

MAP2110 Modelagem e Matemática

1º Semestre de 2018

2ª Lista

A monitora vai escolher os exercícios que devem ser resolvidos para serem corrigidos.

Espaços Vetoriais

Exercício 1 Mostre que

$\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbf{R}) = \text{conjunto das matrizes } 2 \times 2 \text{ com entradas reais,}$
com a adição e a multiplicação por escalar usuais dadas abaixo, é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$
$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Exercício 2 Mostre que

$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\},$
com a adição e a multiplicação por escalar herdadas do $\mathbf{R}^3$, é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

Exercício 3 Mostre que

$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 1\},$
com a adição e a multiplicação por escalar herdadas do $\mathbf{R}^3$, **não é** um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

Exercício 4 Mostre que

$V = \mathcal{P}(\mathbf{R}) = \text{conjunto dos polinômios a coeficientes reais}$
com a adição e a multiplicação por escalar usuais, é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

Para $p = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ e $q = b_0 + b_1t + \cdots + b_mt^m$, com $m \leq n$ [para $m \geq n$ é análogo], podemos escrever $q = b_0 + b_1t + \cdots + b_mt^m + 0t^{m+1} + \cdots + 0t^n$, e

$$\begin{aligned} p + q &= (a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) + (b_0 + b_1t + \cdots + b_mt^m + 0t^{m+1} + \cdots + 0t^n) \\ &:= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_m + b_m)t^m + \\ &\quad + (a_{m+1} + 0)t^{m+1} + \cdots + (a_n + 0)t^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda p &= \lambda(a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) \\ &:= \lambda a_0 + \lambda a_1t + \cdots + \lambda a_nt^n.\end{aligned}$$

Exercício 5 Mostre que o subconjunto $V_0 = \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ de $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ dado por $V_0 = \mathcal{P}_2(\mathbf{R}) =$ conjunto dos polinômios de grau ≤ 2 a coeficientes reais, com a adição e a multiplicação herdadas de $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$, é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

Exercício 6 Mostre que o subconjunto $\tilde{V}$ de $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ dado por $\tilde{V} =$ conjunto dos polinômios de grau 2 a coeficientes reais, com a adição e a multiplicação herdadas de $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$, **não** é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

Exercício 7 Mostre que conjunto das sequências de números reais $V = \mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \mid x_k \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}\}$, com a adição e a multiplicação por escalar usuais dadas abaixo, é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots) \\ &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k, x_{k+1} + y_{k+1}, \dots), \\ \lambda x &= \lambda(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \\ &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k, \lambda x_{k+1}, \dots).\end{aligned}$$

Exercício 8 Mostre que o subconjunto V_0 de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ formado pelas sequências que são **progressões geométricas** $V_0 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \mid \exists a, r \in \mathbf{R} \text{ tais que } x_k = ar^k, \forall k \in \mathbf{N}\}$, com a adição e a multiplicação por escalar usuais herdadas de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, **não** é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

Grupo Dependência linear, bases, dimensão

Exercício 9 Considere os seguintes vetores de $\mathbf{R}^4$:

$$\vec{u} = (1, 2, 3, 4), \vec{v} = (3, 6, 9, 12), \vec{w} = (-1, 2, -3, 4).$$

Em cada um dos itens abaixo, decida se os vetores dados são linearmente independentes ou linearmente dependentes.

- (a) $\vec{u}$ e $\vec{w}$. (b) $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Exercício 10 Considere $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$, e $\vec{w} = (0, 1, 2)$.

(a) Decida se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é conjunto gerador de $\mathbf{R}^3$. Justifique.

(a) Decida se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é base de $\mathbf{R}^3$. Justifique.

Exercício 11 Mostre que se x, y, z, w são 4 vetores em $\mathbf{R}^3$, então eles são linearmente dependentes.

Exercício 12 Mostre que num espaço vetorial qualquer, se x e y são vetores linearmente independentes, então $u = x + y$ e $v = x - y$ também são linearmente independentes.

Exercício 13 Considere o espaço $V = \mathcal{P}_4(\mathbf{R})$ dos polinômios de grau ≤ 4 com coeficientes reais.

Decida se os polinômios abaixo são ou não *linearmente independentes*:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, & p_2(x) &= 4 + 0x + 1x^2 + 2x^3 \\ p_3(x) &= 5 + 1x + 0x^2 + 3x^3, & p_4(x) &= 1 + 4x + 3x^2 + 2x^3 \end{aligned}$$

Justifique sua resposta.

Exercício 14 Considere o espaço $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ dos polinômios com coeficientes reais.

Decida se os polinômios abaixo são ou não *linearmente independentes*:

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, \dots, p_k(x) = x^k$$

são ou não *linearmente independentes*:

Justifique sua resposta.

