Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes $A_{m\times r}$ e $B_{s\times n}$ a regra para que o produto esteja definido é que $r = s$. Isto é, **a quantidade de linhas da matriz A deve ser igual a quantidade de colunas da matriz B.**

Assim, sejam as matrizes $A_{m\times r}$ e $B_{r\times n}$ representadas por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma temos que a matriz produto $AB = [c_{ij}]$ será uma matriz de ordem $m \times n$, onde os elementos são dados pela regra:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}}$$

Em palavras, o elemento c_{ij} é resultado da soma do produto das entradas da i-ésima linha de A com as entradas da j-ésima coluna de B.

PERGUNTA: Como fazemos para determinar a i-ésima linha de AB sem determinar toda a matriz AB?

Queremos encontrar a matriz-linha

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} c_{i1} &= a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{ir}b_{r1} \\ c_{i2} &= a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{ir}b_{r2} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ c_{in} &= a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \cdots + a_{ir}b_{rn}. \end{aligned}$$

E, em notação matricial, temos

$$\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

Isto é, **a i-ésima linha da matriz produto AB é o produto da i-ésima linha da matriz A pela matriz B.**

Se a i-ésima linha da matriz A for composta por apenas uma entrada não-nula, suponha que essa entrada não-nula é 1 e está na j-ésima coluna. O que podemos afirmar sobre a i-ésima linha da matriz produto AB?

Observe,

$$\begin{pmatrix} 0_{i1} & 0_{i2} & \dots & 1_{ij} & \dots & 0_{ir} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jn} \end{pmatrix}$$

Isto é, a i-ésima linha da matriz AB é formada pela j-ésima linha da matriz B.

A seguir, veremos um exemplo para ilustrar o exposto acima.

Exemplo: Sejam as matrizes $A_{3\times5}$ e $B_{5\times4}$ abaixo. Responda:

a. Podemos efetuar o produto de A por B? E de B por A? Justifique.

b. Se a resposta do item (a) for afirmativa, quantas linhas e quantas colunas tem a matriz produto AB?

c. Determine a matriz AB destacando suas linhas.

d. O que podemos observar quanto às linhas de AB?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 11 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

a. O produto AB pode ser efetuado pois a quantidade de colunas da matriz A é igual à quantidade de linhas da matriz B. Já o produto BA não.

b. A matriz produto AB tem 3 linhas e 4 colunas e, portanto, ordem 3×4.

c. Vamos determinar a matriz AB determinando suas linhas.

1ª linha:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 11 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_1$$

2ª linha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 11 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}_2$$

3ª linha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_3 \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 11 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}_3$$

Portanto,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 22 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

d. Note que

i. a primeira linha de AB é exatamente a primeira linha de B multiplicada por -1;

ii. a segunda linha de AB é exatamente a terceira linha de B multiplicada por 2;

iii. e, a a terceira linha de AB é, como já tinhamos discutido, a segunda linha de B.

A conclusão dos itens (*i.*) e (*ii.*) acima podem ser estendidos para casos gerais de modo análago ao que fizemos para concluir o item (*iii.*).

Obs.:

- Vocês podem usar essas breves considerações a respeito de produto de matrizes, para os exercícios 7 e 8 da 1ª lista. Em casos de dúvidas a gente pode discutir mais na monitoria;
- O método para solução dos exercícios não é único, aqui quis dar apenas um caminho para (os que ainda não fizeram) começarem a pensar numa solução;
- Não se assustem com a notação matricial, por causa da grande quantidade de índices. Pelo contrário, tentem entender o significado e a importância deles no estudo e na descrição das matrizes.