere $\mathbf{R}^5$ com o produto interno usual.

Sejam $\vec{w} = (2, 2, 4, 1, 0)$ e $\vec{r} = (5, 4, 6, 8, 10)$.

(a) Calcule a projeção de $\vec{r}$ na direção de $\vec{w}$.

(b) Calcule a projeção de $\vec{r}$ no hiperplano (subespaço vetorial de dimensão $5 - 1 = 4$) ortogonal a $\vec{w}$.

Exercício 4 Considere $\mathbf{R}^5$ com o produto interno usual.

Sejam $\vec{u} = (1, 1, 2, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 3, 4, -2, -3)$, e $\vec{r} = (5, 4, 6, 8, 10)$.

Calcule a projeção de $\vec{r}$ no subespaço vetorial gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, calcule a melhor aproximação de $\vec{r}$ da forma $\tilde{r} = a\vec{u} + b\vec{v}$, pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Exercício 5 Em $\mathbf{R}^4$ considere o hiperplano π de equação geral $3x - 2y + 4z + w = 12$ e a reta $\mathcal{R}$ de equação vetorial $(x, y, z, w) = (2, 1, 3, 2) + t(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $t \in \mathbf{R}$, onde $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq \vec{O}$.

(a) Determine um vetor *unitário* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de forma que a reta $\mathcal{R}$ seja ortogonal ao hiperplano π.

(b) Escreva a equação vetorial do hiperplano π.

(c) Determine duas retas paralelas a π que passem pela origem e sejam ortogonais entre si.

Parte B: Gram-Schmidt

Exercício 6 Ortogonalize a base $B = \{(1, 1, 1), (2, 3, 0), (5, 0, 0)\}$ de $\mathbf{R}^3$ usando o Método de Gram-Schmidt.

Exercício 7 Considere $V = \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ com o produto interno

$$\langle\, p \mid q \,\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Seja $B = \{v_0, v_1, v_2\}$ a base de V em que $v_0(t) = 1, v_1(t) = t, v_2(t) = t^2$.

Aplique o Método de Gram-Schmidt na base B para obter uma base ortogonal de V.

Parte C: Melhor Aproximação / Método dos Mínimos Quadrados

Exercício 8 Considere o espaço vetorial $V = \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ dos polinômios de grau ≤ 3 com o produto interno

$$\langle\, p \mid q \,\rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Seja $V_0 = \mathcal{P}_1(\mathbf{R})$ o subespaço vetorial de V dos polinômios de grau ≤ 1.

Seja p o polinômio definido por $p(t) = t^3 - t$.

Ache a melhor aproximação de p em V_0 (isto é, aproxime p pelo Método dos Mínimos Quadrados por um polinômio de grau ≤ 1 usando o Método dos Mínimos Quadrados, segundo o produto interno dado).

Exercício 9 Considere o espaço vetorial $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ com o produto interno

$\langle\, H \mid K \,\rangle := h_{11}k_{11} + 2h_{12}h_{12} + 3h_{21}h_{21} + 4h_{12}h_{22}$. Seja $V_0 = \mathcal{MS}_{2\times 2}(\mathbf{R})$ o subespaço vetorial de V das matrizes simétricas 2×2. Ache a melhor aproximação de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ em V_0.

Parte D: Mudança de Base

Exercício 10 Considere as bases de $\mathbf{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{(1,2,1),\ (3,1,1),\ (1,-2,1)\} \text{ e } \mathcal{C} = \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}.$$

(a) Ache a matriz de mudança de base da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$.

(b) Ache as coordenadas de $v = 5(1,2,1) + 7(3,1,1) + 9(1,-2,1) \in \mathbf{R}^3$ na base $\mathcal{C}$.

Sugestão: Ler resumo sobre matriz de mudança de base.

Parte E: Subconjuntos Especiais

As proposições citadas nesta parte estão no texto "notas-de-aula-Subconjuntos_Especiais".

Exercício 11 Prove a proposição 1 Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 12 Prove a proposição 2 Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 13 Prove a proposição 3 das Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 14 Prove a proposição 4 das Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 15 Prove a proposição 5 das Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 16 Prove a proposição 6 das Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 17 Prove a proposição 7 das Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 18 Prove a proposição 8 das Notas de Aula sobre Subconjuntos Especiais.

Exercício 19 Seja $V = C(\mathbf{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas em $\mathbf{R}$. Em cada item, decida se o conjunto dado é ou não um subespaço vetorial de V. Justifique sua resposta.

(a) $U = \{v \in V \mid v'(t) + 2v(t) = 0,\ \forall t \in \mathbf{R}\}$.

(b) $W = \{p \in V \mid p \text{ é polinômio de grau } = 4\}$.

Parte F: Determinantes

Exercício 20 Seja $d : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ uma função determinante. Use os Axiomas 1,2,3 e 4 que definem função determinante (e também, Axioma 3' e Axioma 3a se for conveniente) para calcular $d(A)$ no caso em que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercício 21 Seja $f : \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathbf{R}$ a função que a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ com linhas A_1, A_2, A_3 associa

$$f(A) = f(A_1, A_2, A_3) := a_{11}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{22}a_{32} + a_{13}a_{23}a_{33}.$$

(a) f satisfaz o Axioma 1 da definição de determinante?

(b) f satisfaz o Axioma 2 da definição de determinante?

(c) f satisfaz o Axioma 3 da definição de determinante?

(d) f satisfaz o Axioma 4 da definição de determinante?

Exercício 22 Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ foi escalonada pelo Método de Escalonamento de Gauss, e a matriz obtida foi $A_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

No escalonamento foram feitas sucessivamente as seguintes operações:
Operação 1: a primeira e a terceira linhas foram permutadas,
Operação 2: a primeira linha foi dividida por 3,
Operação 3: da quarta linha tirou-se a primeira linha,
Operação 4: a segunda linha foi dividida por 2,
Operação 5: da terceira linha tirou-se o 4 vezes a segunda linha,
Operação 6: da quarta linha tirou-se a segunda linha,
Operação 7: a terceira e a quarta linhas foram permutadas,
Operação 8: a terceira linha foi dividida por 3,
Operação 9: a quarta linha foi dividida por -8,
Calcule o determinante de A.