Exercício 15 Considere o espaço $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ dos polinômios com coeficientes reais.

Decida se os polinômios abaixo são ou não *linearmente independentes*:

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, \dots, p_k(x) = x^k, p_{k+1}(x) = x^{k+1}, \dots$$

são ou não *linearmente independentes*:

Justifique sua resposta.

Exercício 16 Considere o espaço $V = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ das sequências de números reais.

Decida se as sequências abaixo são ou não *linearmente independentes*:

$$\begin{aligned} x &= (1, 2, 3, 4, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) & y &= (4, 0, 1, 2, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) \\ z &= (5, 1, 0, 3, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) & w &= (1, 4, 3, 2, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

são ou não *linearmente independentes*:

Justifique sua resposta.

Exercício 17 Considere o espaço $V = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ das sequências de números reais.

Decida se as sequências abaixo são ou não *linearmente independentes*:

$$x = (1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) \quad y = (0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots)$$

$$z = (0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots) \quad w = (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots)$$

são ou não *linearmente independentes*:

Justifique sua resposta.

Grupo Geometria

Exercício 18

(a) Determine a equação do plano no espaço xyz que passa pelos pontos

$$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (3, 2, 0) \text{ e } P_3 = (1, 2, 3), \text{ na forma geral}$$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

(b) Dê as equações paramétricas desse plano.

(c) Considere a reta que está na intersecção do plano obtido no item (a) com o plano dado por $2x + 5y - z - 2 = 0$.

Ache as equações paramétricas dessa reta, isto é, apresente as soluções do sistema

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= -d \\ 2x + 5y - z &= 2 \end{aligned}$$

na forma paramétrica.

Exercício 19 Decida em cada um dos itens se o conjunto dado é “um ponto”, uma reta ou um plano. Justifique.

(a) $\{X \in \mathbf{R}^3 \mid X = (1, 2, 4) + t(1, 2, 1) + s(-2, -4, -2), \ t, s \in \mathbf{R}\}.$

(b) $\{X \in \mathbf{R}^3 \mid X = (1, 2, 4) + t(2, 4, 8) + s(1, 1, 1), \ t, s \in \mathbf{R}\}.$

(c) $\{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 \mid y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 1, \ 5y_1 + 17y_2 + 24y_3 = 7, \\ 6y_1 + 20y_2 + 28y_3 = 8\}.$

Grupo Normas e Produto Interno

Exercício 20 Mostre que $\| \cdot \|_\infty : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$ é uma norma em $\mathbf{R}^3$.

Exercício 21 Mostre que $\| \cdot \|_1 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ é uma norma em $\mathbf{R}^3$.

Exercício 22 Mostre que $\| \cdot \|_2 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ é uma norma em $\mathbf{R}^3$.

Exercício 23 Seja $V = \mathbf{R}^3$ e seja $u = (2, 3, 5)$. Calcule:

(a) $\|u\|_2$.

(a) $\|u\|_1$.

(a) $\|u\|_\infty$.

Exercício 24 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$ com produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Mostre que $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ é uma norma em V .

Exercício 25 Seja $V = \mathbf{R}^3$.

Considere em V o “produto” definido por

$$\langle u | v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Sejam $x = (1, 2, -3)$ e $y = (4, -5, 7)$.

(a) Mostre que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ é um produto interno em V .

(b) Calcule $\langle x | y \rangle$.

(c) Calcule $\|y\|$ onde $\| \cdot \|$ é a norma associada ao produto interno definido nesta questão.

(d) Num espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e norma associada $\| \cdot \|$, o ângulo θ entre dois vetores $u \neq \vec{O}$ e $v \neq \vec{O}$ é dado por $\langle u | v \rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$. Calcule o ângulo entre os vetores x e y .

Exercício 26 Seja $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ o espaço das matrizes 2×2 .

Considere em V o “produto” definido por

$$\langle H | K \rangle = h_{11}k_{11} + h_{12}k_{12} + h_{21}k_{21} + h_{22}k_{22}.$$

Sejam A e B as matrizes dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Mostre que $\langle \quad | \quad \rangle$ é um produto interno em $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.
- (b) Calcule $\langle A | B \rangle$
- (c) Calcule $\|B\|$ onde $\| \cdot \|$ é a norma associada ao produto interno definido nesta questão.
- (d) Num espaço vetorial com produto interno $\langle \quad | \quad \rangle$ e norma associada $\| \cdot \|$, o ângulo θ entre dois vetores $u \neq \vec{O}$ e $v \neq \vec{O}$ é dado por $\langle u | v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$. Calcule o ângulo entre as matrizes A e B .