MAP2110 Modelagem e Matemática
$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2018

Subespaço Vetorial, Subespaço Afim, Soma e Soma Direta, Complemento Ortogonal

0.1 Subespaço Vetorial

Definição 1 *Um subconjunto U de um espaço vetorial V é dito um subespaço vetorial de V se U com a adição e a multiplicação por escalar herdadas de V torna-se um espaço vetorial.*

Proposição 1 *Um subconjunto $S \subset V$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se,*
é não vazio,
é fechado para a adição (isto é, $\vec{u} + \vec{v} \in S$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S$), e
é fechado para a multiplicação por escalar (isto é, $\lambda\vec{u} \in S$, $\forall \vec{u} \in S$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$).

Prova: Exercício.

0.2 Subespaço Afim

Definição 2 *Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto $W \subset V$ é dito um subespaço afim de V se existe um vetor $w_0 \in V$ e um subespaço vetorial $V_0 \subset V$ tal que*

$$W = \{w_0 + v \mid v \in V_0\}.$$

Nesse caso, é usual escrever $W = w_0 + V_0$.

Interpretação Geométrica

No caso em que V é o plano ($V = \mathbf{R}^2$) ou o espaço tridimensional ($V = \mathbf{R}^3$), o subespaço afim $W = w_0 + V_0$ é o subconjunto obtido quando se translada o subespaço vetorial V_0 de forma que sua origem passe a ocupar a posição w_0. Assim, se $V_0 \subset \mathbf{R}^2$ (ou $V_0 \subset \mathbf{R}^3$) é uma reta (passando pela origem, já que é um subespaço vetorial, $W = w_0 + V_0$ é a reta paralela a V_0 que passa pelo "ponto" w_0. Se $V_0 \subset \mathbf{R}^3$ é um plano (passando pela origem, já que é um subespaço vetorial, $W = w_0 + V_0$ é o plano paralelo a V_0 que passa pelo "ponto" w_0.

Proposição 2 *Considere um sistema linear de m equações e n incógnitas $Ax = b$ que tenha pelo menos uma solução $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbf{R}^n$. Então o conjunto das soluções desse sistema é um subespaço afim de $\mathbf{R}^n$.*

Prova: Exercício.

0.3 Soma e Soma Direta de Subespaços Vetoriais

Definição 3 *Seja V um espaço vetorial e sejam V_1 e V_2 dois subespaços vetoriais de V. O subconjunto $W \subset V$ definido por*

$$W = \{v_1 + v_2 \; | v_1 \in V_1 \text{ e } v_2 \in V_2\}$$

é chamado de "soma de V_1 e V_2".

Nesse caso, é usual escrever $W = V_1 + V_2$.

Proposição 3 *Sejam V_1 e V_2 subespaços vetoriais de V. Então:*

(a) $V_1 \cap V_2$ é um subespaço vetorial de V.

(b) $V_1 + V_2$ é um subespaço vetorial de V.

(c) $V_1 \cup V_2$ pode não ser um subespaço vetorial de V.

Prova: Exercício.

Proposição 4 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Sejam Y e Z dois subespaços vetoriais de V e $W = Y + Z$. Se $A = \{y_1, \ldots, y_r\}$ é uma base de Y e $B = \{z_1, \ldots, z_s\}$ é uma base de Z então $C = A \cup B = \{y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s\}$ é um conjunto de geradores de W.*

Prova: Exercício.

Definição 4 *Sejam V um espaço vetorial, V_1 e V_2 dois subespaços vetoriais de V e $W = V_1 + V_2$. Dizemos que W é "soma direta de V_1 e V_2" se $V_1 \cap V_2 = \{O\}$.*

Nesse caso, é usual escrever $W = V_1 \oplus V_2$ para indicar que a soma é direta.

Proposição 5 *Seja V um espaço vetorial* **de dimensão finita**. *Sejam Y e Z dois subespaços vetoriais de V tais que a soma $W = Y + Z$ é direta. Então* *(a) Se* $A = \{y_1, \ldots, y_r\} \subset Y$ *é linearmente independente e* $B = \{z_1, \ldots, z_s\} \subset Z$ *é linearmente independente, então* $C = A \cup B = \{y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s\}$ *é linearmente independente.*

(b) Se $A = \{y_1, \ldots, y_r\}$ *é uma base de* Y *e* $B = \{z_1, \ldots, z_s\}$ *é uma base de* Z *então* $C = A \cup B = \{y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s\}$ *é uma base de* W*.*

Prova: Exercício.

Proposição 6 *Sejam* V *um espaço vetorial* **de dimensão finita**, V_1 *e* V_2 *dois subespaços vetoriais de* V *e* $W = V_1 + V_2$*. Então a soma* $W = V_1 + V_2$ *é direta se e somente se* $\dim W = \dim V_1 + \dim V_2$.

Prova: Exercício.

0.4 Complemento Ortogonal

Definição 5 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle \ \mid \ \rangle$ *e seja* $W \subset V$ *um subespaço vetorial de* V*. O complemento ortogonal de* W *é definido por*

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle \ v \mid w \ \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Proposição 7 *Seja* V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle \ \mid \ \rangle$ *e seja* $W \subset V$ *um subespaço vetorial de* V*. Então o complemento ortogonal* $W^{\perp}$ *de* W *é um subespaço vetorial de* V*.*

Proposição 8 *Seja* V *é um espaço vetorial com produto interno, de dimensão finita, e seja* $W \subset V$ *um subespaço vetorial de* V*.*

Então $V = W + W^{\perp}$ *e* $W \cap W^{\perp} = \{O\}$.

(Logo, $V = W \oplus W^{\perp}$*.)*

Prova: Exercício.