MAP2110 Modelagem e Matemática

1º Semestre de 2018

Mudança de base

Seja V um espaço vetorial de dimensão n ($n \in \mathbf{N}$) e sejam $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$ duas bases de V.

Lembremos que se

$$\vec{v} = \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \cdots + \beta_n\vec{b}_n$$

dizemos que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ são as componentes de $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$, e representamos matricialmente $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$ por

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Analogamente, se

$$\vec{v} = \gamma_1\vec{c}_1 + \gamma_2\vec{c}_2 + \cdots + \gamma_n\vec{c}_n$$

dizemos que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ são as componentes de $\vec{v}$ na base $\mathcal{C}$ e representamos matricialmente $\vec{v}$ na base $\mathcal{C}$ por

$$[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Proposição 1 *Se V um espaço vetorial de dimensão n ($n \in \mathbf{N}$) e $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$ são duas bases de V, então existe uma matriz $M = M_{\mathcal{CB}}$, $n \times n$, que transforma a representação matricial de um vetor $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$ em sua representação matricial na base $\mathcal{C}$ da seguinte forma:*

$$[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{CB}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Prova: Feita em sala. Na verdade, mostramos que $M_{\mathcal{CB}}$ é a matriz cuja j-ésima coluna tem as componentes de b_j na base $\mathcal{C}$.

Definição 1 *A matriz $M = M_{\mathcal{CB}}$, $n \times n$, mencionada na proposição acima, é chamada matriz de mudança de base da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$.*